

IFT3355: Infographie  
Transformations Géométriques

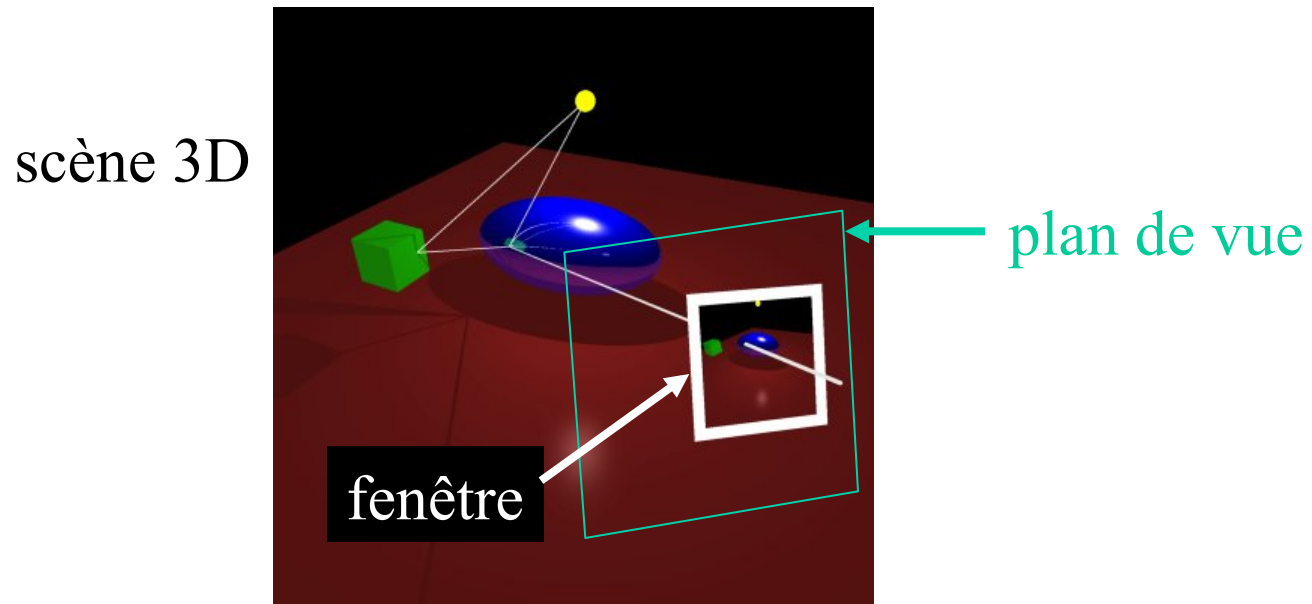
© Pierre Poulin

Dép. I.R.O.

Université de Montréal

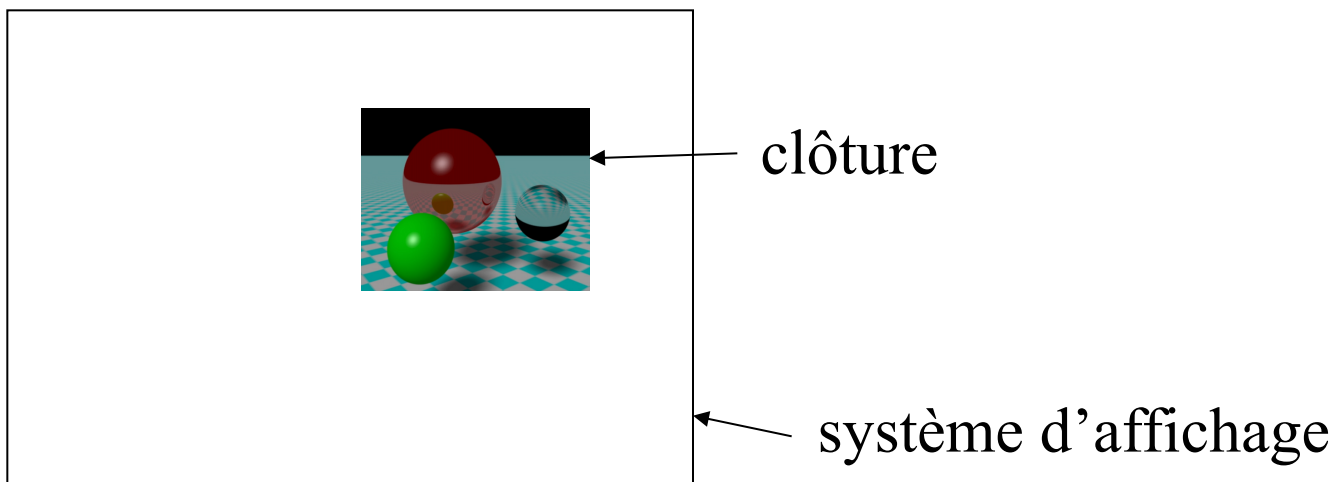
# Fenêtre (*window*)

- Région dans l'espace 3D à travers laquelle on voit la scène
- Note: concept différent de celui des fenêtres en *Xwindow*...



# Clôture (*viewport*)

- Partie de l'écran où la fenêtre est affichée



# Série de transformations

- Modèle 3D
- Système de coordonnées de vue
  - construit un plan de vue en 3D
  - définit une fenêtre dans ce plan

↓ Projection

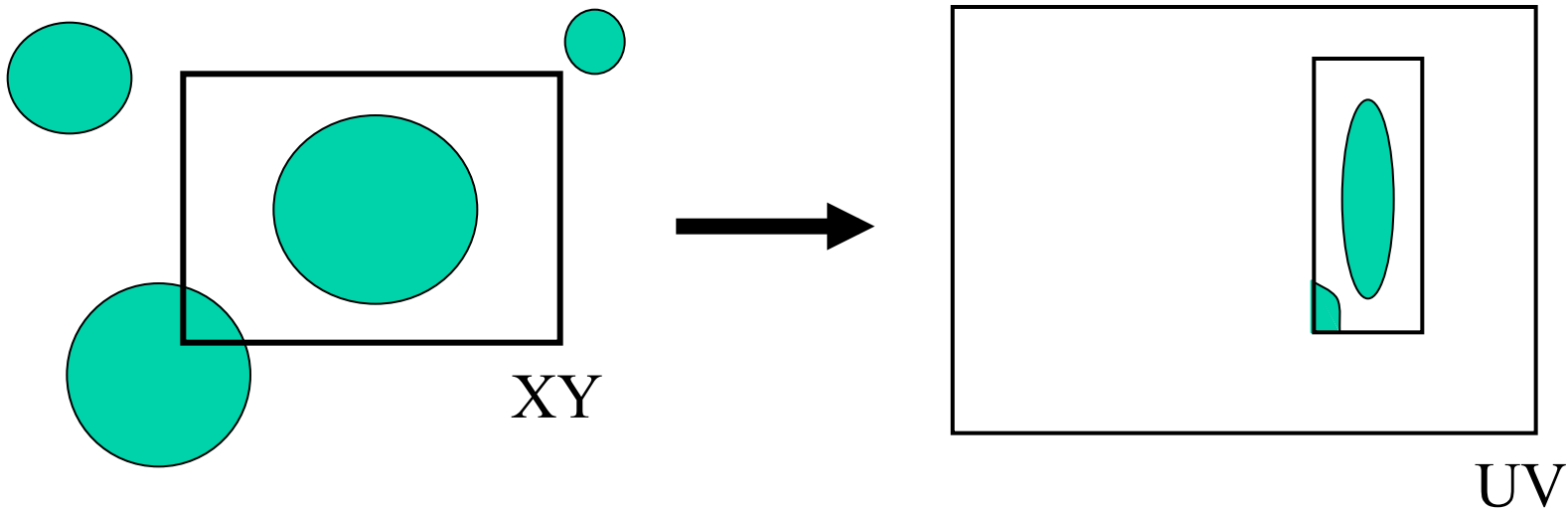
- Coordonnées de vue pour chaque point en 3D
- Définit une clôture dans un système normalisé  $[0,1]$

↓ Mapping fenêtre-clôture

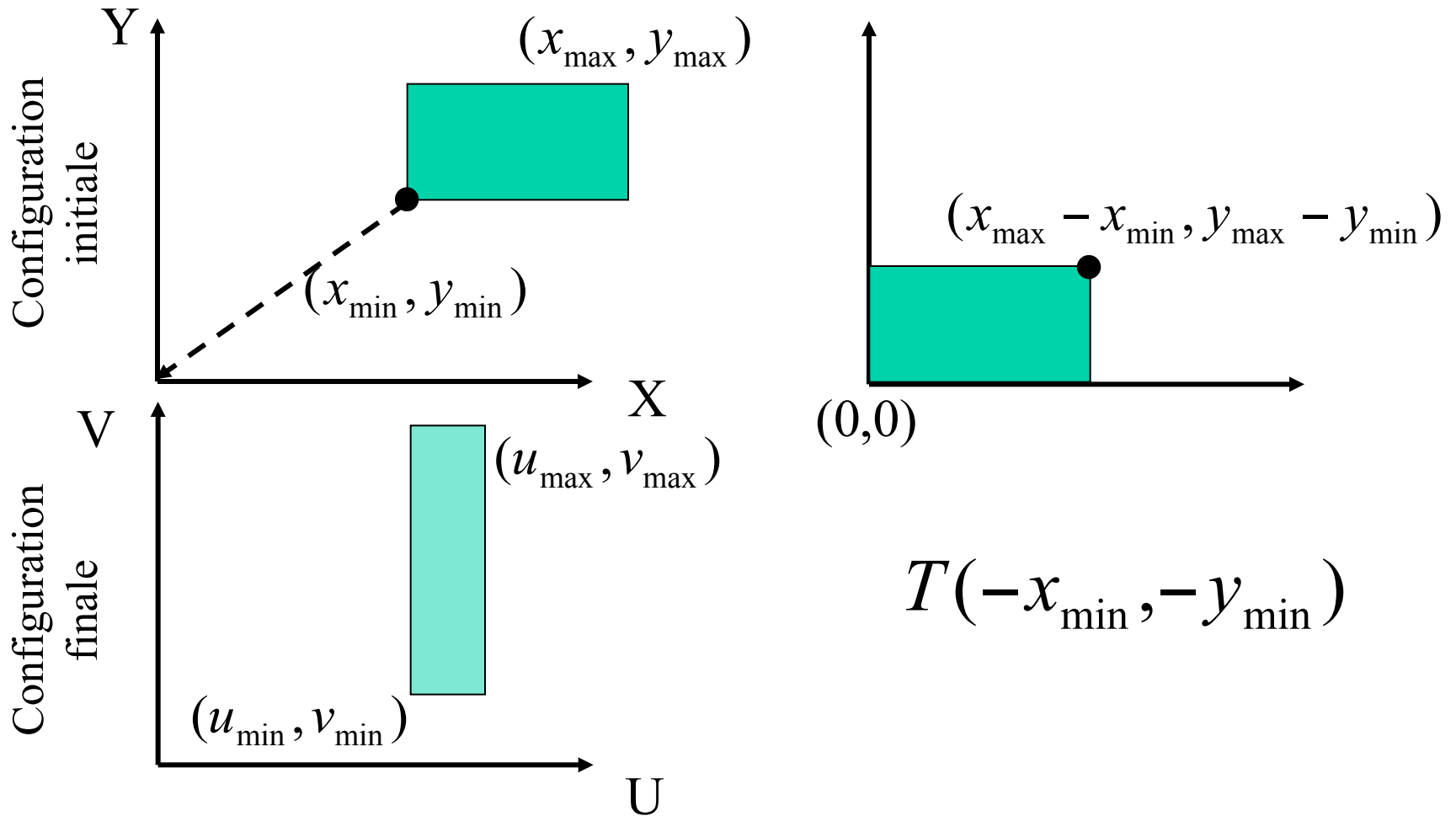
- Coordonnées d'affichage

# Mapping

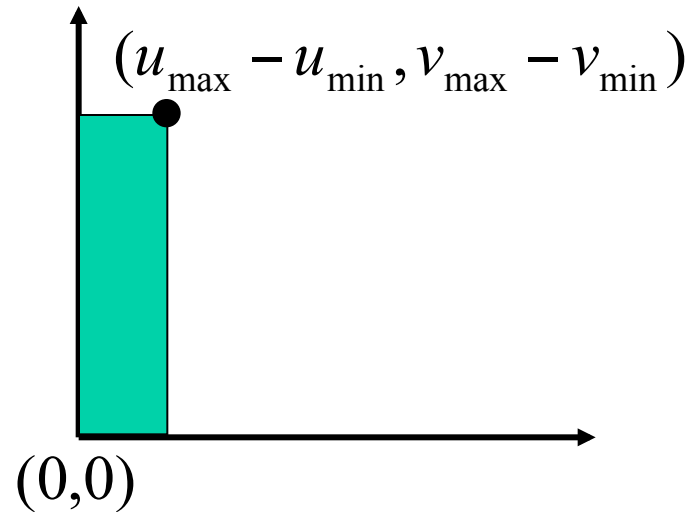
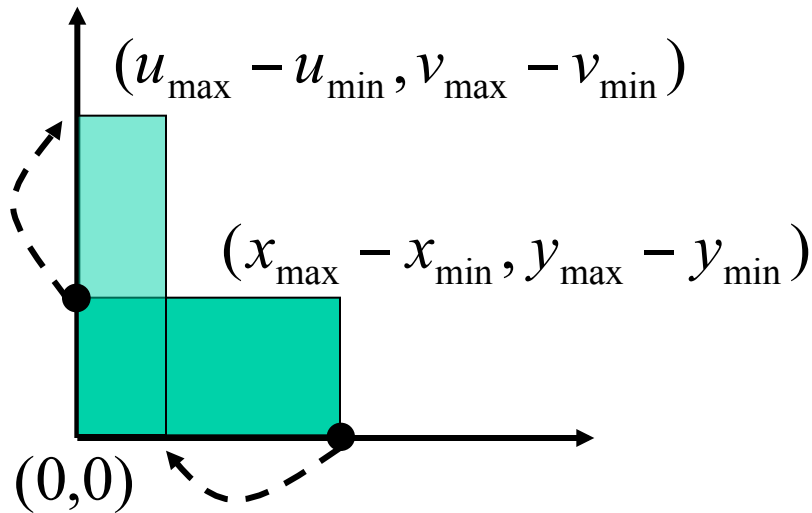
- Coordonnées du monde : coordonnées d'affichage
- Fenêtre : clôture
- XY : UV



# Transformation 2D: rectangle à rectangle



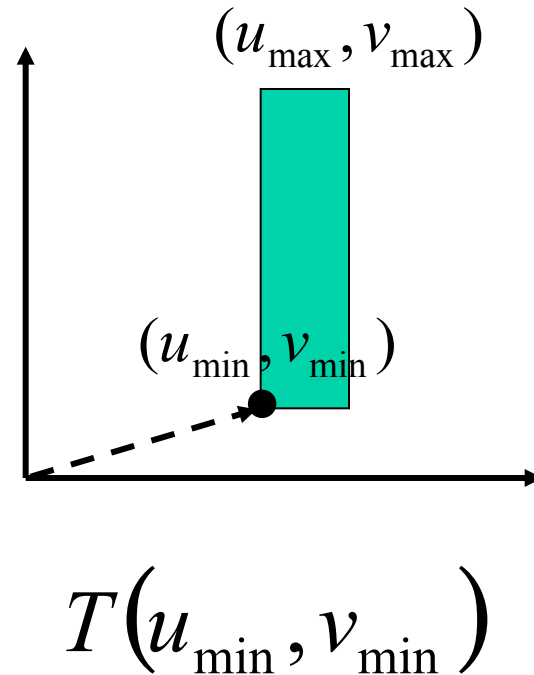
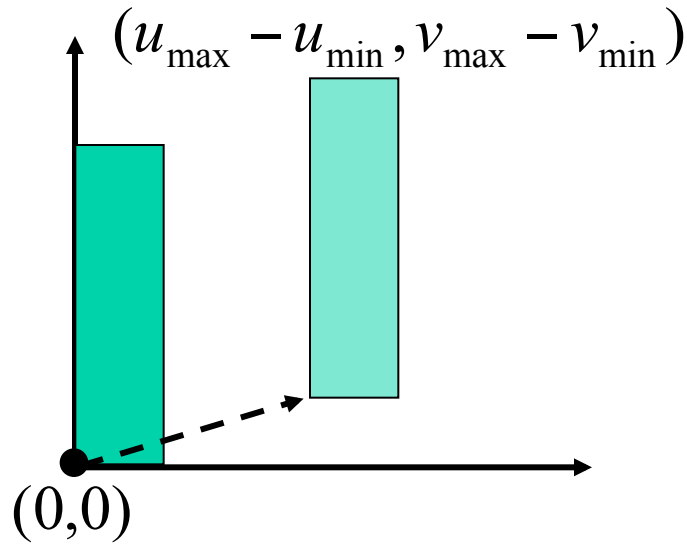
# Transformation 2D: rectangle à rectangle



$$S\left(\frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}\right) =$$

$$S\left(\frac{u_{\max} - u_{\min}}{1}, \frac{v_{\max} - v_{\min}}{1}\right) \times S\left(\frac{1}{x_{\max} - x_{\min}}, \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}}\right)$$

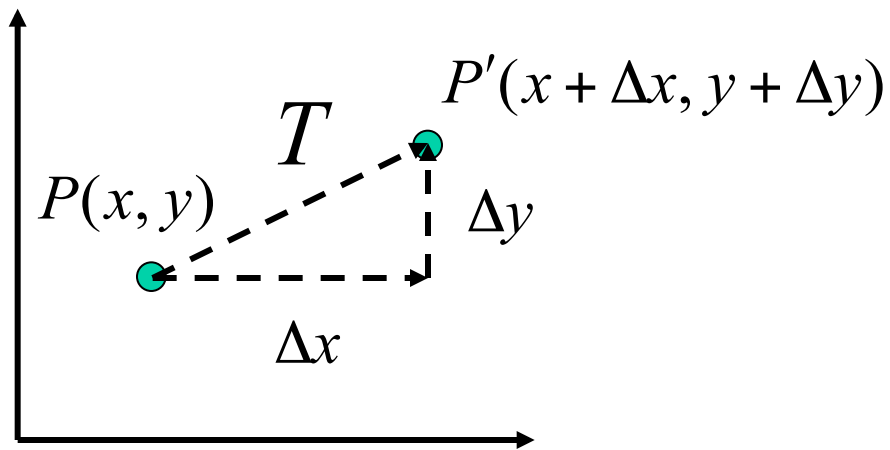
# Transformation 2D: rectangle à rectangle



$$M_{w \rightarrow v} = T(u_{\min}, v_{\min}) S\left(\frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}\right) T(-x_{\min}, -y_{\min})$$



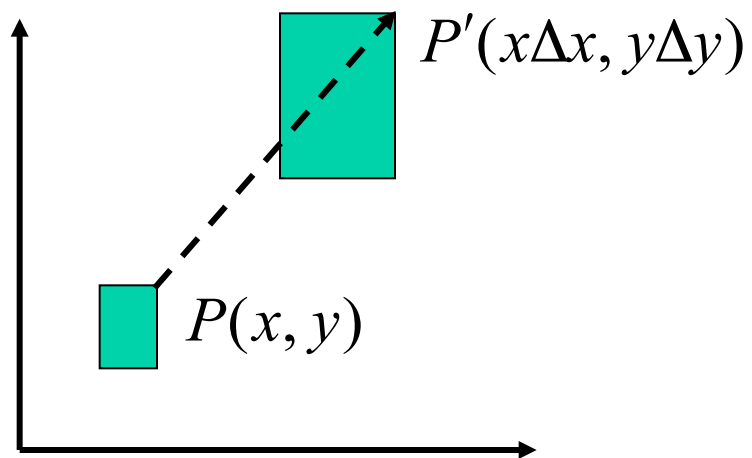
# Translation en 2D



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

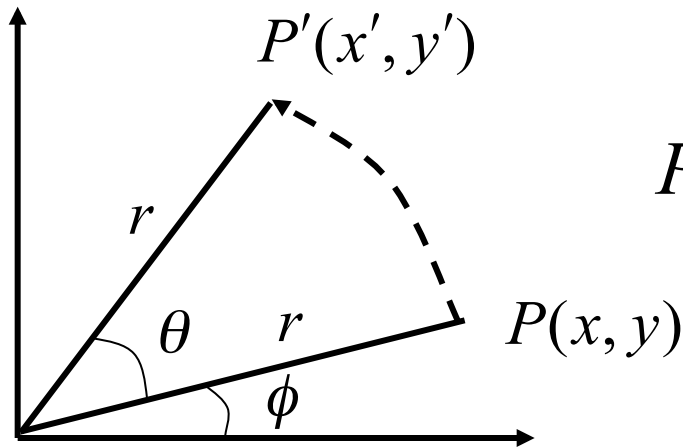
$$P' = T + P$$

# Changement d'échelle en 2D (*scaling*)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x & 0 \\ 0 & \Delta y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$P' = SP$$

# Rotation en 2D



$$P : \begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

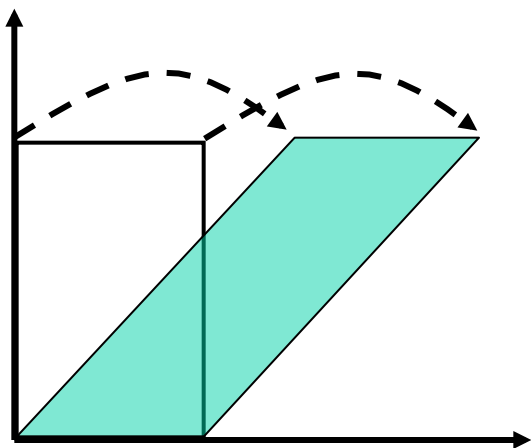
$$P' : \begin{cases} x' = r \cos(\phi + \theta) \\ \quad = \underline{r \cos \phi \cos \theta} - \underline{r \sin \phi \sin \theta} \\ \quad = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = r \sin(\phi + \theta) \\ \quad = \underline{r \cos \phi \sin \theta} + \underline{r \sin \phi \cos \theta} \\ \quad = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

$\theta$  sens anti-horaire

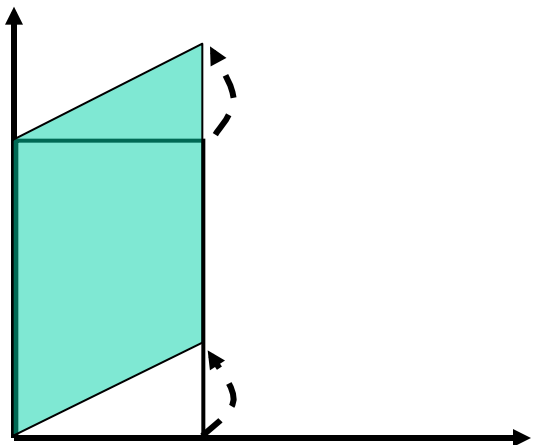
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P' = RP$$

## Cisaillement en 2D (*shearing*)

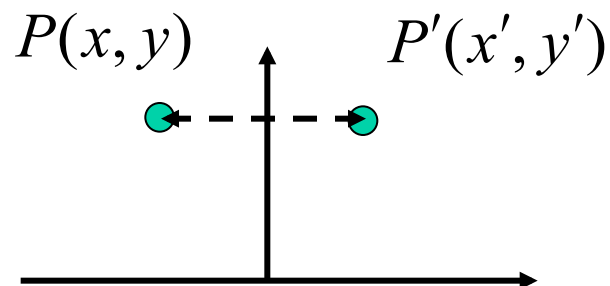


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$P' = Sh_x P$$

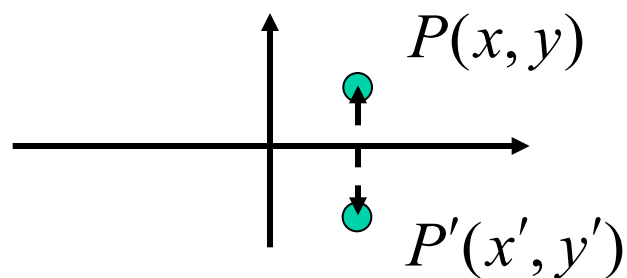


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$P' = Sh_y P$$

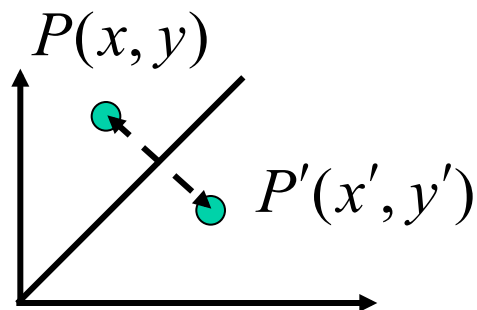
# Réflexion en 2D



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# Coordonnées homogènes

- $T+P$  en addition mais les autres transformations sont des multiplications
- Représentation des transformations sous une forme matricielle unique:

+ uniformité

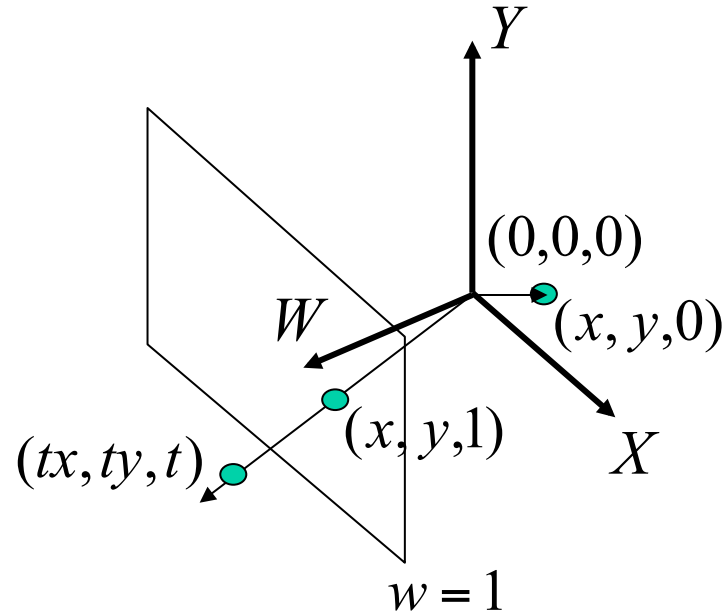
+ composition

+ opérations des 4x4 sont exécutées en parallèle en hardware sur la plupart des ordinateurs

- optimisations possibles...

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & t_x \\ m_{21} & m_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = xm_{11} + ym_{12} + t_x \\ y' = xm_{21} + ym_{22} + t_y \end{cases} \quad (9 \text{ mult}, 6 \text{ add}) \text{ vs. } (4 \text{ mult}, 4 \text{ add})$$

# Coordonnées homogènes en 2D



$P(tx,ty,tw)$  :  $w \neq 0, t \neq 0$

$P\left(\frac{tx}{tw}, \frac{ty}{tw}, 1\right)$  : coordonnée cartésienne d'un point homogène

$P(x,y,1)$  : point dans le plan  $w = 1$ , point homogène

$w = 0$  : point à l'infini (direction ou vecteur)

$(0,0,0)$  : n'est pas permis...

# Pré-multiplication vs. post-multiplication

Nouvelle méthode

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = T(\Delta x, \Delta y)P$$

Ancienne méthode

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix}$$

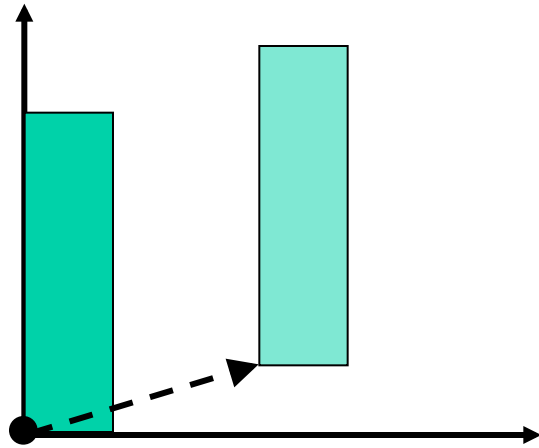
$$P'^t = P^t T(\Delta x, \Delta y)^t$$

$$(TP)^t = P^t T^t$$

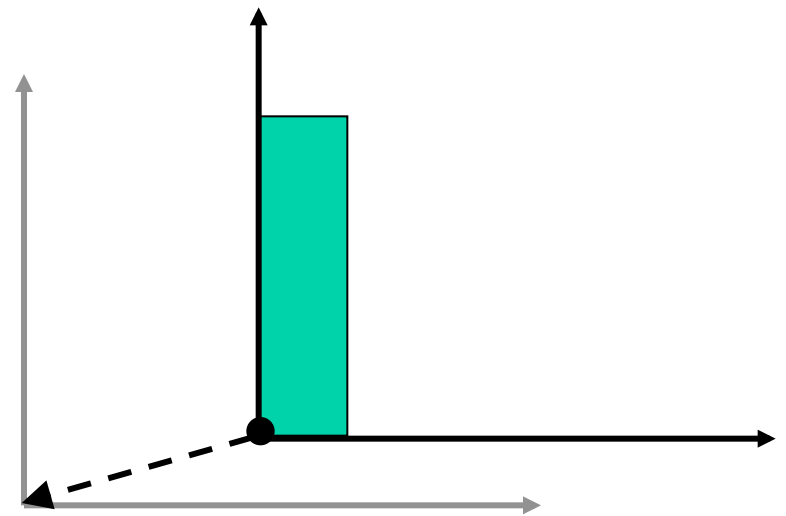


Dualité:

Transformer l'objet ou  
Transformer le système de coordonnées

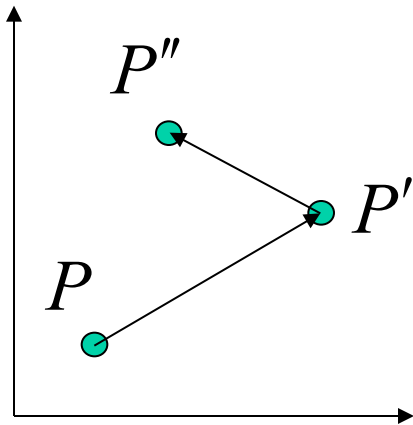


$$T_{\text{objet}}(u, v)$$



$$T_{\text{coord}}(-u, -v)$$

# Combinaison de translations en 2D



$$P' = T(\Delta x_1, \Delta y_1)P$$

$$P'' = T(\Delta x_2, \Delta y_2)P'$$

$$= T(\Delta x_2, \Delta y_2)T(\Delta x_1, \Delta y_1)P$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 1 & \Delta y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & \Delta y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 + \Delta x_2 \\ 0 & 1 & \Delta y_1 + \Delta y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= T(\Delta x_1 + \Delta x_2, \Delta y_1 + \Delta y_2)P$$

# Combinaison de changements d'échelle en 2D

$$\begin{aligned} P'' &= S(\Delta x_2, \Delta y_2) S(\Delta x_1, \Delta y_1) P \\ &= \begin{bmatrix} \Delta x_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta x_1 \Delta x_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_1 \Delta y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= S(\Delta x_1 \Delta x_2, \Delta y_1 \Delta y_2) P \end{aligned}$$

## Combinaison de rotations en 2D

$$P'' = R(\phi)R(\theta)P$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \sin \theta + \cos \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\phi + \theta) & -\sin(\phi + \theta) & 0 \\ \sin(\phi + \theta) & \cos(\phi + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= R(\phi + \theta)P$$

# Combinaisons de matrices de transformation

+ efficacité

– une seule matrice composée est utilisée au lieu d'une série de matrices

- $\{ R, T \}$

– (*rigid-body*)

– préserve les longueurs et les angles relatifs

- $\{ R, T, S \}$

– transformation affine

– préserve le parallélisme des lignes (mais pas les longueurs ni les angles)

# Propriétés des matrices de transformations

- Commutativité

$$T_1 T_2 = T_2 T_1$$

$$S_1 S_2 = S_2 S_1$$

$$R_1 R_2 = R_2 R_1$$

$$S(\Delta x = \Delta y) R = R S(\Delta x = \Delta y)$$

- Associativité

$$M_1 (M_2 M_3) = (M_1 M_2) M_3$$

- Inverses

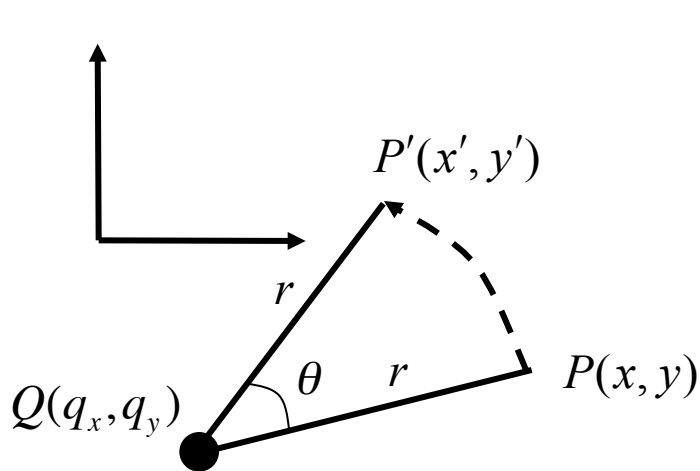
$$T^{-1}(x, y) = T(-x, -y)$$

$$S^{-1}(x, y) = S\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

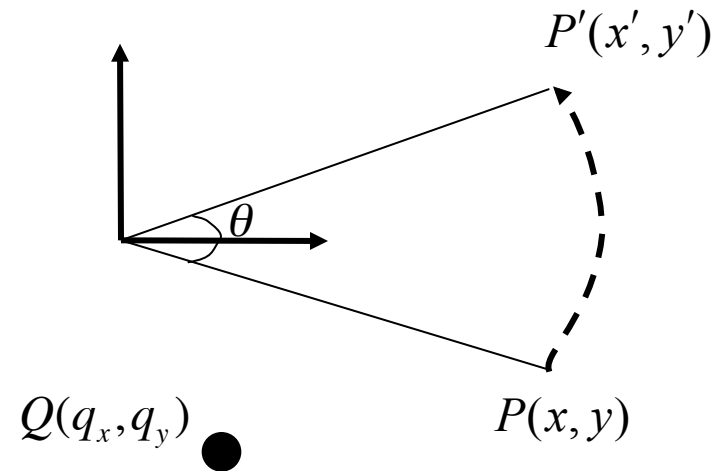
$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta) = R^t(\theta)$$

# Exemple d'une série de transformations

- Rotation autour d'un point  $Q$
- On sait comment faire une rotation autour de l'origine, mais pas autour d'un point arbitraire



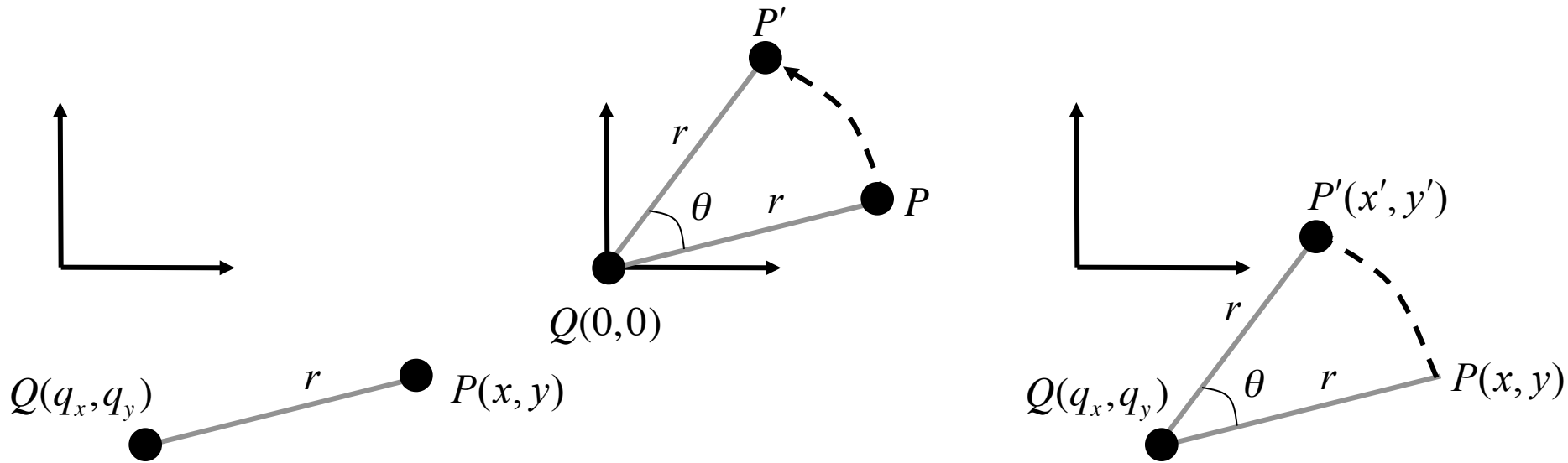
Ce que l'on veut



Ce qui arrive avec  
une seule rotation

# Exemple d'une série de transformations

1. Translation telle que  $Q$  est à l'origine  $T(-q_x, -q_y)$
2. Rotation de  $\theta$  autour de l'origine  $R(\theta)$
3. Translation de l'origine jusqu'à  $Q$   $T(q_x, q_y)$



$$M = T(q_x, q_y)R(\theta)T(-q_x, -q_y)P$$



# Exemple de non-commutativité

$$T(\Delta x, \Delta y)S(s_x, s_y) \neq S(s_x, s_y)T(\Delta x, \Delta y)$$

$$TS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & \Delta x \\ 0 & s_y & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

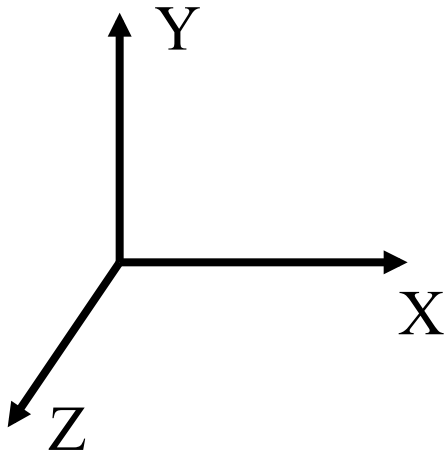
$$ST = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & s_x \Delta x \\ 0 & s_y & s_y \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Transformations en 3D

2D: matrice  $3 \times 3$  en coordonnées homogènes

3D: matrice  $4 \times 4$  en coordonnées homogènes

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, z, w)$$



Systeme de coordonnées  
de la main droite  
rotation positive:  
sens anti-horaire

# Transformations 3D de base

Translation

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Changement d'échelle

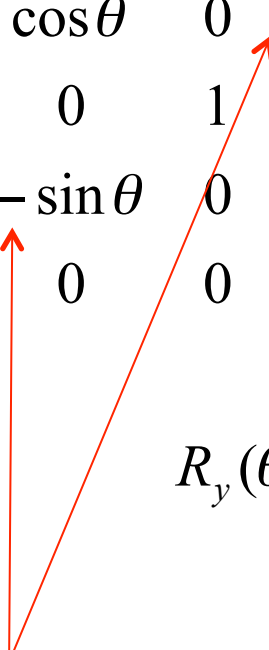
$$S = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Transformations 3D de base

## Rotations

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_x(\theta)$   $R_y(\theta)$   $R_z(\theta)$



**Notez bien**

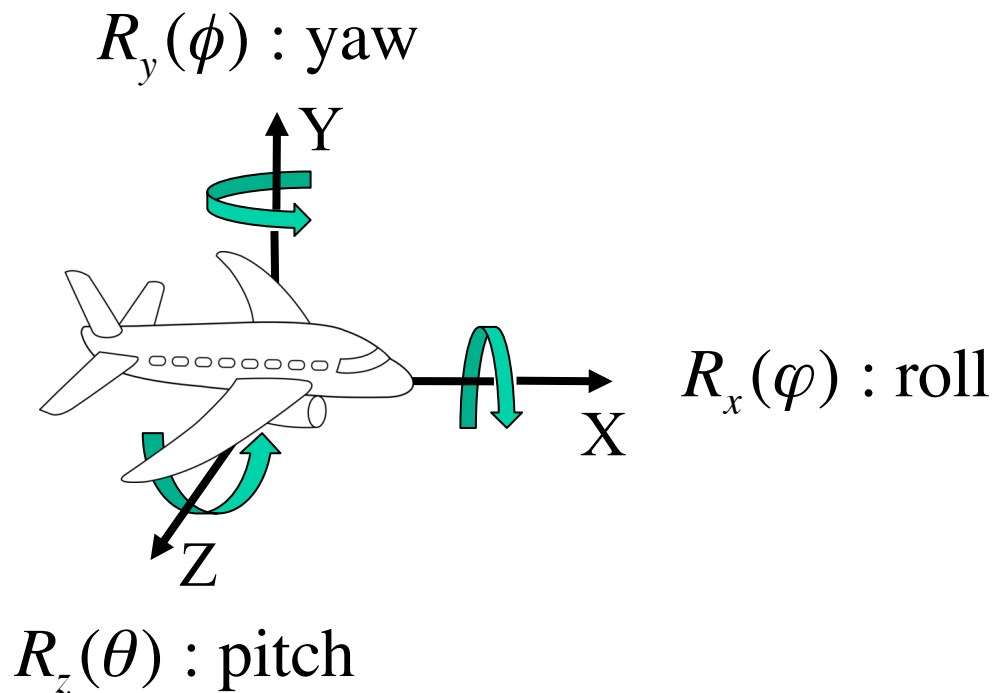
# Angles Eulériens

- Rotation comme une combinaison de trois rotations dans un ordre fixé par convention, sinon l'orientation finale est différente

(Note : ordre et axes peuvent être différents dans chaque domaine)

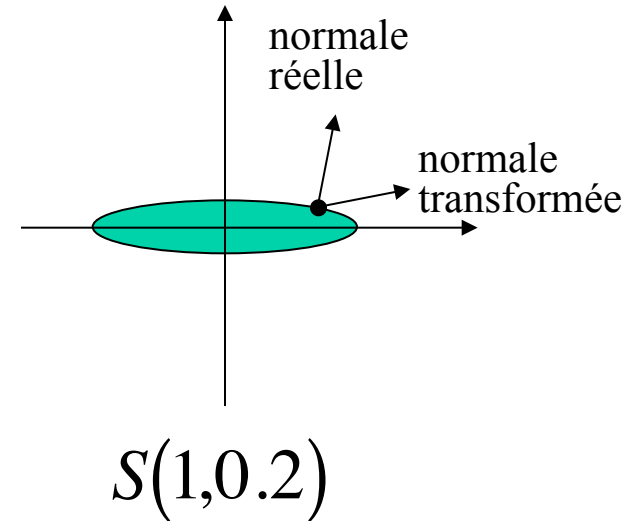
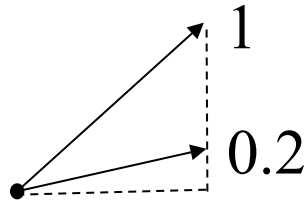
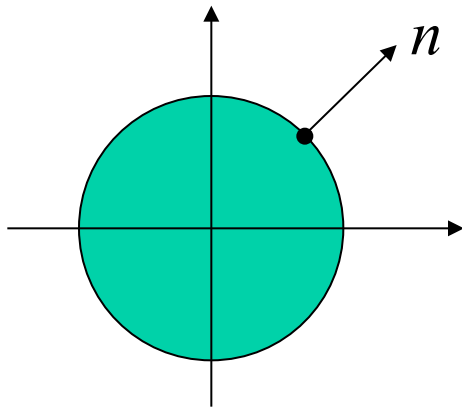
$$M = R_y(\phi)R_z(\theta)R_x(\varphi)$$

yaw ← pitch ← roll



# Transformation de normales

- Points, tangentes, vecteurs fonctionnent avec les matrices standards
- Normale à la surface fonctionne différemment



# Transformation de normales

$$t \cdot n = t^T n = 0 \quad : t \text{ tangente à la surface}$$

$$(Mt)^T (Xn) = 0 \quad : M \text{ transformation ; } X \text{ recherchée}$$

$$(t^T M^T)(Xn) = 0$$

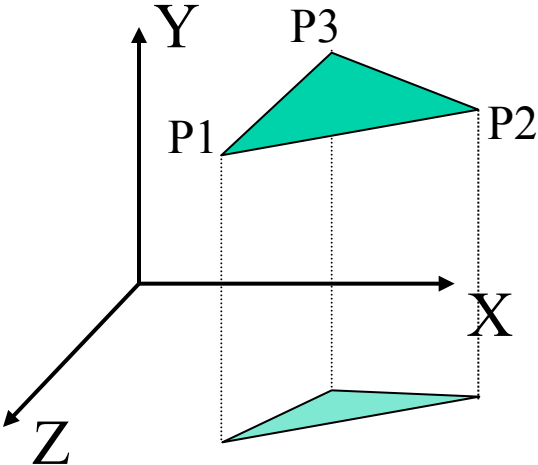
$$t^T (M^T X)n = 0$$

$$M^T X = I \quad : \text{puisque } t^T n = 0$$

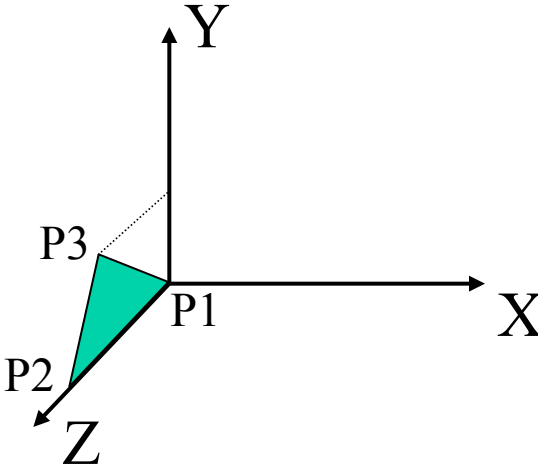
$$t^T M^T (M^T)^{-1} n = 0 \quad : (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T \text{ noté parfois } M^{-T}$$

La normale doit donc être transformée par l'inverse de la transposée  $(M^T)^{-1}$  de la transformation

# Exemple de composition de transformations



Original

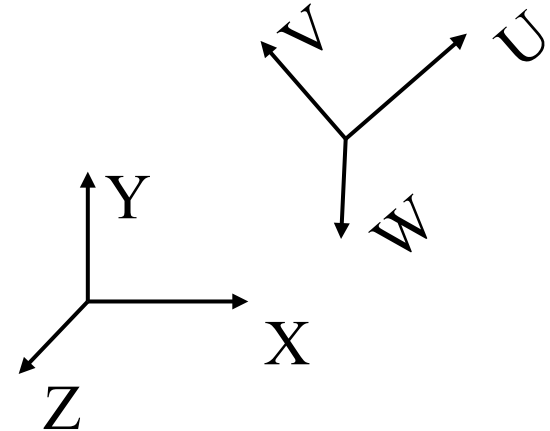


Final



# Transformation entre systèmes de coordonnées orthonormés

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} : \text{vecteur } U \text{ exprimé dans l'espace } XYZ$$

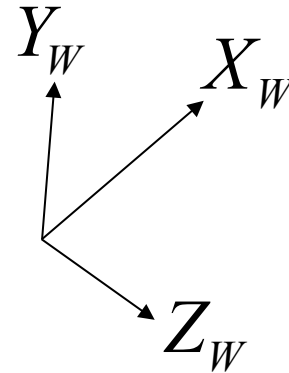
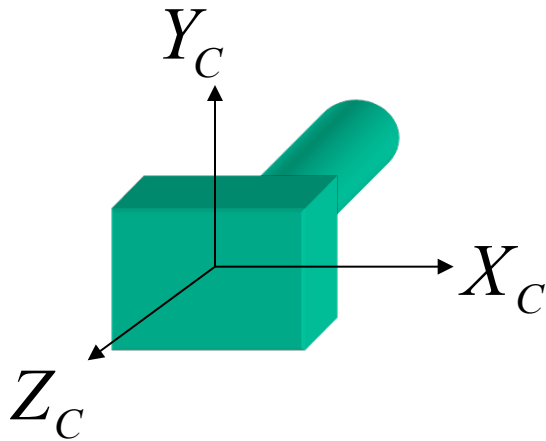
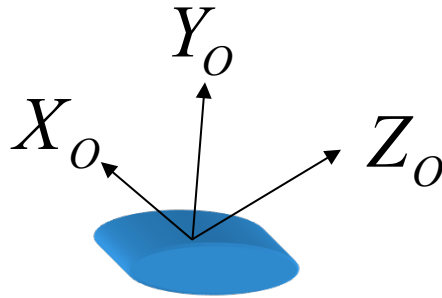


$$R_{UVW \rightarrow XYZ} : \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad R_{XYZ \rightarrow UVW} : \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & 0 \\ x_v & y_v & z_v & 0 \\ x_w & y_w & z_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{XYZ \rightarrow UVW} : R_{UVW \rightarrow XYZ}^{-1} = R_{UVW \rightarrow XYZ}^T : \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

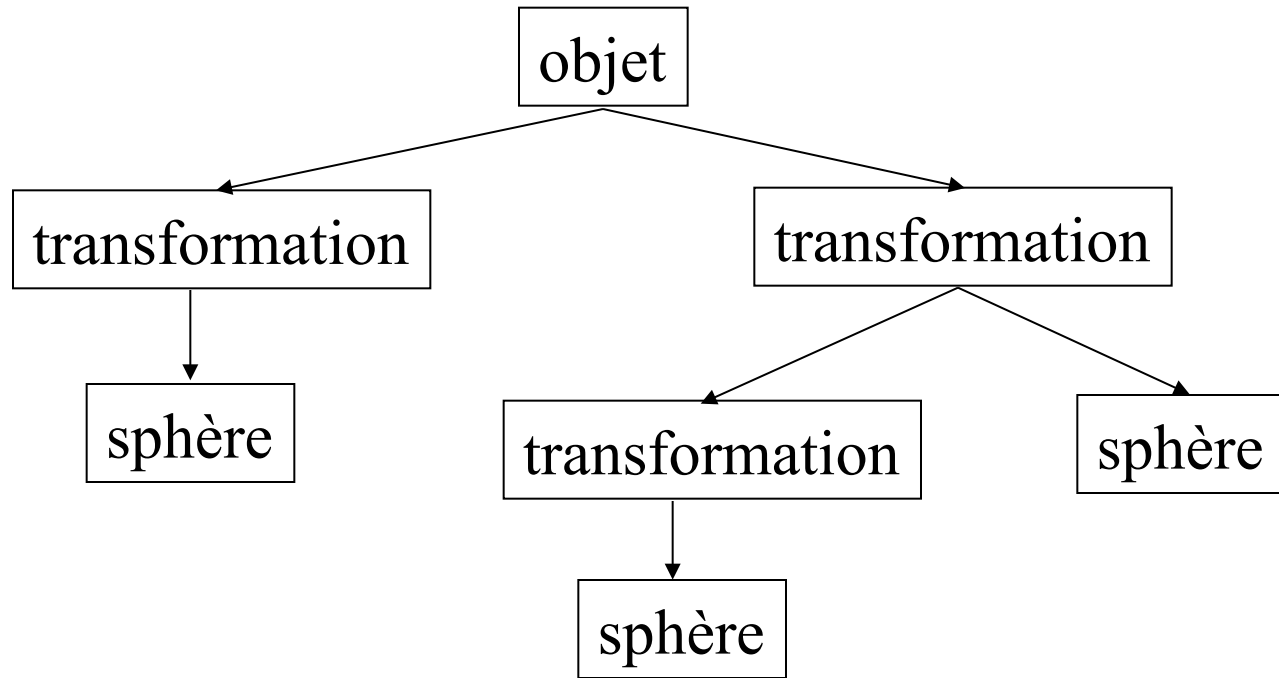
# Systemes de coordonnees

- monde
- camera
- objet



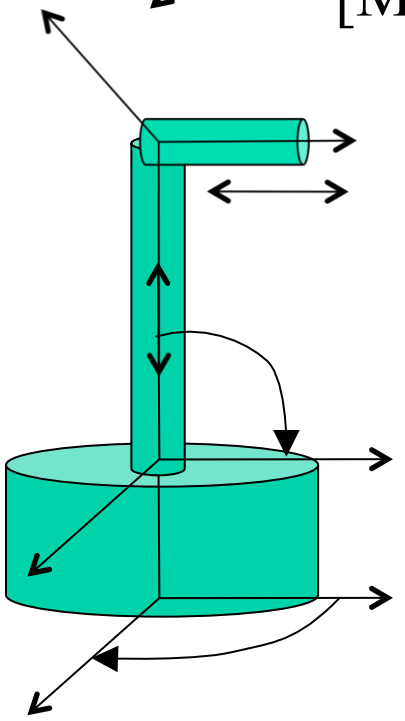
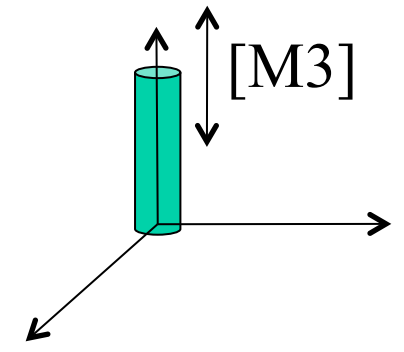
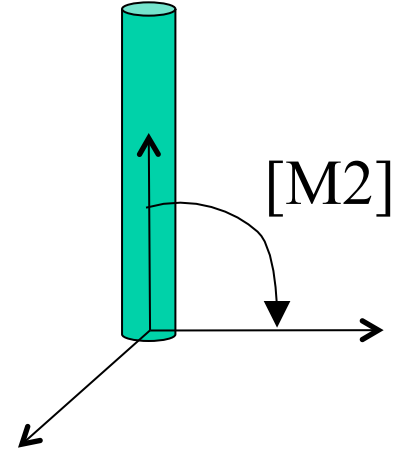
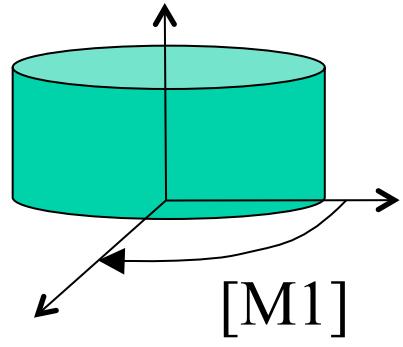
# Transformations hiérarchiques

- Objet représenté par un arbre de primitives (feuilles) transformées (nœuds)

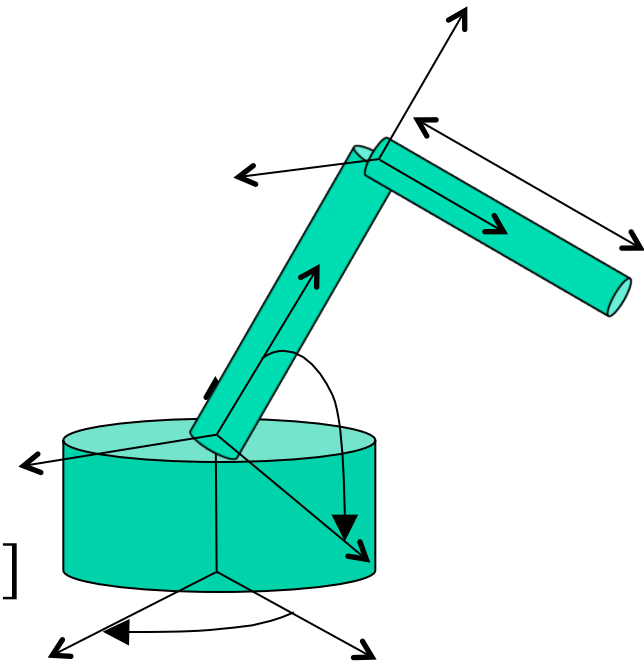


- Attention à l'origine et à l'orientation du système de coordonnées de chaque transformation

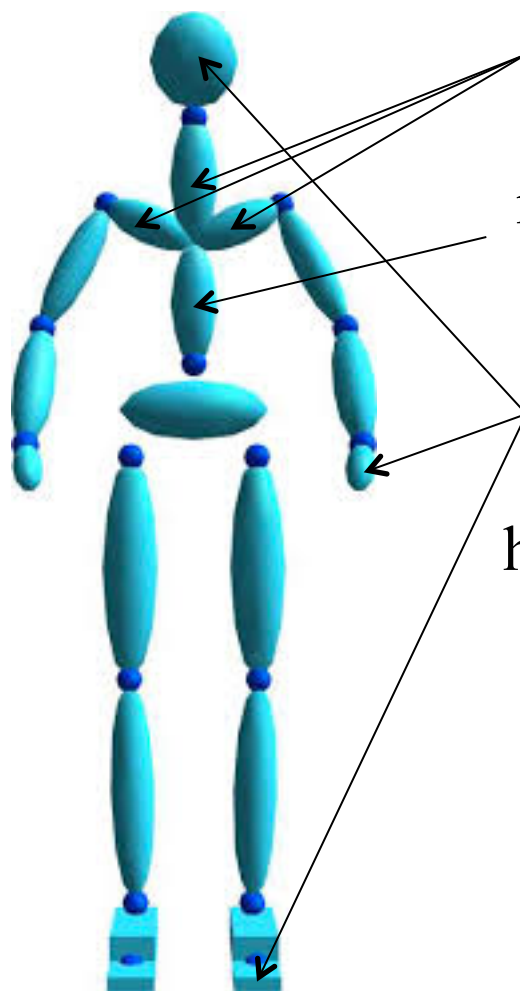
# Hiérarchies de transformations



base  $M=[M1]$   
↓ pushMatrix  $[M]$   
bras  $M=[M2]x[M1]$   
↓ pushMatrix  $[M]$   
téléscope  $M=[M3]x[M2]x[M1]$



# Hiérarchies pour un personnage



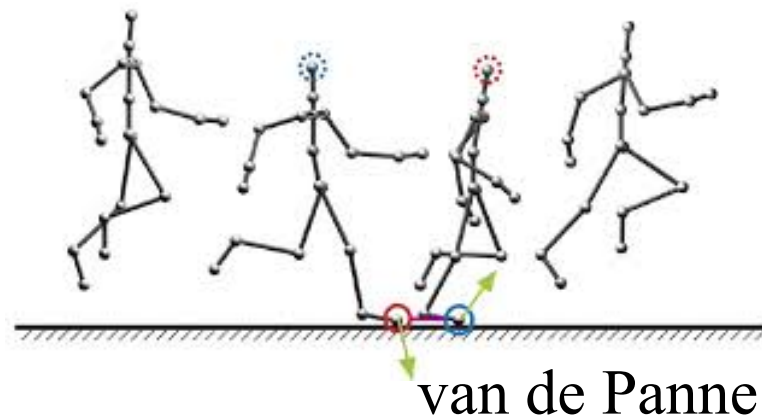
trois enfants à un même noeud

racine: bien choisir la racine est important pour aider au contrôle du personnage

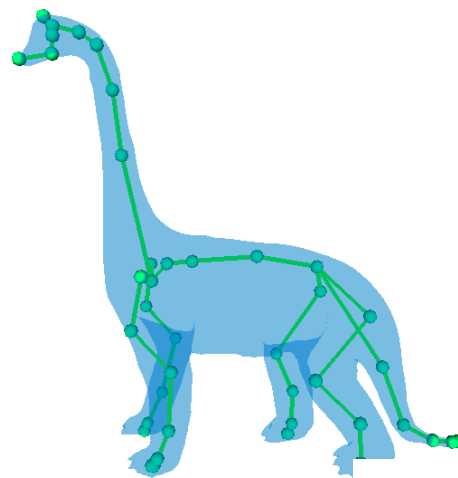
*end effectors*: extrémités d'un squelette

humain adulte:

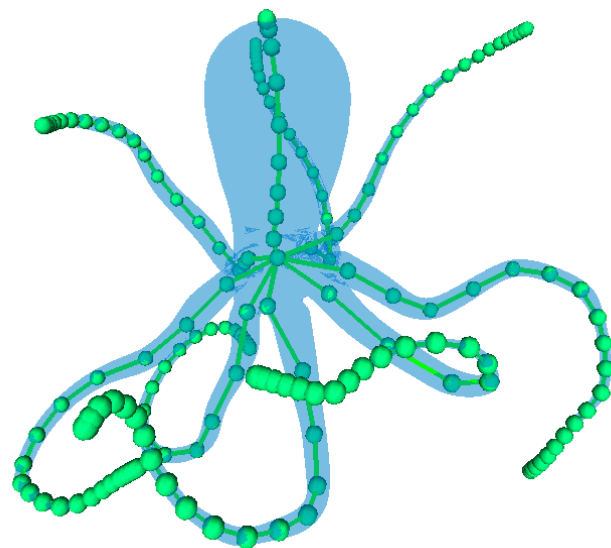
206 os, 244 degrés de liberté, 230 articulations



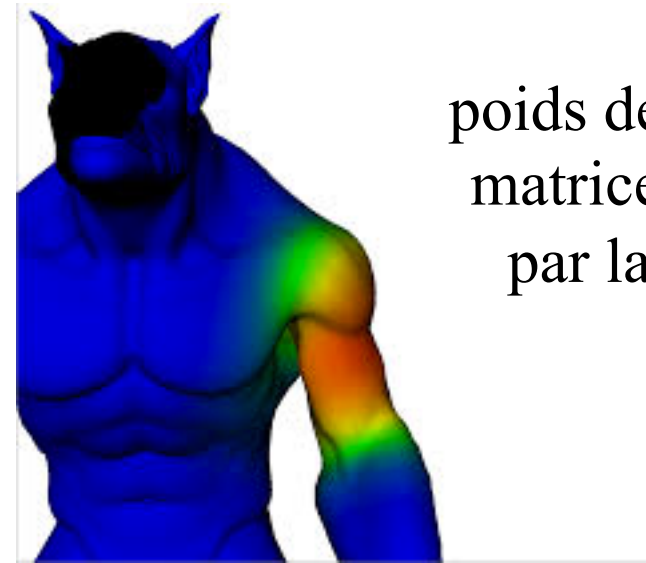
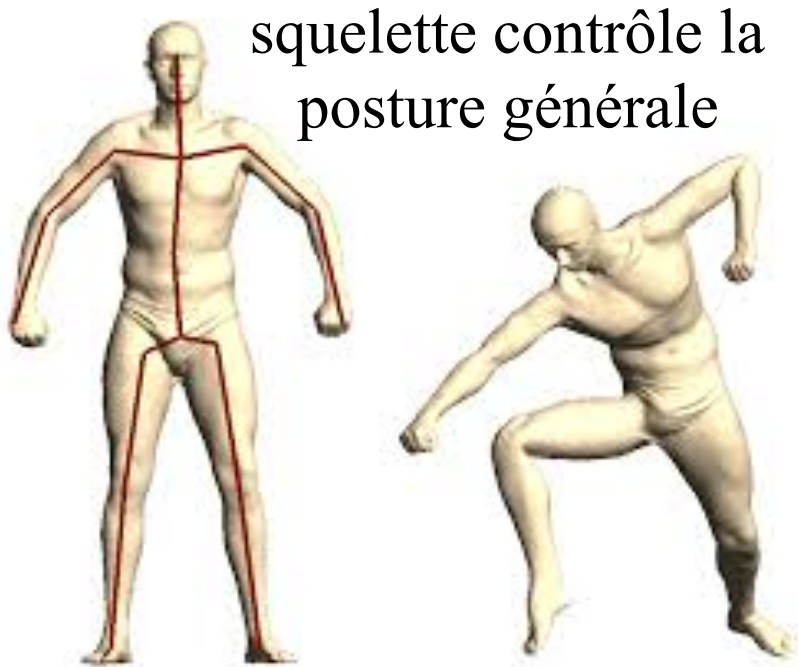
# Tout personnage articulé n'est pas humanoïde



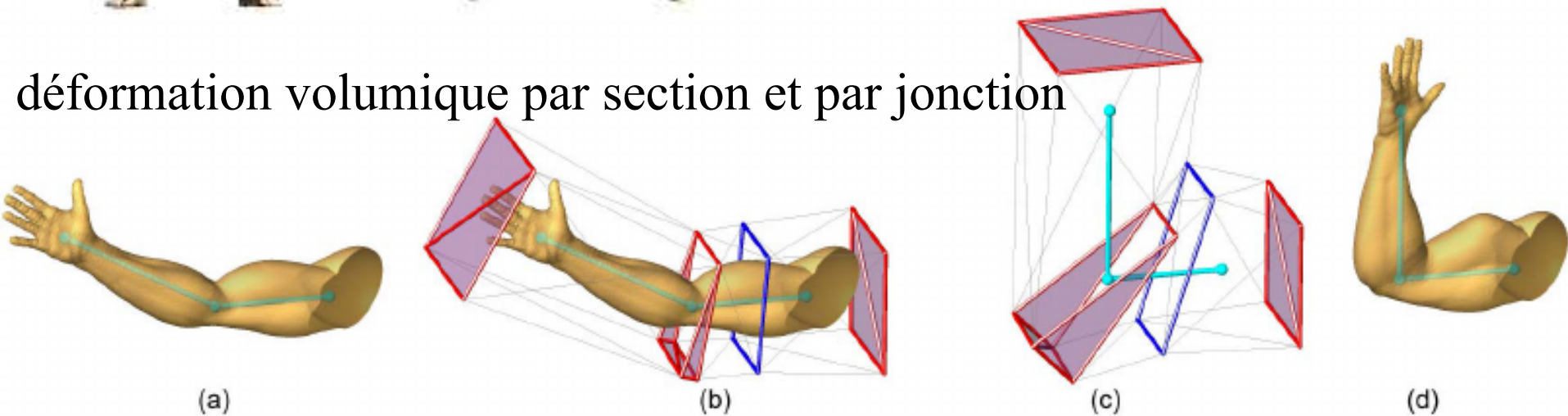
différents squelettes  
offrent des contrôles  
différents



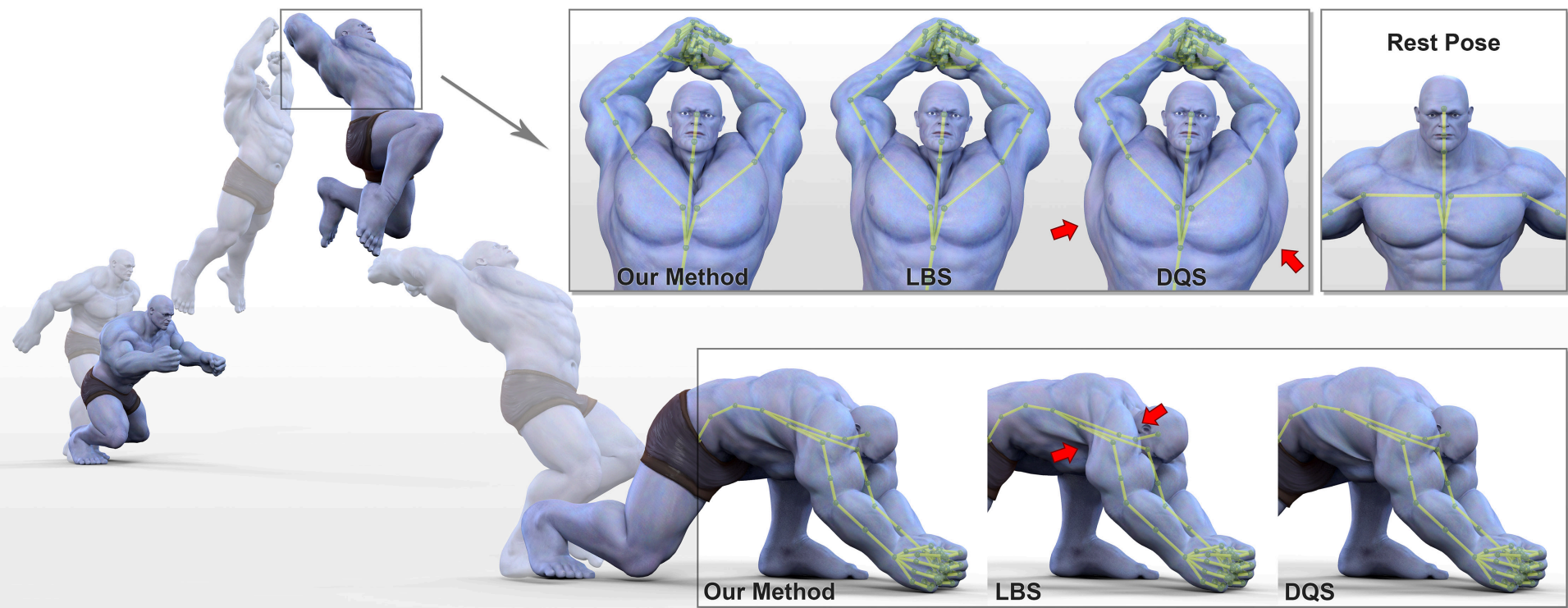
# Squelettes, *mesh/skinning* et poids/importance



déformation volumique par section et par jonction



# *Linear blending, dual quaternion, etc.*





# Et des modèles plus complexes

