

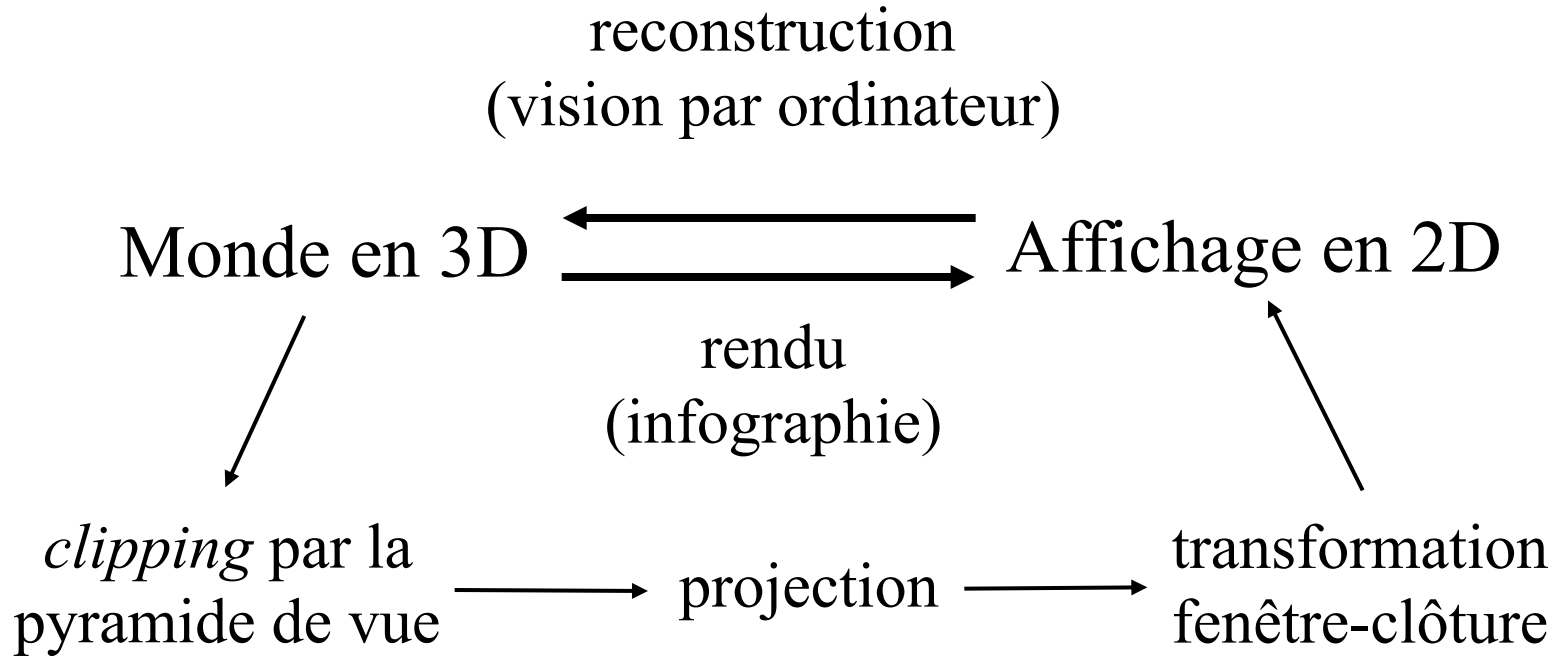
# IFT3355: Infographie Projections

© Pierre Poulin

Dép. I.R.O.

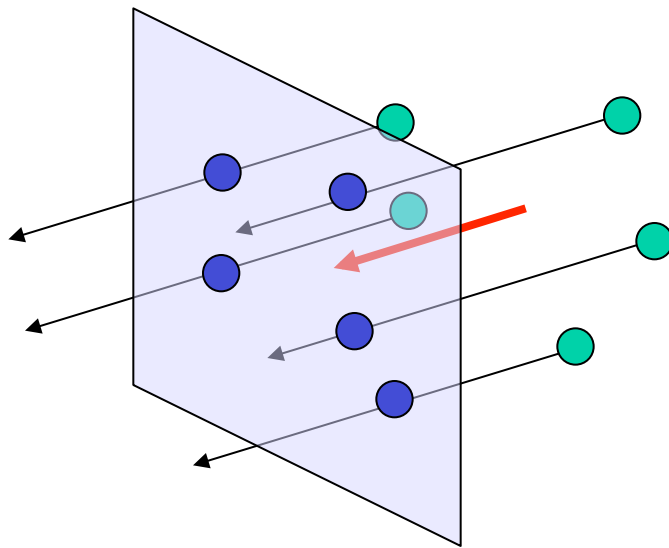
Université de Montréal

# 2D et 3D

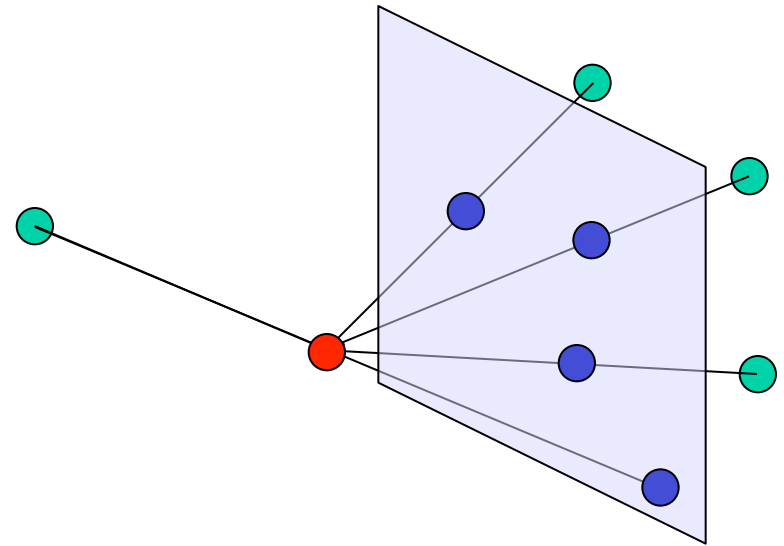


# Projecteurs

- Projection réduit le domaine  $P_n \in \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  où  $m < n$ 
  - typiquement en infographie,  $n=3$  et  $m=2$
- Un *projecteur* est un segment reliant  $P_n$  à un centre de projection



Parallèle



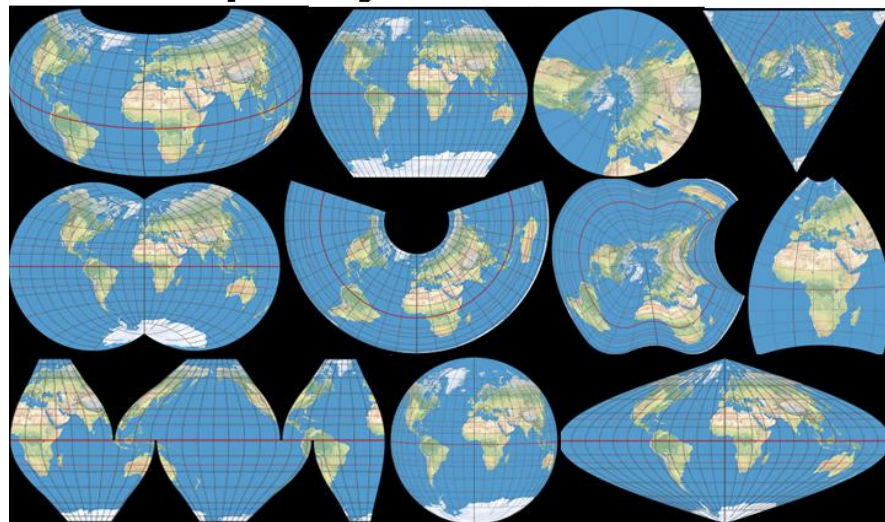
Perspective

# Projecteurs

- L'intersection d'un projecteur avec la surface de projection correspond à  $P_m$
- Lorsque cette surface est plane, on parle de *projection plane*
- Quelques exemples de projections non-planaires
  - oeil de poisson, projection omnimax, carte du monde

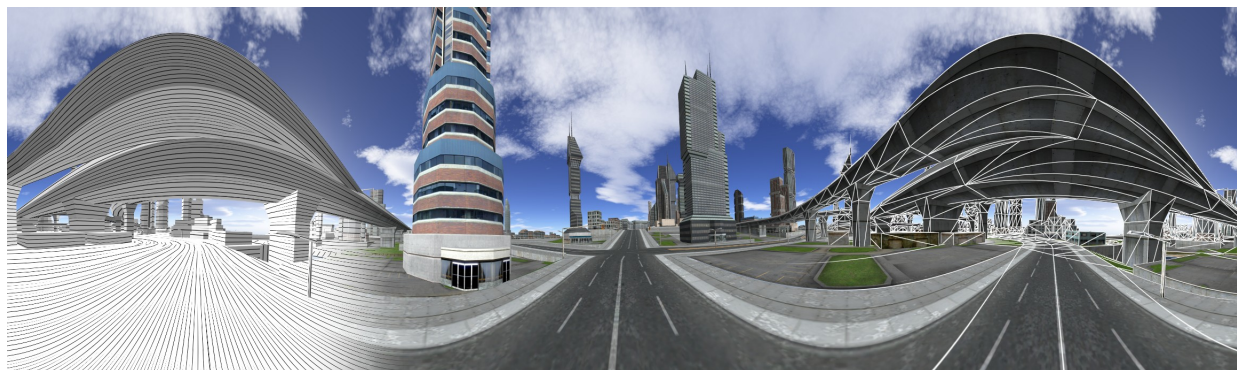
# Projections non-planaires

## Map Projections Galore



Source : <http://www.mapmathematics.com/ProjectionsList.php>

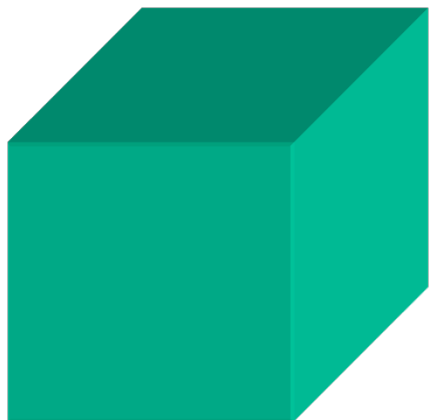
Sphérique



Cylindrique

# Projection planaire

- On divise les projections planaires en
  - projection parallèle
  - projection perspective





# Projection parallèle

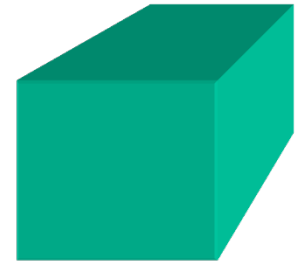
- Centre de projection est à l'infini

- Direction de projection 
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

direction ou point à l'infini

- Projecteurs sont parallèles entre eux
- Lignes parallèles en 3D demeurent parallèles après projection
- Angles entre les lignes peuvent changer

Notez: intuitivement ok,  
mais pas mathématiquement

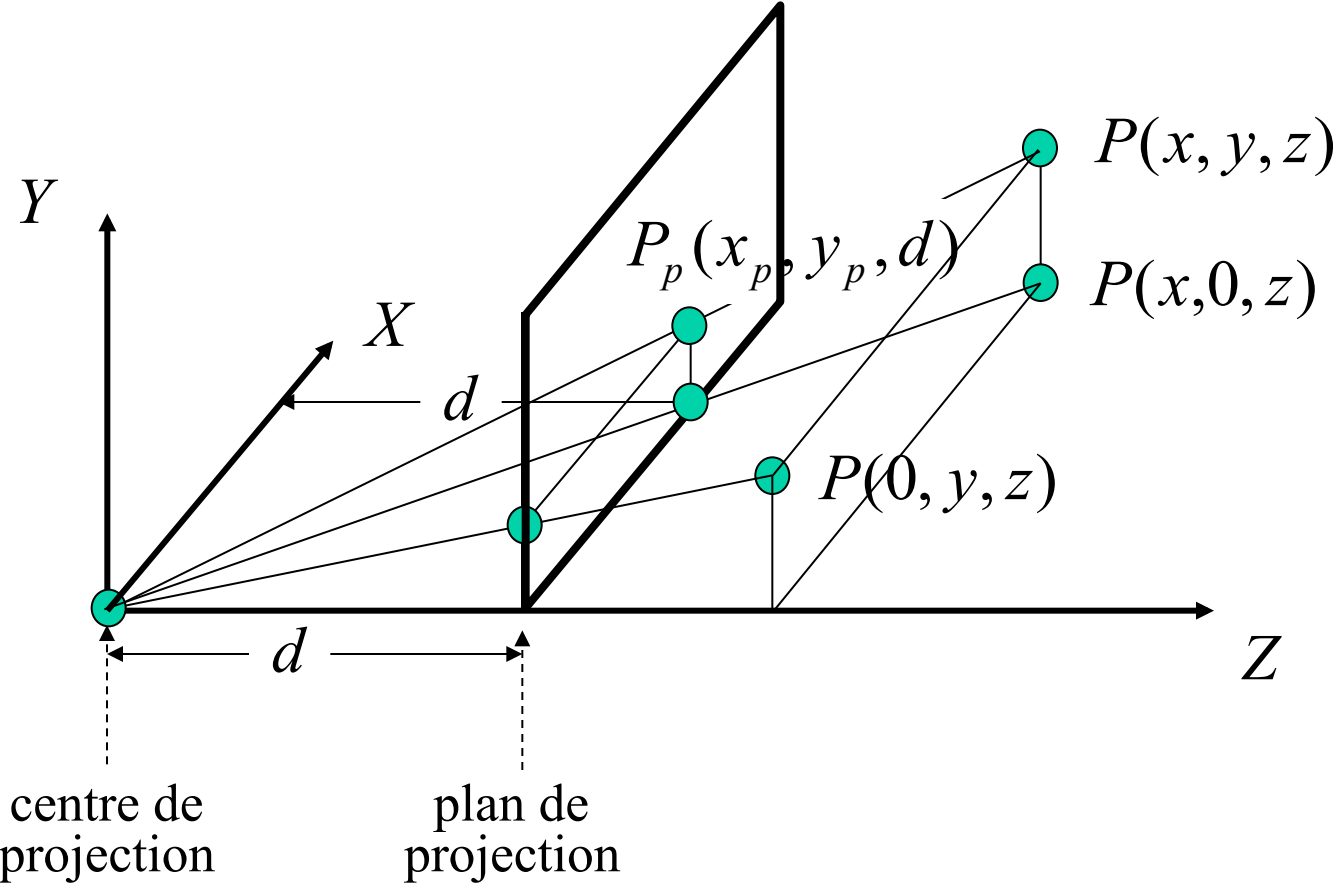


# Projection perspective

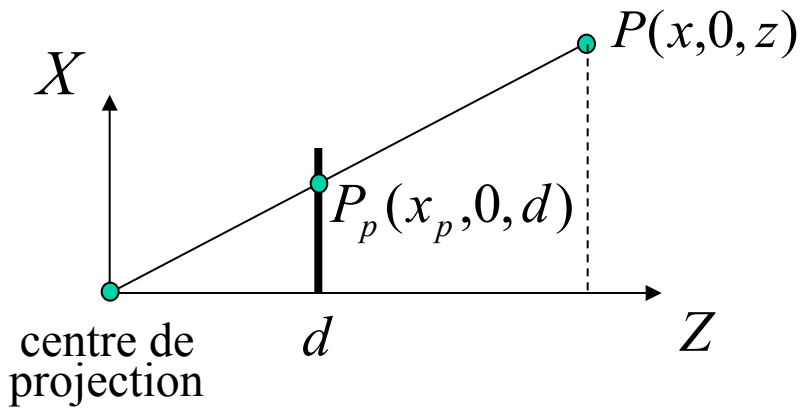
- Centre de projection est à une distance finie
- Taille d'un objet augmente lorsque la distance au centre de projection diminue (*perspective foreshortening*)
- Lignes parallèles en 3D ne sont plus parallèles après projection
- Si le centre de projection est déplacé à l'infini, on obtient une projection parallèle



# Projection perspective simple

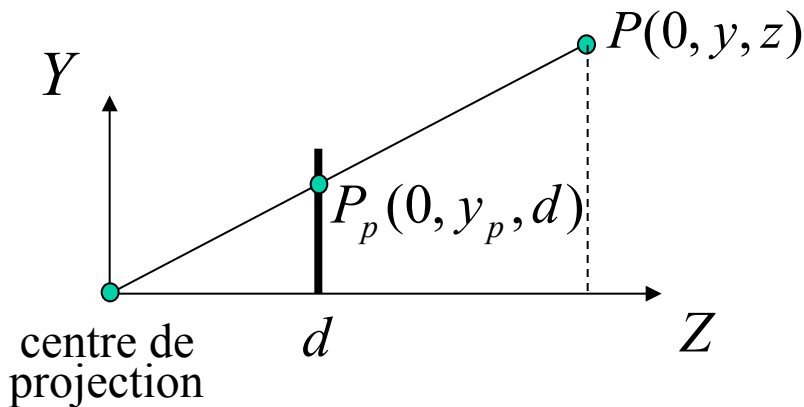


# Décomposition selon $XZ$ et $YZ$



Règle des triangles semblables:

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z} \quad : \quad x_p = \frac{x}{z/d}$$



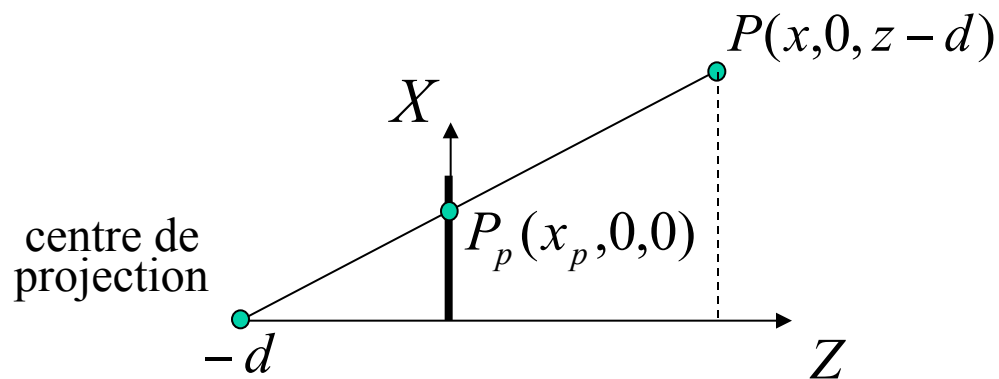
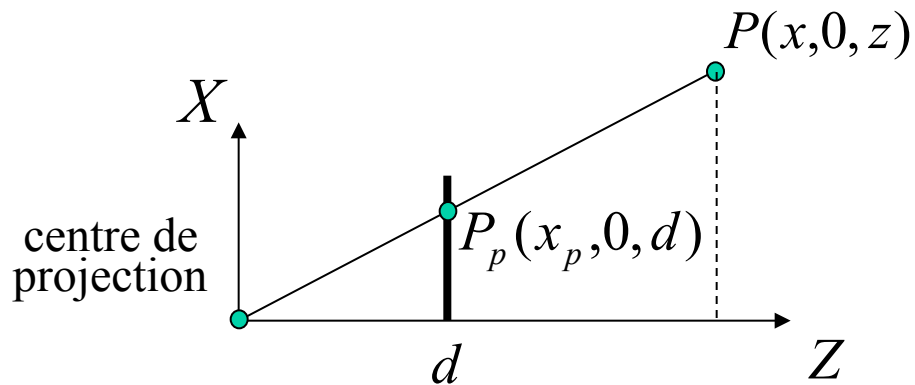
$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{z} \quad : \quad y_p = \frac{y}{z/d}$$

# Matrice de base de projection

Le facteur  $\frac{z}{d}$  sera utilisé pour normaliser dans le cadre des coordonnées homogènes

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{z/d} \\ \frac{y}{z/d} \\ \frac{z}{z/d} \\ \frac{z/d}{z/d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Plan de projection à $z=0$



## Plan de projection à $z=0$

$T(0,0,d)$  suivie de  $M_{proj}$  et enfin de retour à  $T(0,0,-d)$

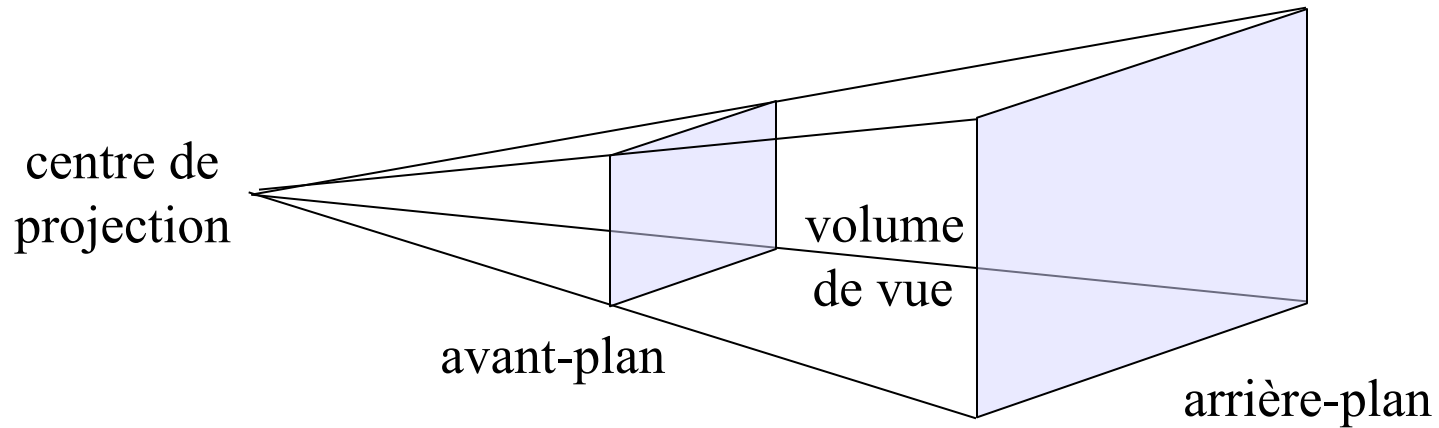
$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ z/d + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lorsque  $d$  est à l'infini, on obtient une *projection parallèle*.

Si la direction de projection est parallèle à la normale du plan, on parle de *projection orthographique*. Sinon on parle de *projection oblique*.

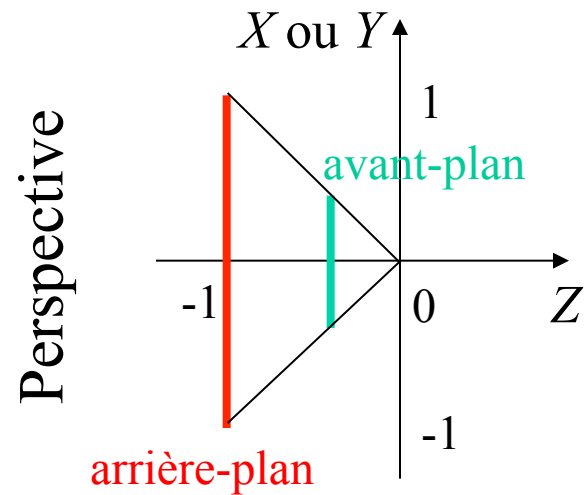
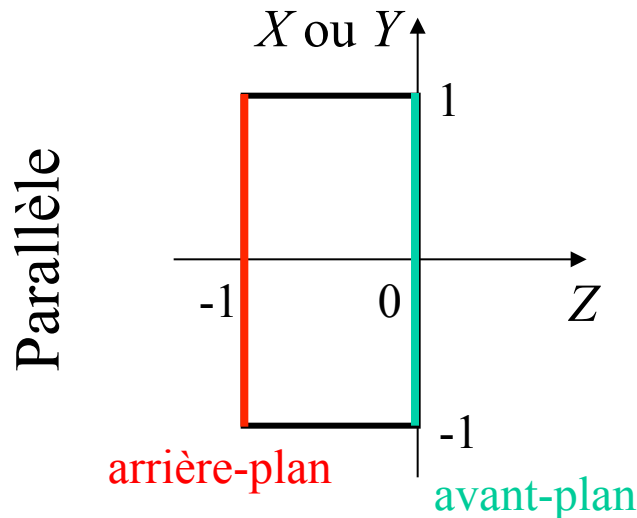
# Pyramide de vue

1. *Clipping* avec les six plans définissant le volume de vue
2. Projection des survivants au *clipping* sur la fenêtre
3. Transformations en coordonnées d'affichage



# Volume de vue canonique

- Le *clipping* avec des plans arbitraires peut être coûteux, alors on transforme la pyramide de vue dans une forme canonique
  - Transforme des points qui pourraient être *clippés*
- + *Clipping* sera simplifié

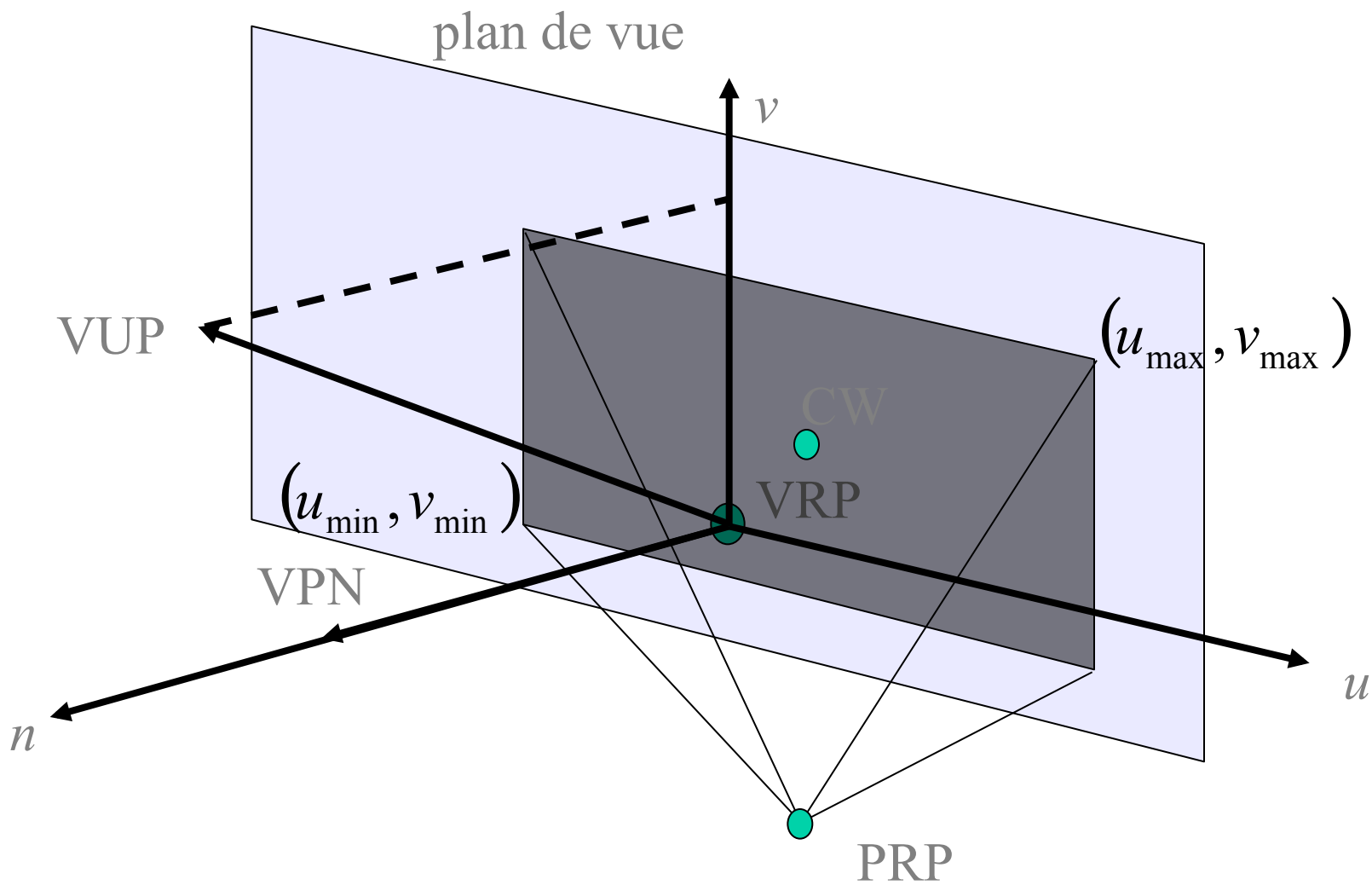


# Nomenclature

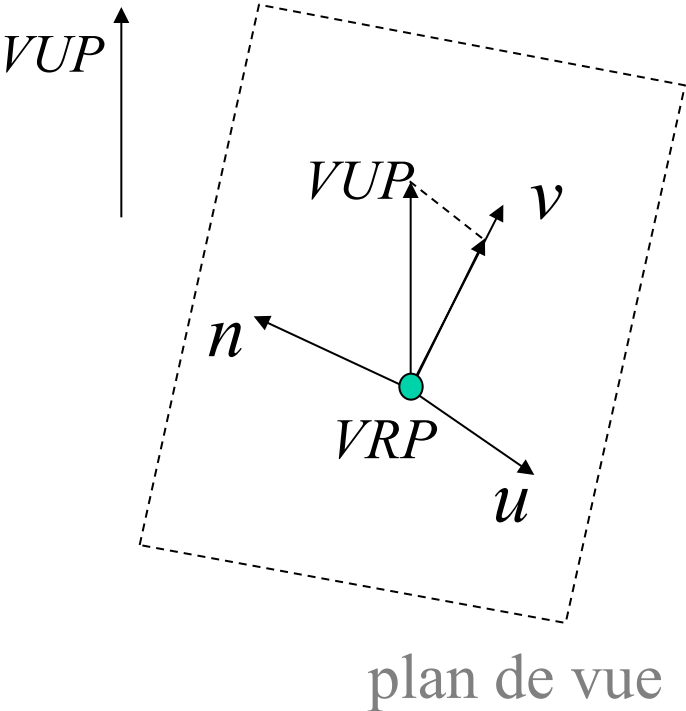
- *VRP: view reference point*
  - point sur le plan de vue
- *VPN: view-plane normal*
  - normale du plan de vue où repose la fenêtre 3D
- *VUP: view up vector*
  - vecteur 3D d'alignement vertical de la fenêtre 3D
- *PRP: projection reference point*
  - point par lequel passent tous les projecteurs
  - ce point peut être à l'infini
  - $DOP = (CW - PRP)$ : *direction of projection*
- *CW: center of the window*
  - centre de la fenêtre rectangulaire



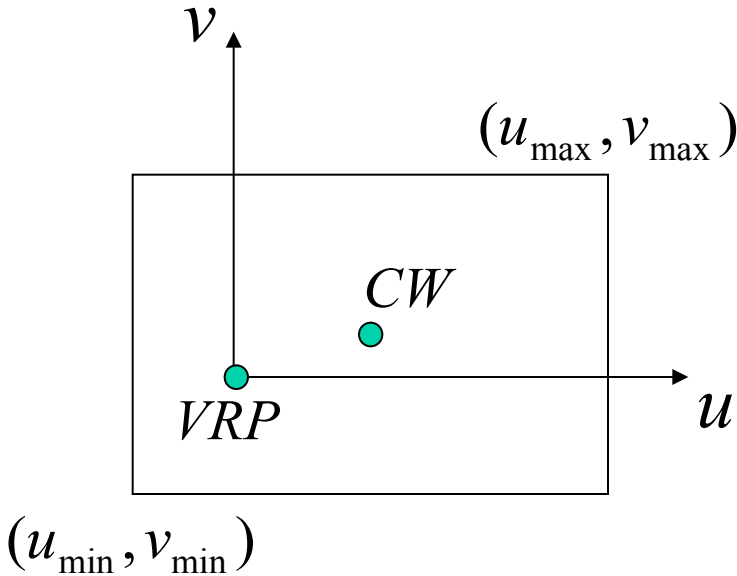
# Nomenclature



# Espaces 3D caméra et 2D image

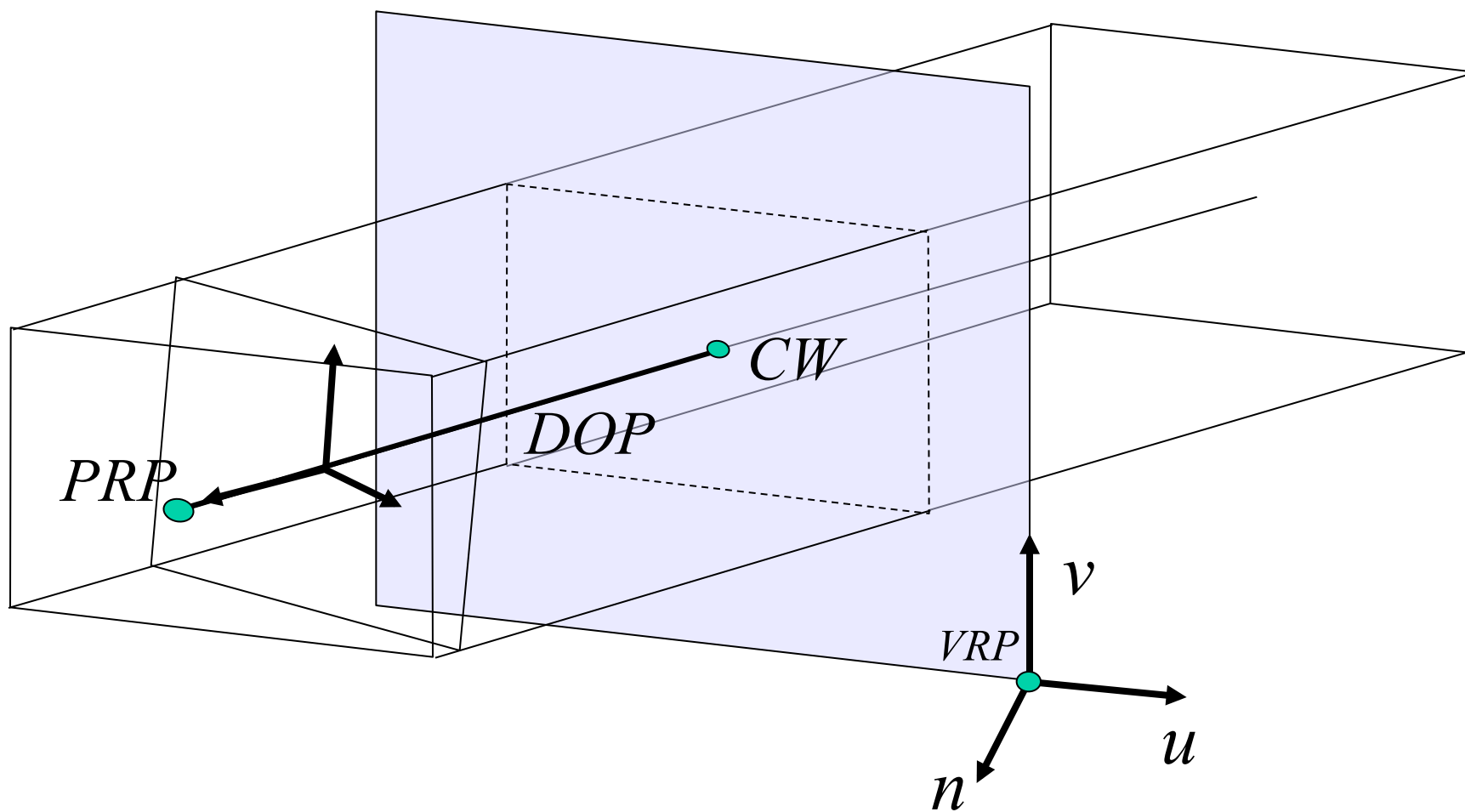


3D

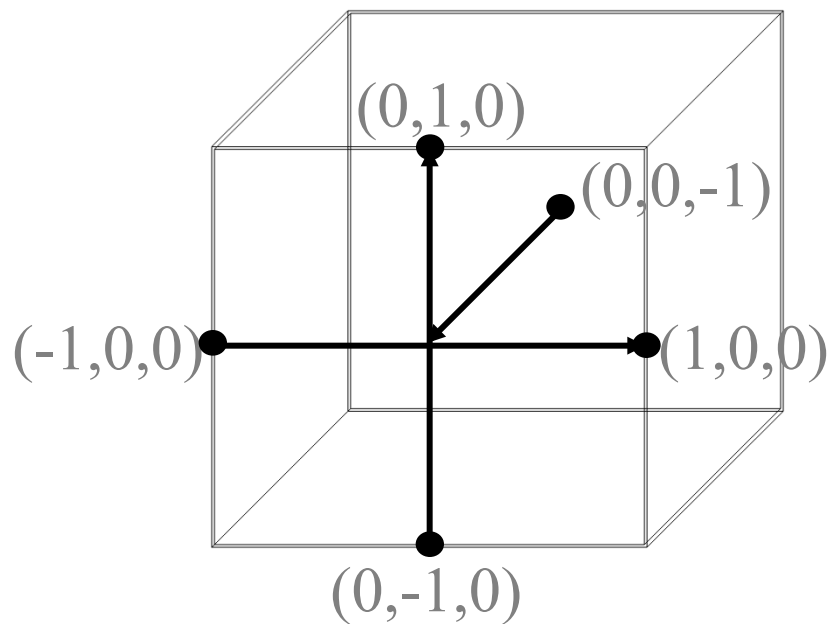


2D

# Projection parallèle: systèmes de coordonnées



# Projection parallèle: configuration finale



# Transformations pour une projection parallèle

1. Translation du point de référence  $VRP$  du plan de vue vers l'origine

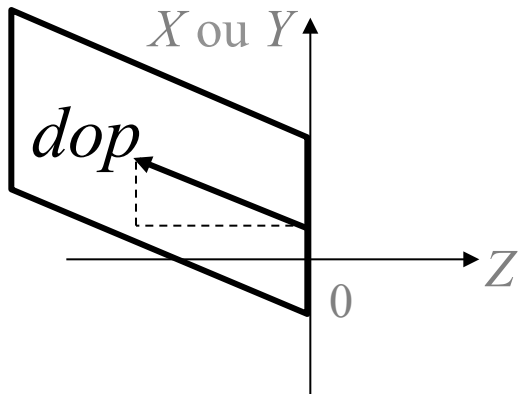
$$T(-VRP)$$

2. Alignement de la fenêtre tel que

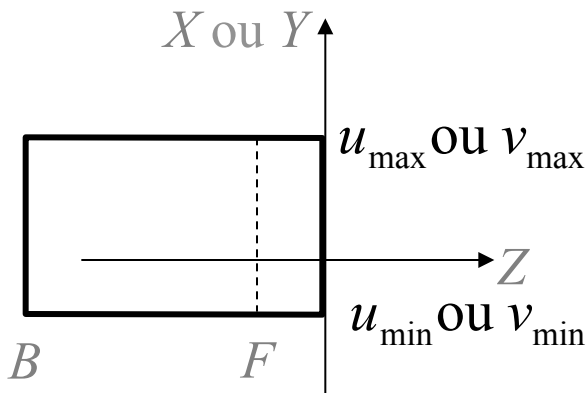
$$A = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{2x} & r_{3x} & 0 \\ r_{1y} & r_{2y} & r_{3y} & 0 \\ r_{1z} & r_{2z} & r_{3z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_z : VPN \rightarrow Z \\ R_x : u \rightarrow X \\ R_y : v \rightarrow Y \end{array} \quad \begin{array}{l} (r_{1z}, r_{2z}, r_{3z}) = \frac{VPN}{\|VPN\|} \\ (r_{1x}, r_{2x}, r_{3x}) = \frac{VUP \times R_z}{\|VUP \times R_z\|} \\ (r_{1y}, r_{2y}, r_{3y}) = R_z \times R_x \end{array}$$

# Transformations pour une projection parallèle

## 3. Cisaillement pour que la direction de projection soit parallèle à l'axe des Z



$$\begin{bmatrix} dopx \\ dopy \\ dopz \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} \\ \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} prpu \\ prpv \\ prpn \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dopz \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & shx & 0 \\ 0 & 1 & shy & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dopx \\ dopy \\ dopz \\ 0 \end{bmatrix}$$

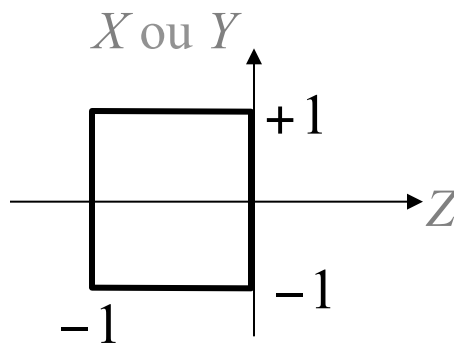
$$shx = -\frac{dopx}{dopz}$$

$$shy = -\frac{dopy}{dopz}$$

# Transformations pour une projection parallèle

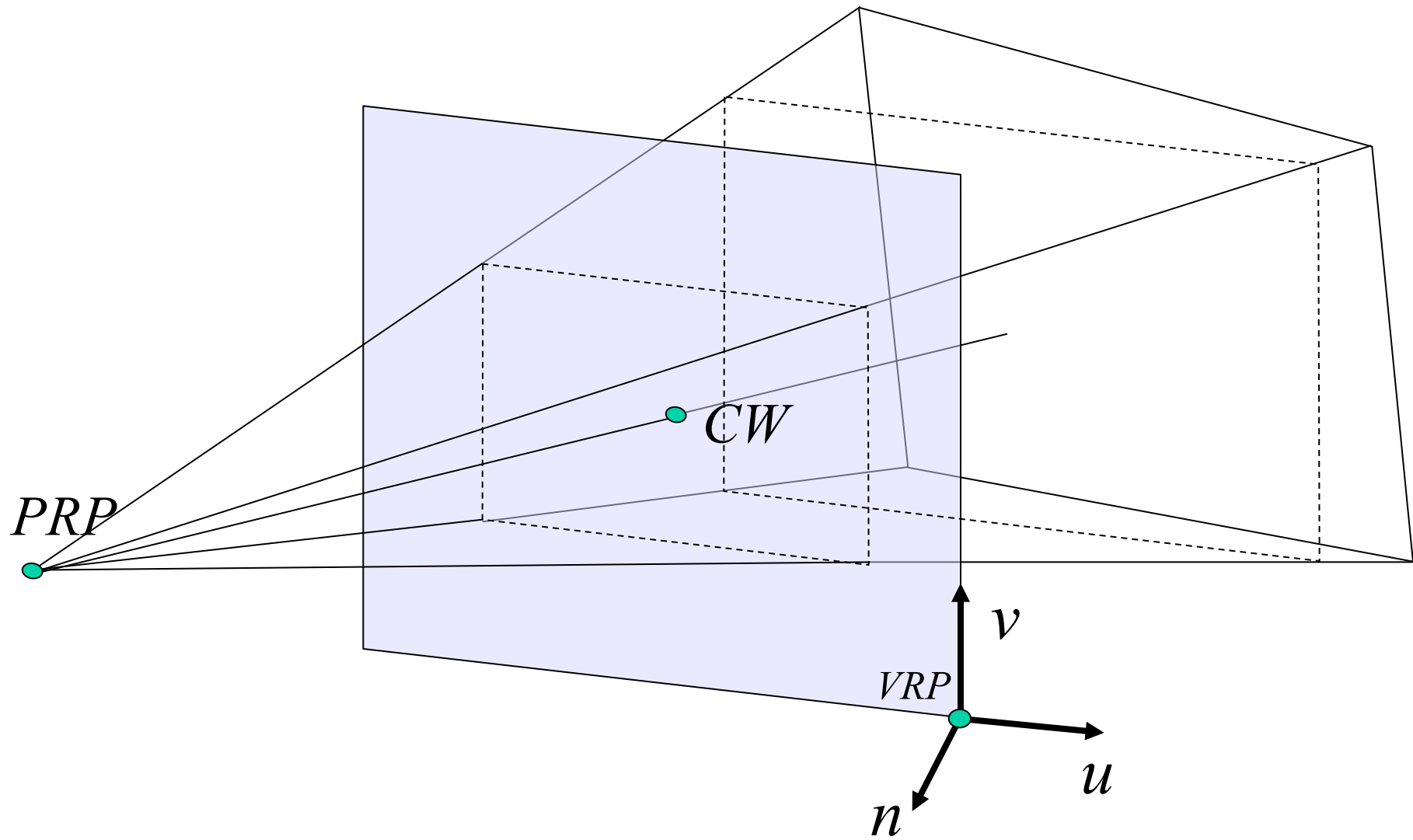
## 4. Translation et changement d'échelle sous forme canonique

$$T\left(\frac{-(u_{\max} + u_{\min})}{2}, \frac{-(v_{\max} + v_{\min})}{2}, -F\right) \text{ et } S\left(\frac{2}{u_{\max} - u_{\min}}, \frac{2}{v_{\max} - v_{\min}}, \frac{1}{F - B}\right)$$



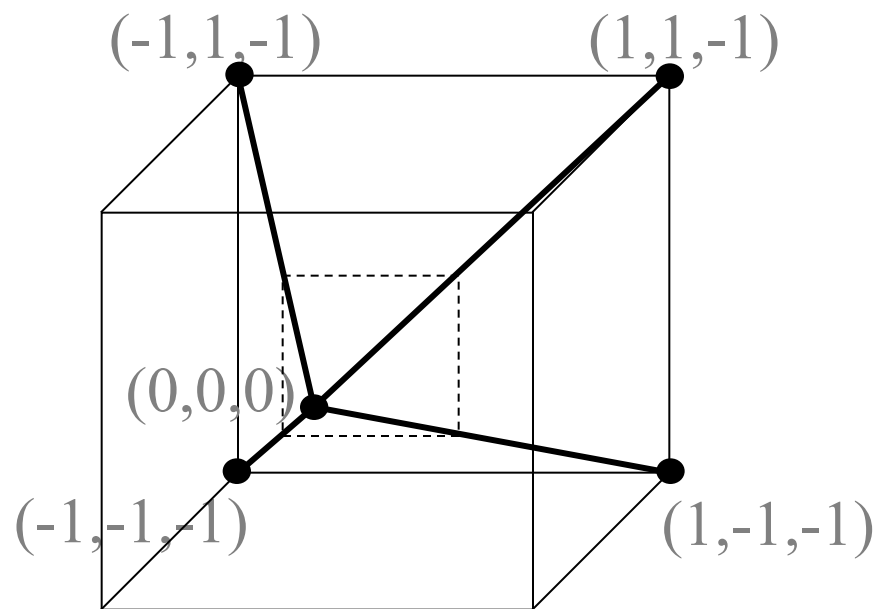
$$N_{\text{par}} = S_{\text{par}} T_{\text{par}} Sh_{\text{par}} AT(-VRP)$$

# Projection perspective: systèmes de coordonnées





# Projection perspective: configuration finale



# Transformations pour une projection perspective

1. Translation du point de référence  $VRP$  du plan de vue vers l'origine

$$T(-VRP)$$

2. Alignement de la fenêtre tel que

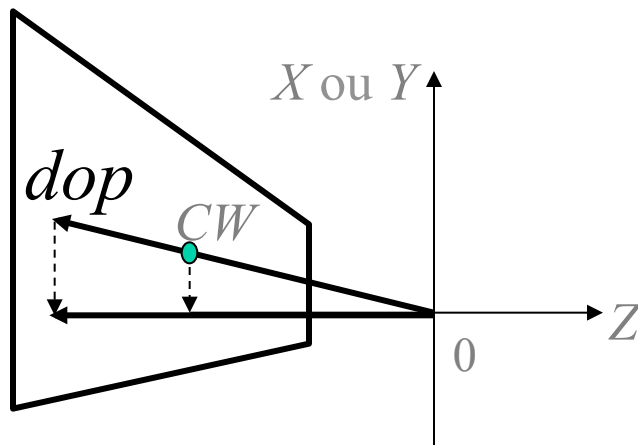
$$A = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{2x} & r_{3x} & 0 \\ r_{1y} & r_{2y} & r_{3y} & 0 \\ r_{1z} & r_{2z} & r_{3z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_z : VPN \rightarrow Z \\ R_x : u \rightarrow X \\ R_y : v \rightarrow Y \end{array} \quad \begin{array}{l} (r_{1z}, r_{2z}, r_{3z}) = \frac{VPN}{\|VPN\|} \\ (r_{1x}, r_{2x}, r_{3x}) = \frac{VUP \times R_z}{\|VUP \times R_z\|} \\ (r_{1y}, r_{2y}, r_{3y}) = R_z \times R_x \end{array}$$

# Transformations pour une projection perspective

3. Translation du centre de projection vers l'origine

$$T(-PRP)$$

4. Cisaillement pour que la ligne centrale ( $PRP-CW$ ) s'aligne sur l'axe  $Z$



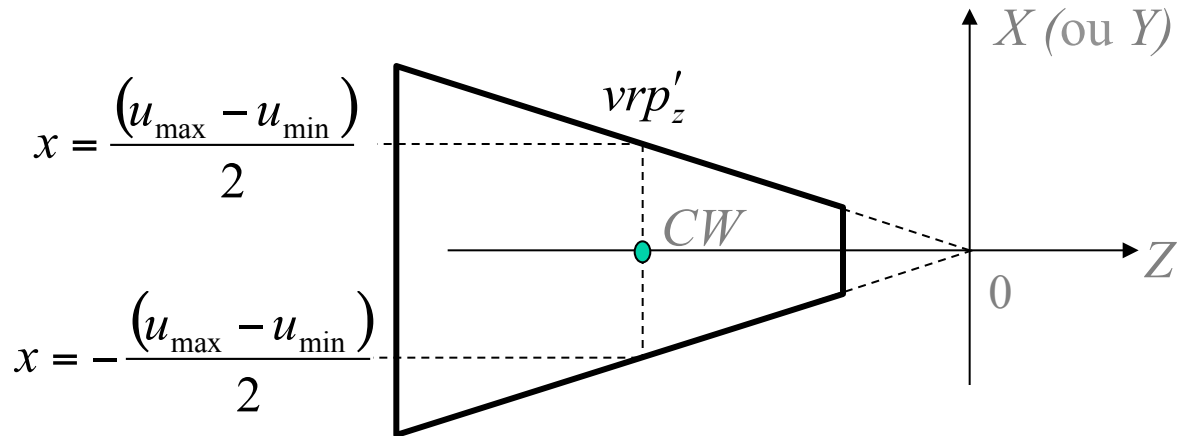
$$shx = -\frac{dopx}{dopz}$$

$$shy = -\frac{dopy}{dopz}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dopz \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & shx & 0 \\ 0 & 1 & shy & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dopx \\ dopy \\ dopz \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Transformations pour une projection perspective

## 5. Changement d'échelle sous forme canonique

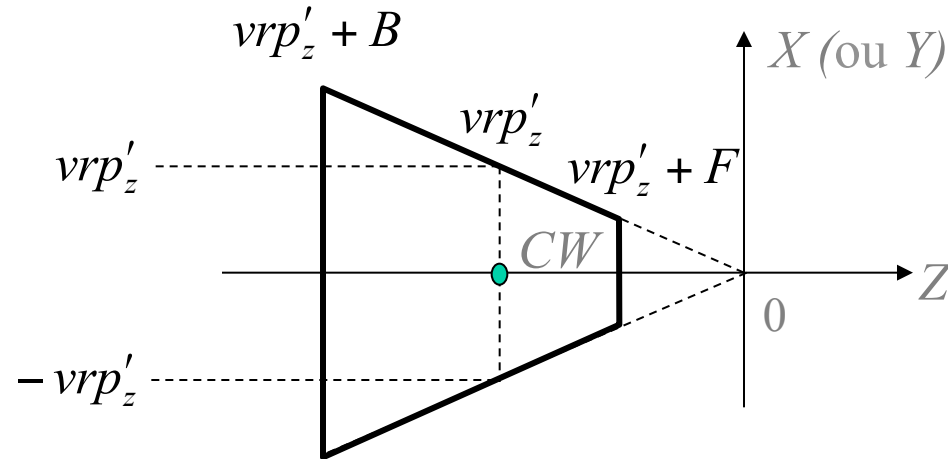


$$\text{pente} = \pm 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(u_{\max} - u_{\min})}{2} = vrp'_z$$

$$S \left( \frac{-2vrp'_z}{u_{\max} - u_{\min}}, \frac{-2vrp'_z}{v_{\max} - v_{\min}}, 1 \right)$$

# Transformations pour une projection perspective

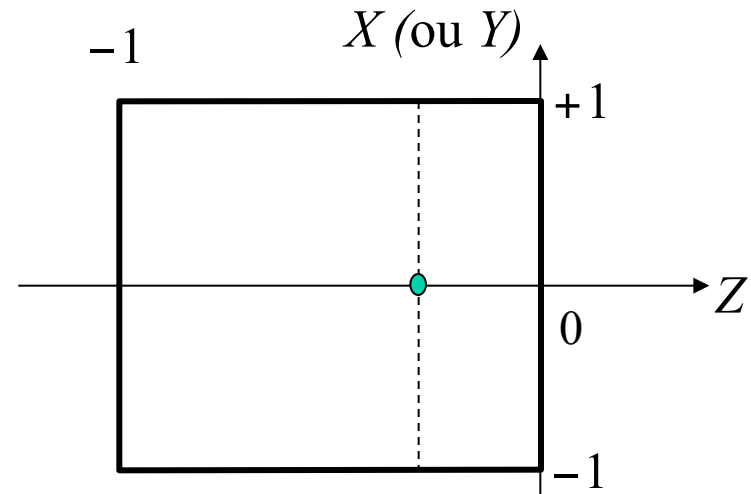
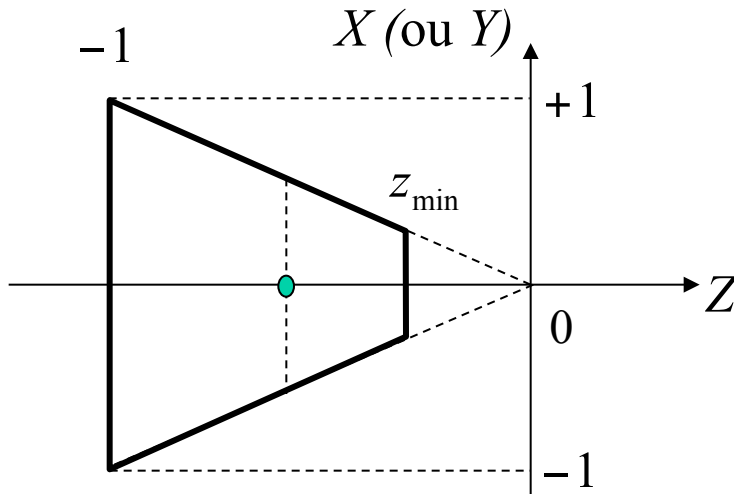
## 5. Changement d'échelle sous forme canonique



$$vrp'_z + B \rightarrow -1 \quad S \left( \frac{-1}{vrp'_z + B}, \frac{-1}{vrp'_z + B}, \frac{-1}{vrp'_z + B} \right)$$

$$N_{\text{per}} = S_{\text{per}} Sh_{\text{per}} T(-PRP) A T(-VRP)$$

# Transformation sous une forme canonique



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+z_{\min}} & \frac{-z_{\min}}{1+z_{\min}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

pour  $z_{\min} \neq -1$

# *Clipping* contre la forme canonique

- Cohen-Sutherland en 3D (6 bits)

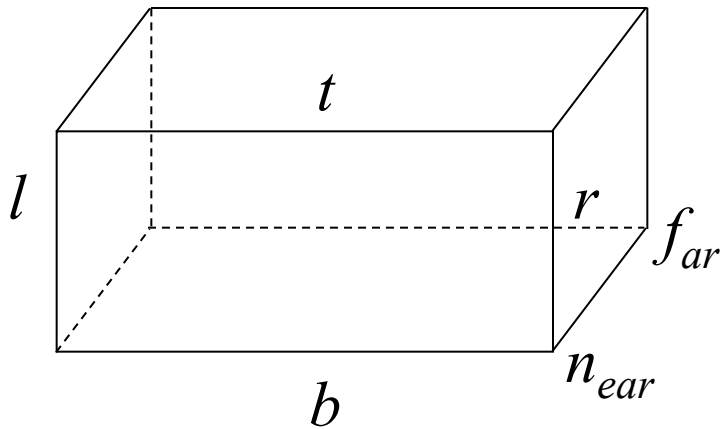
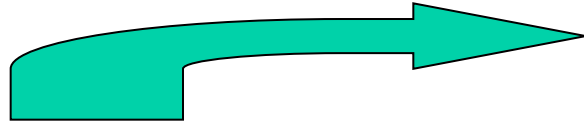
$$x < -1 \ ; \ x > 1$$

$$y < -1 \ ; \ y > 1$$

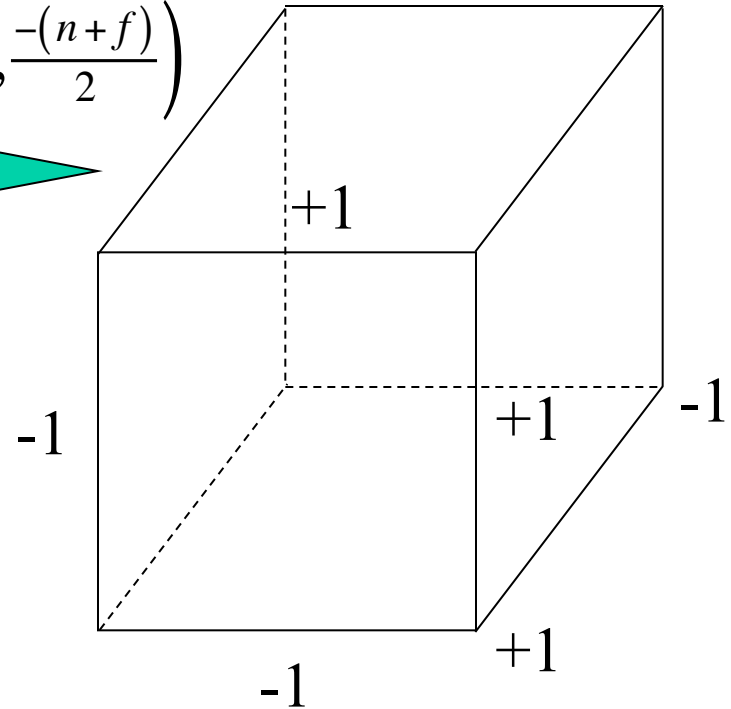
$$z < -1 \ ; \ z > 0$$

# Projection orthographique selon Shirley *et al.*

$$S\left(\frac{2}{(r-l)}, \frac{2}{(t-b)}, \frac{2}{(n-f)}\right) T\left(\frac{-(l+r)}{2}, \frac{-(b+t)}{2}, \frac{-(n+f)}{2}\right)$$



Volume de vue orthographique



Volume de vue canonique

Notes: oeil regarde vers  $-Z$  ; le haut est  $+Y$  ;  $n > f$



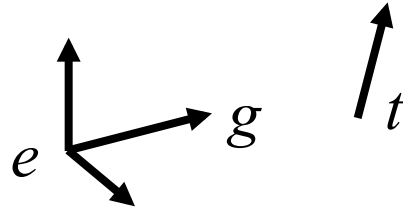
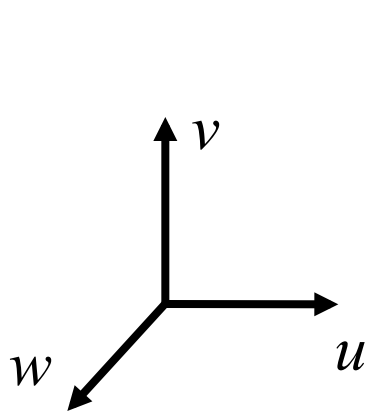
# Projection orthographique

$$M_{ortho} = \begin{bmatrix} \frac{n_x}{2} & 0 & 0 & \frac{n_x-1}{2} \\ 0 & \frac{n_y}{2} & 0 & \frac{n_y-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{(r-l)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{(t-b)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{(n-f)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{(l+r)}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{(b+t)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{(n+f)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Image de  $n_x \times n_y$  pixels

Origine au coin inférieur gauche

# Projection orthographique avec vue arbitraire



$e$  : position de vue  
 $g$  : direction de vue  
 $t$  : direction du haut

$$w = \frac{-g}{\|g\|}$$

$$u = \frac{t \times w}{\|t \times w\|}$$

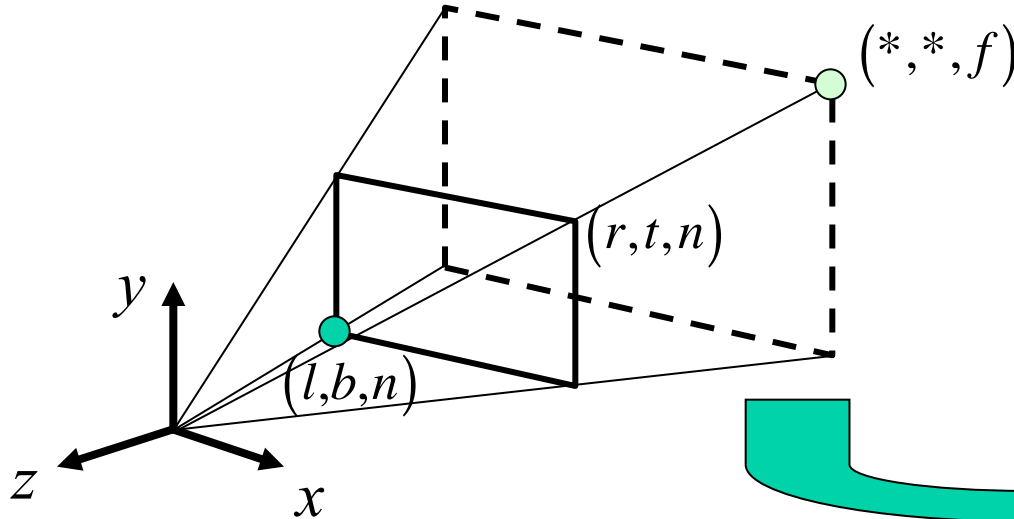
$$v = \underline{w \times u}$$

$$M_v = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & 0 \\ x_v & y_v & z_v & 0 \\ x_w & y_w & z_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_e \\ 0 & 1 & 0 & -y_e \\ 0 & 0 & 1 & -z_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{proj} = M_{ortho} M_v$$

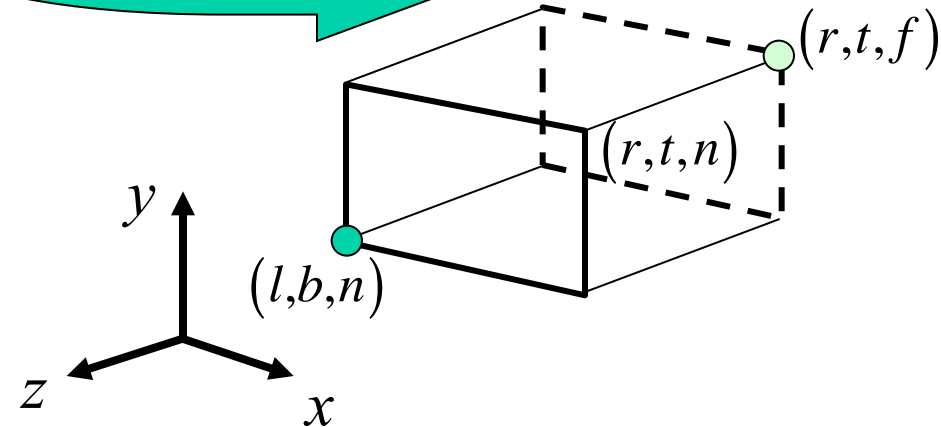
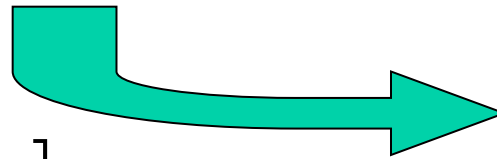
# Projection perspective

une matrice parmi plusieurs...



$$M_{persp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{n} & -f \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{persp} p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \frac{n+f}{n} - f \\ \frac{z}{n} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{nx}{z} \\ \frac{ny}{z} \\ n + f - \frac{fn}{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$



Propriété intéressante:

$$z = n \rightarrow M_{persp} \rightarrow z = n$$

$$z = f \rightarrow M_{persp} \rightarrow z = f$$

distortion non-linéaire des coordonnées  $z$   
mais conserve l'ordre en  $z$  pour  $n \leq z \leq f$

# Manipulations de la matrice perspective

$$M(hp) = (hM)p = Mp \Rightarrow nM_{persp} = M_{persp} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*picking* :  $(x_s, y_s, z_s) \rightarrow (x, y, z)$

$$M_{persp}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{fn} & \frac{n+f}{fn} \end{bmatrix} \quad (nf)M_{persp}^{-1} = M_{persp}^{-1} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & fn \\ 0 & 0 & -1 & n+f \end{bmatrix}$$

# Variations sur la matrice de projection

$$M = \left( M_{ortho} M_{persp} \right) M_v$$



matrice de projection

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{l+r}{l-r} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{b+t}{b-t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{n-f} & \frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{OpenGL} = \begin{bmatrix} \frac{2|n|}{r-l} & 0 & \frac{l+r}{l-r} & 0 \\ 0 & \frac{2|n|}{t-b} & \frac{b+t}{b-t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|f|+|n|}{|n|-|f|} & \frac{2|f||n|}{|n|-|f|} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Simplifications dues au *field-of-view*

Si on regarde au centre de la fenêtre  $l = -r$

$$b = -t$$

Si le ratio des pixels (carrés) sont égaux  $\frac{n_x}{n_y} = \frac{r}{t}$

Spécifier  $n_x, n_y$  alors laisse un seul degré de liberté, le *field-of-view*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{t}{|n|}$$

