

<http://tiny.cc/ift3355>

**IFT 3355: INFOGRAPHIE
DE 3D À 2D:
UN LONG VOYAGE**

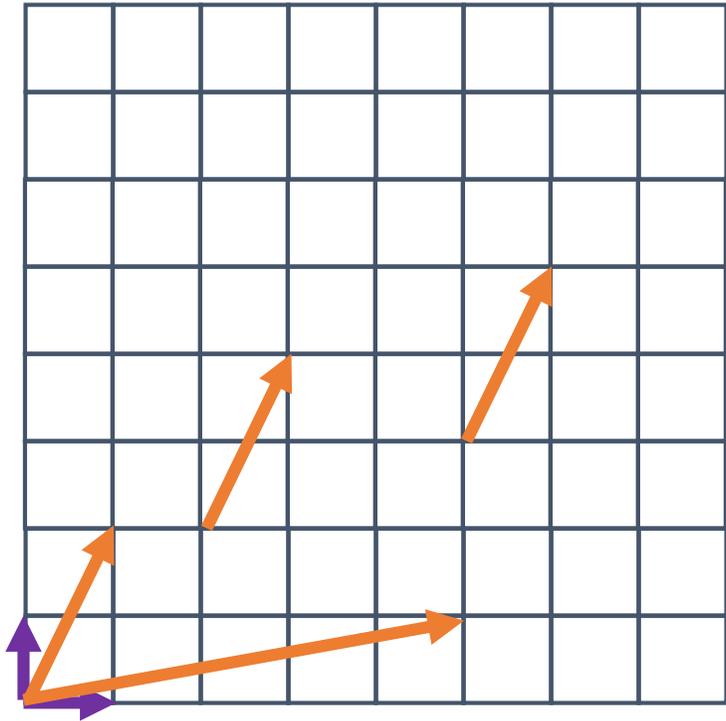
Livre de référence: G:I.2, S:6



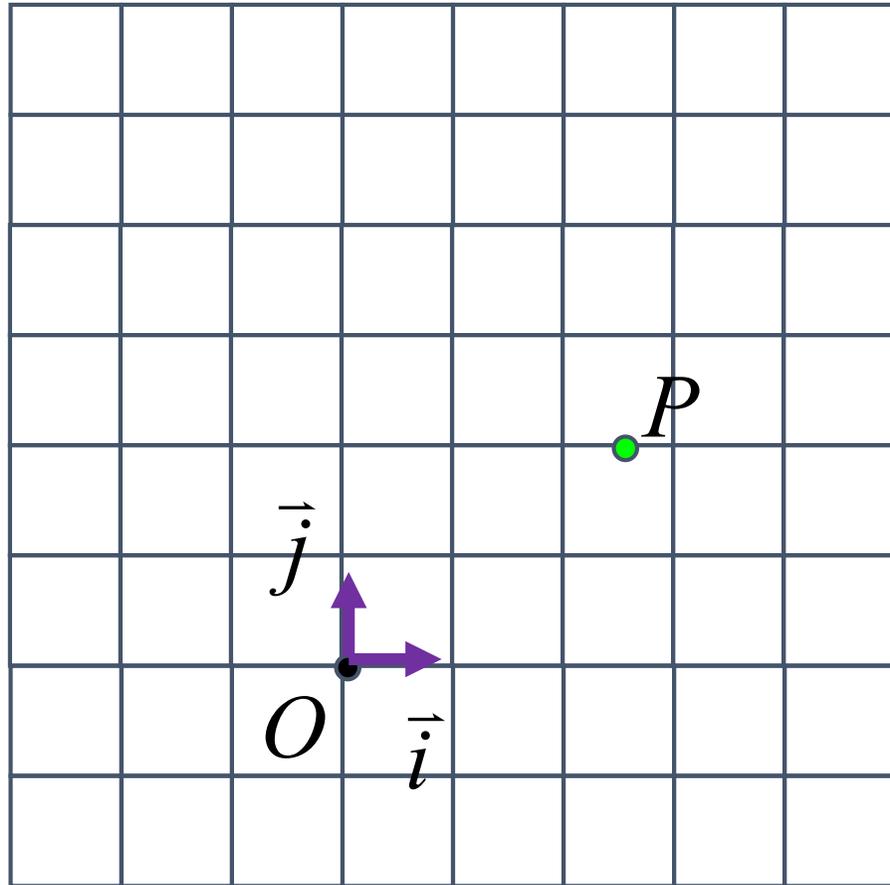
Mikhail Bessmeltsev

LES SYSTÈMES DES COORDONNÉES

Un système des coordonnées = origine + vecteurs de base



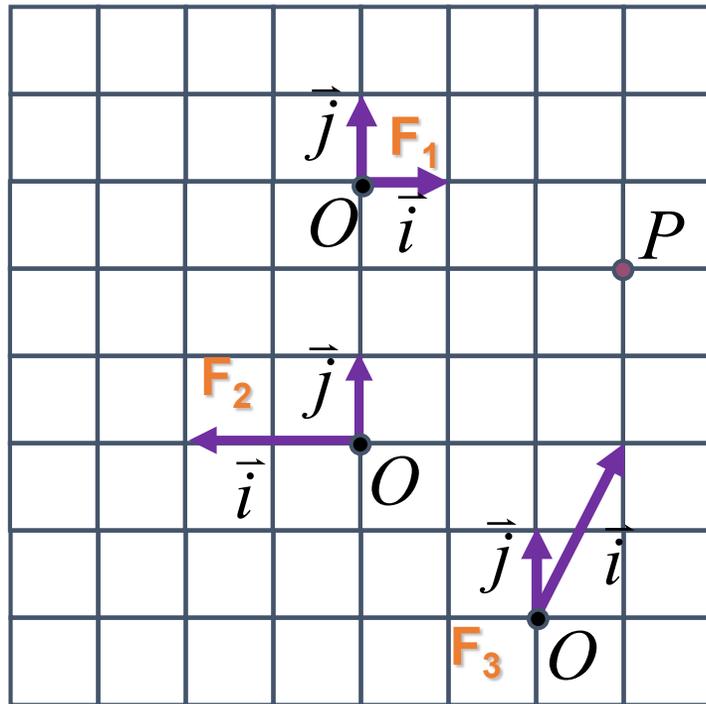
LES SYSTÈMES DES COORDONNÉES



$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j}$$

équivalent: $P = (x, y)$

LES SYSTÈMES DES COORDONNÉES



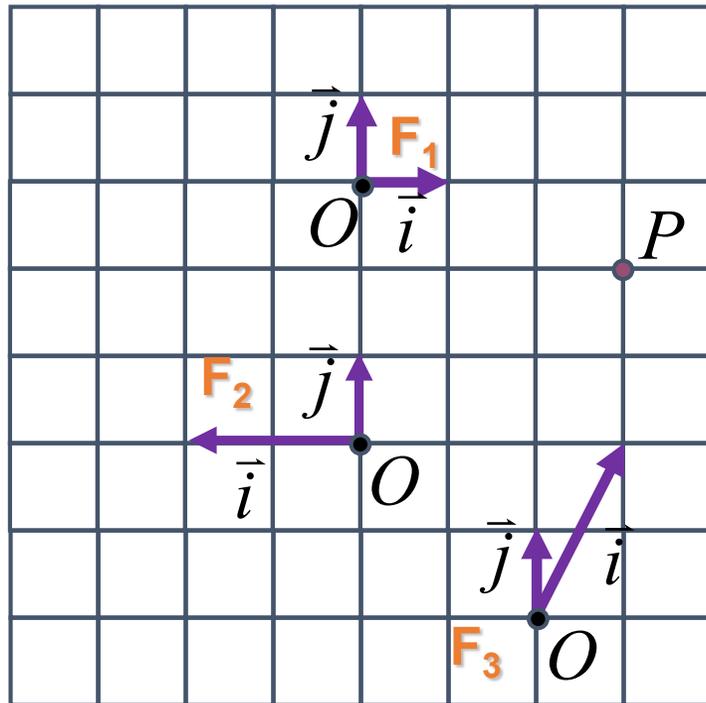
$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j}$$

F_1

F_2

F_3

LES SYSTÈMES DES COORDONNÉES



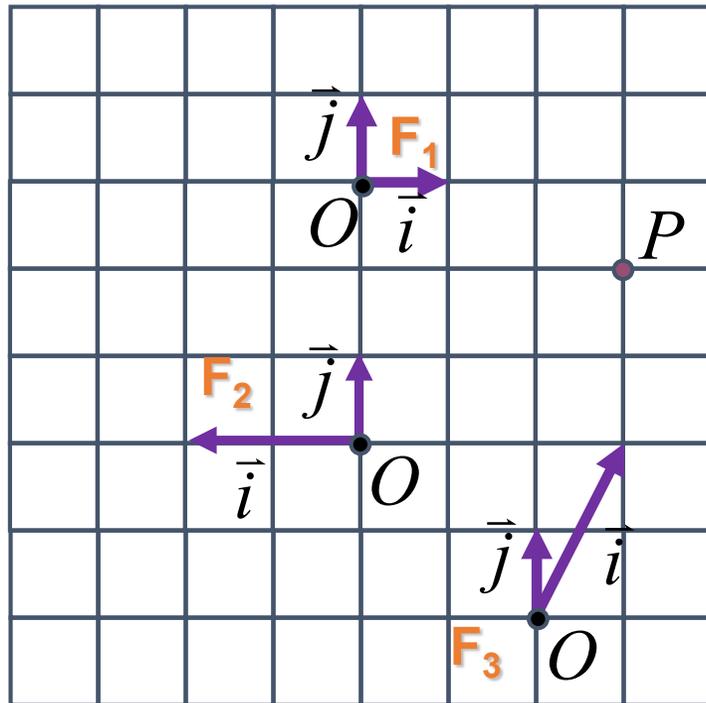
$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$F_1 \quad P(3,-1)$$

$$F_2$$

$$F_3$$

LES SYSTÈMES DES COORDONNÉES



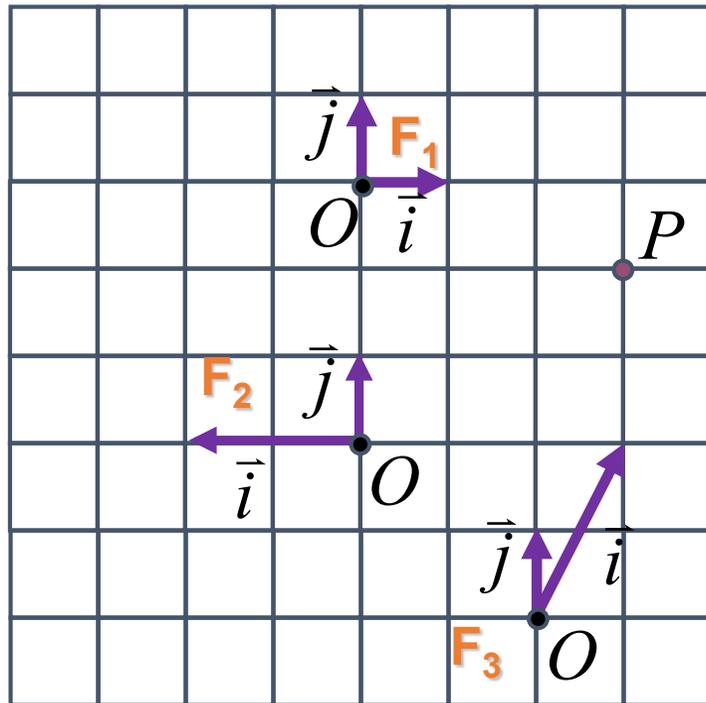
$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$F_1 \quad P(3,-1)$$

$$F_2 \quad P(-1.5,2)$$

$$F_3$$

LES SYSTÈMES DES COORDONNÉES



$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$F_1 \quad P(3,-1)$$

$$F_2 \quad P(-1.5,2)$$

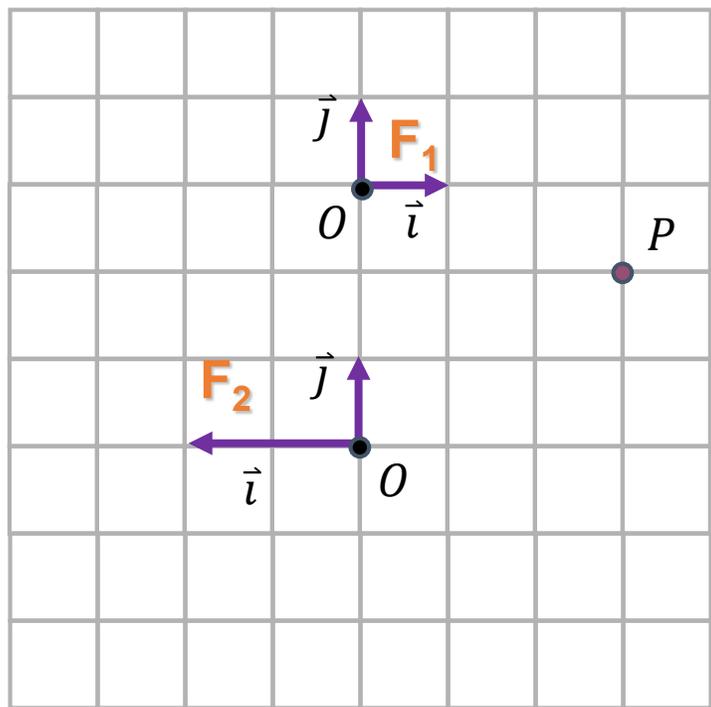
$$F_3 \quad P(1,2)$$

BONUS 1

Quelles courbes 2D ne peuvent pas être représentées avec des fonctions implicites? Prouvez.

LES TRANSFORMATIONS

Les transformations comme changements de systèmes de coordonnées



vérifiez: $P_1(3,-1)$ devient $P_2(-1.5,2)$

$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_1$$

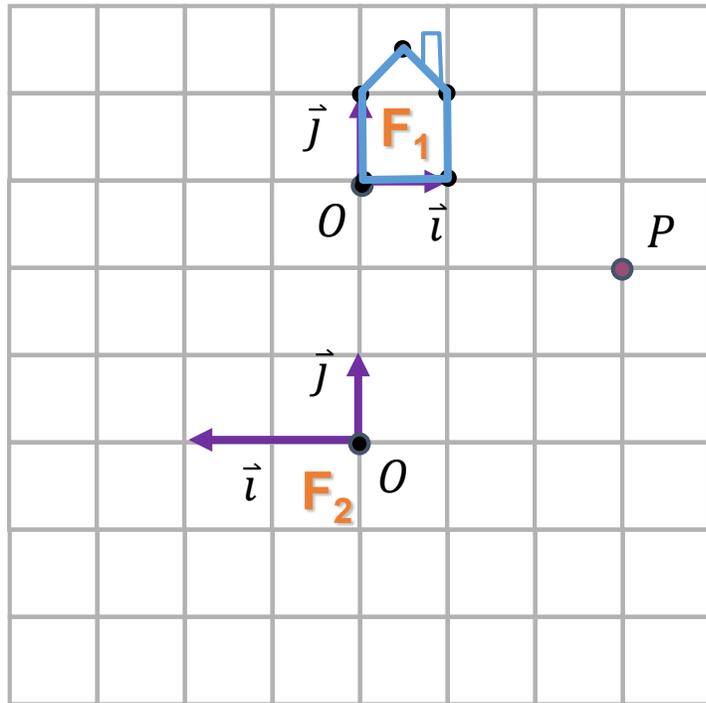
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}_2 + x_1 \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}_2 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_1$$

$$P_2 = MP_1$$

LES TRANSFORMATIONS

Changement de base exprimé sous forme de matrice



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_1$$

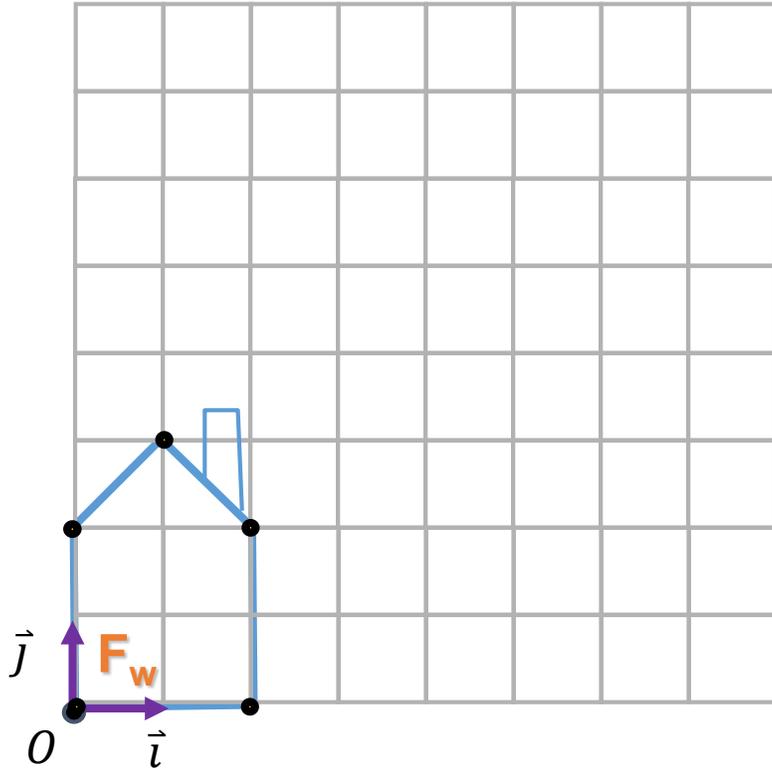
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_1$$

UTILISER LES TRANSFORMATIONS

Définissez une matrice M

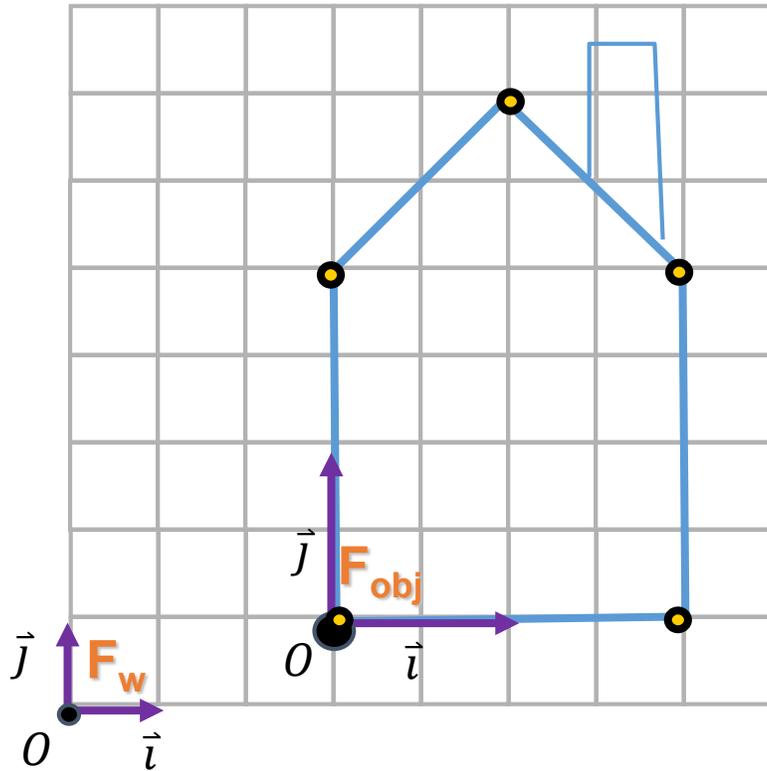
Pour chaque sommet v

$$v' = Mv$$



UTILISER LES TRANSFORMATIONS

$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j}$$



$$\begin{bmatrix} x_{obj} \\ y_{obj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{obj} + x_{obj} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{obj} + y_{obj} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{obj}$$

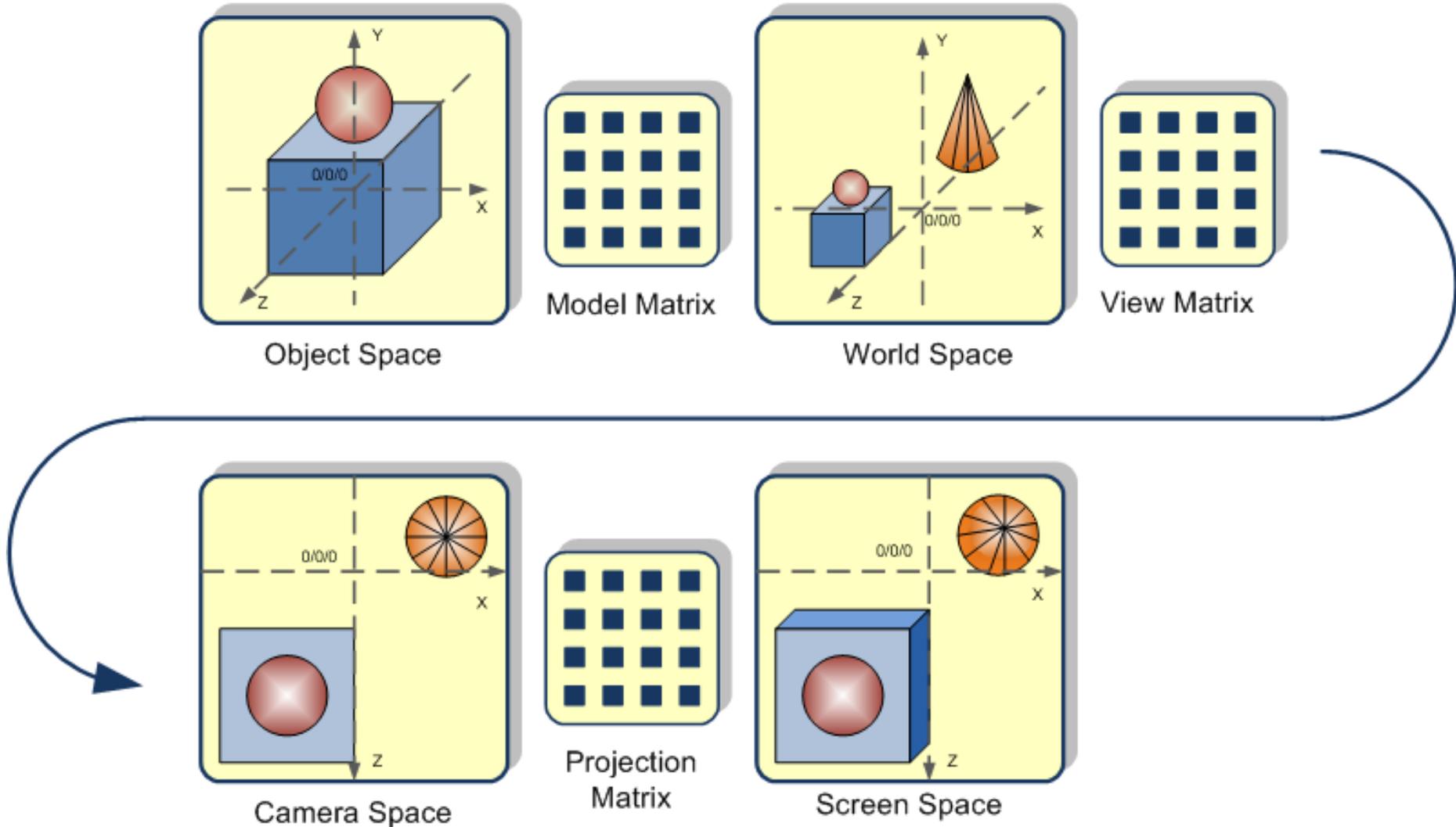
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_w = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_w + x_{obj} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_w + y_{obj} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}_w$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_{obj}$$

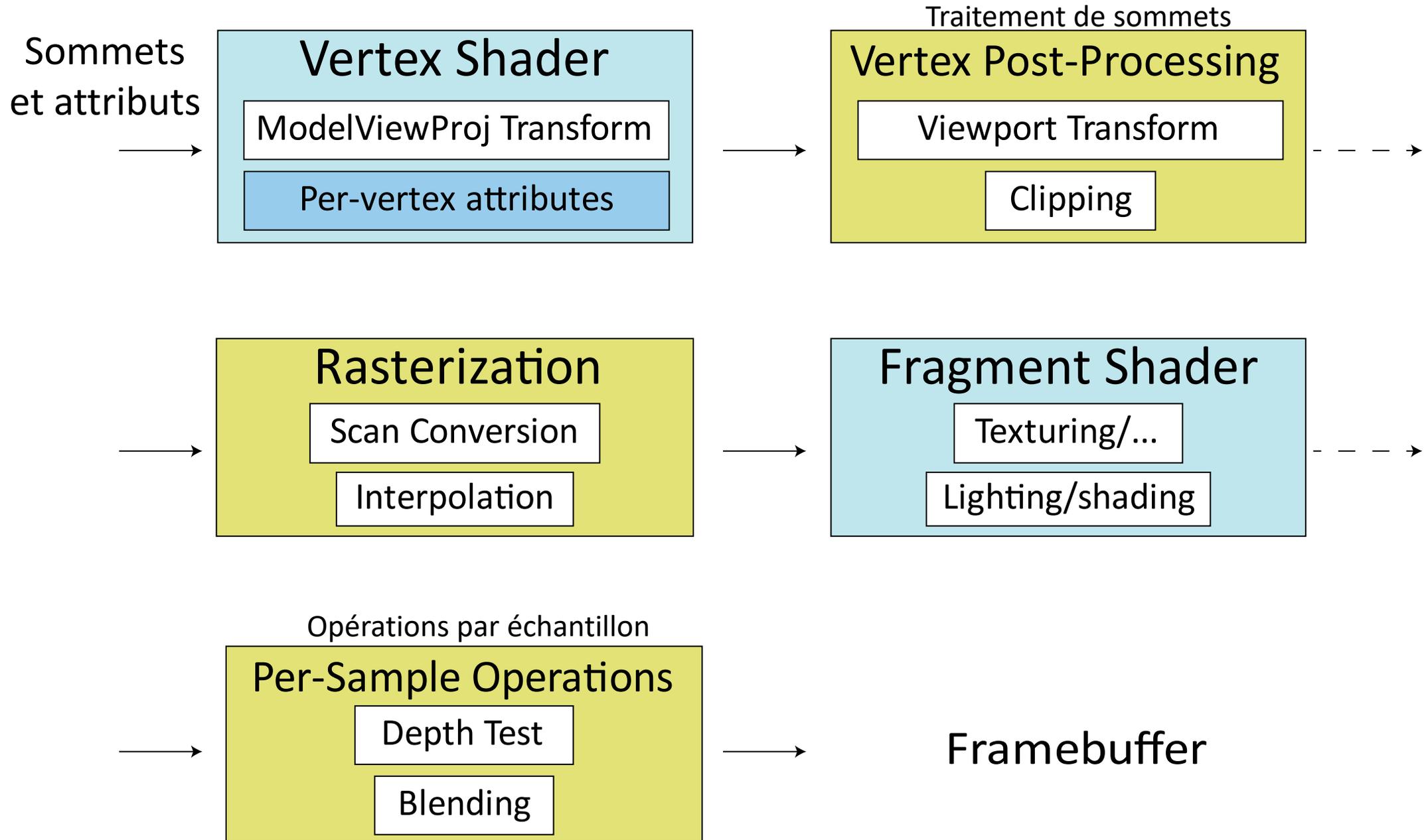
UTILISER LES TRANSFORMATIONS

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_1 & \xrightarrow{\text{2D}} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_{obj} \\ & \searrow \text{3D} & \\ & & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}_w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}_{obj} \end{array}$$

LES SYSTÈMES DES COORDONNÉES



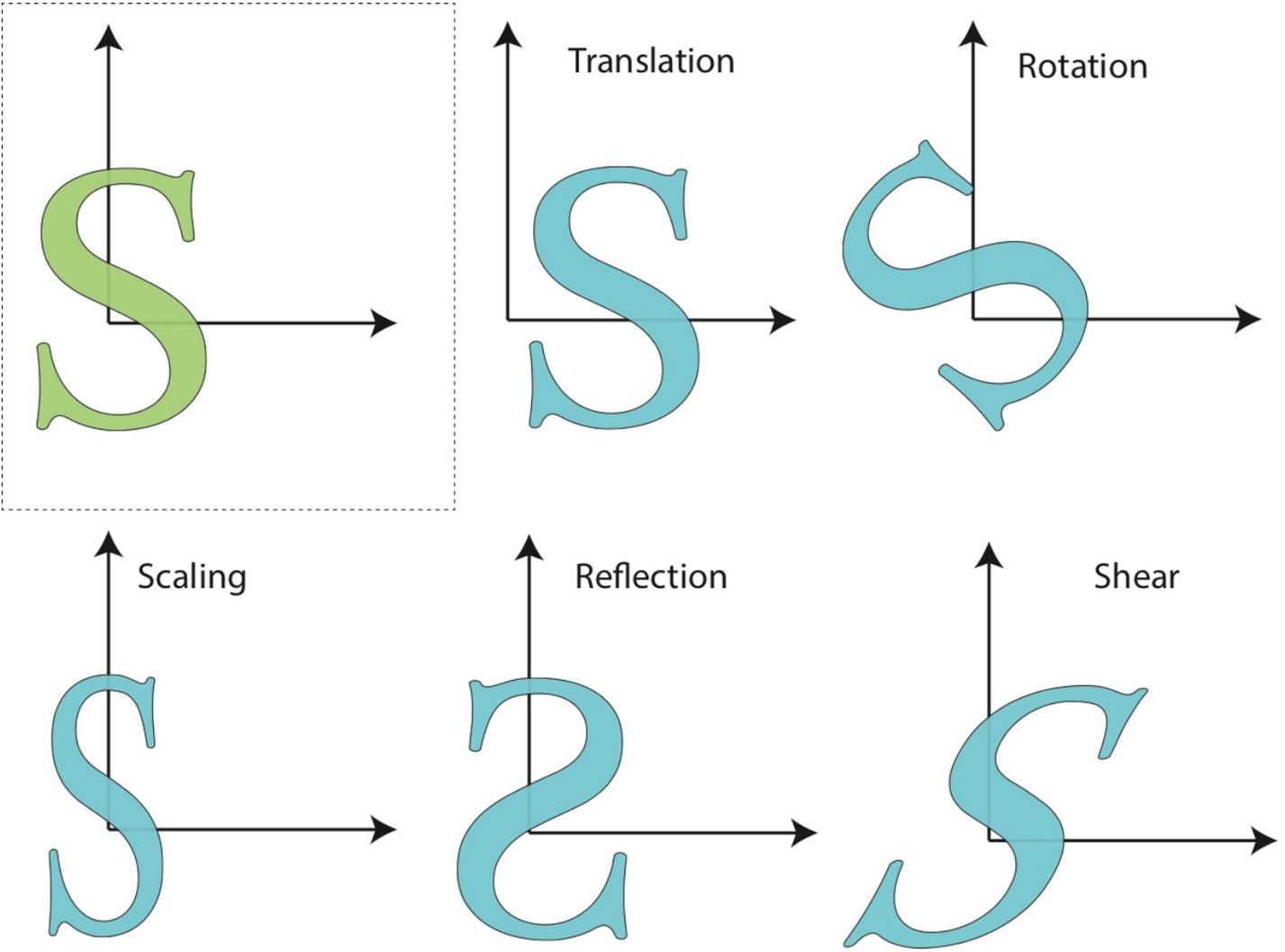
PIPELINE: PLUS DE DÉTAILS



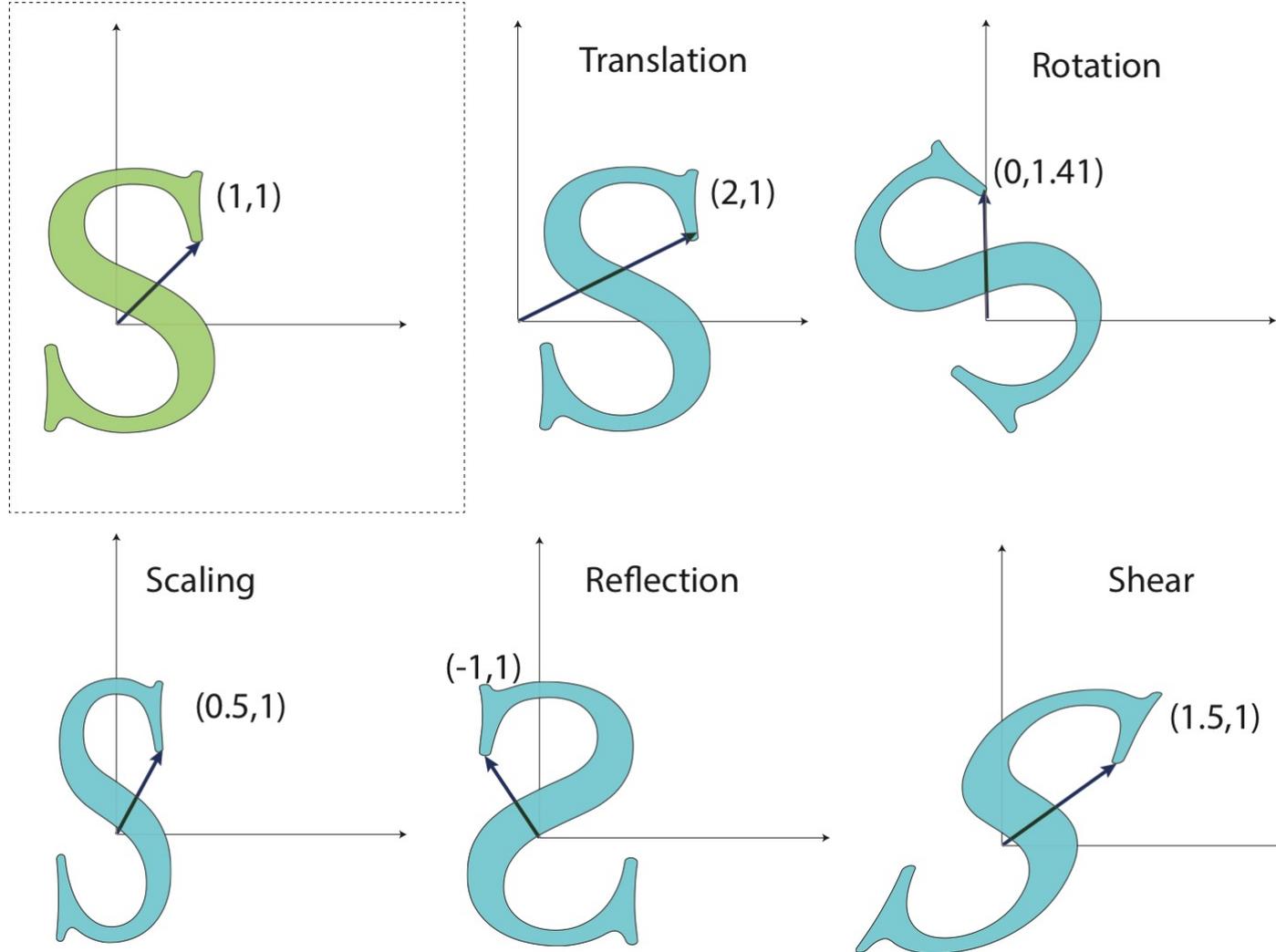
COMMENT TRANSFORMER LES COORDONNÉES

- Entre les systèmes de coordonnées
- Ou par animation

LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES



LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES: VECTEUR POSITION



LES MATRICES

- Une représentation plus compacte
- Pour transformer un vecteur, multipliez-le par la matrice

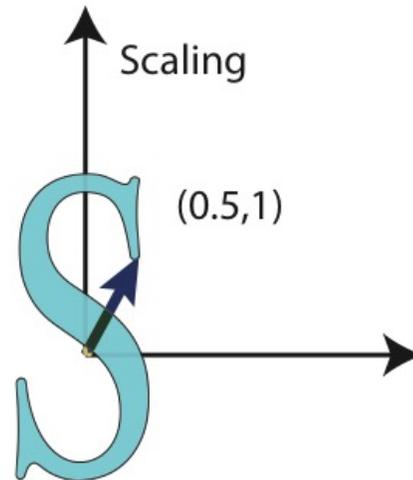
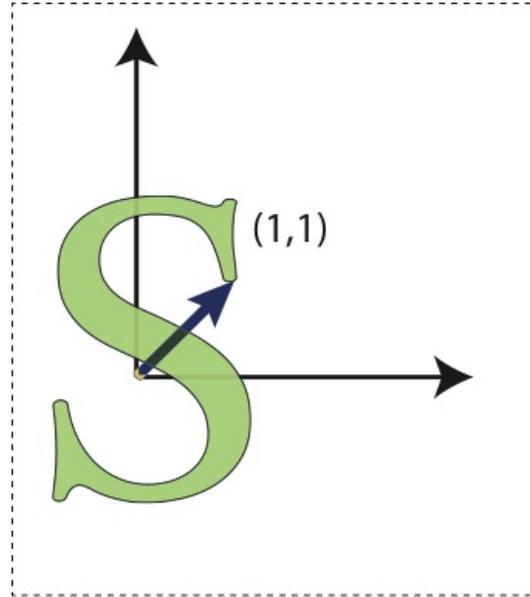
$$v' = M \cdot v$$

- On représente tous les vecteurs par une colonne

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

LES MATRICES DE TRANSFORMATIONS

- Changement d'échelle:



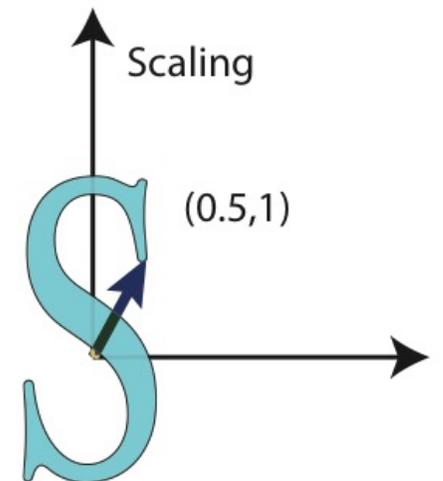
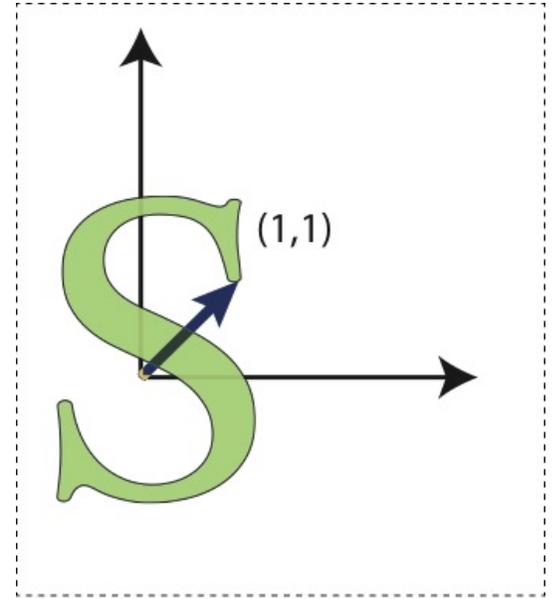
LES MATRICES DE TRANSFORMATIONS

- Changement d'échelle :

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

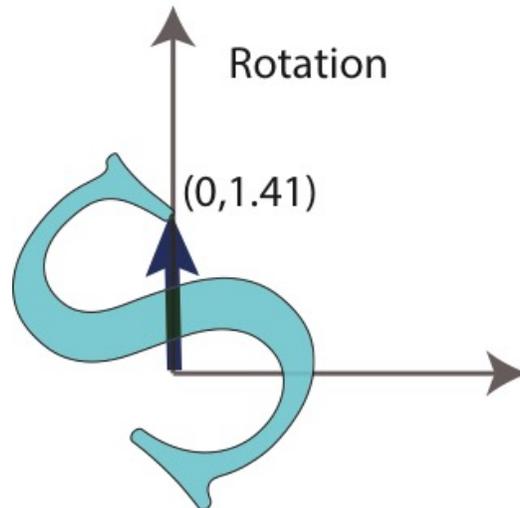
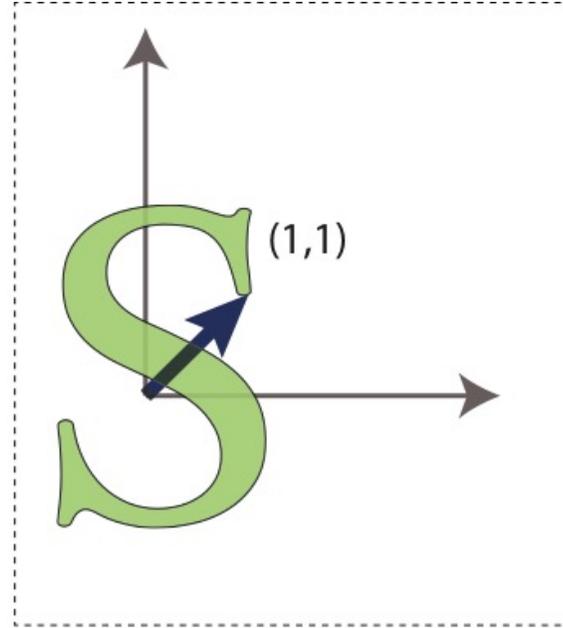
Exemple:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\beta \end{pmatrix}$$



LES MATRICES DE TRANSFORMATIONS

- Rotation



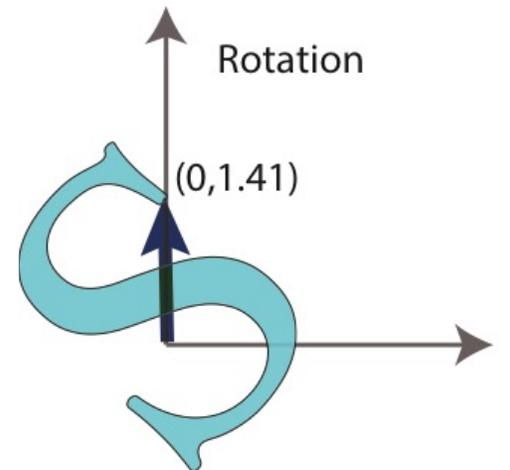
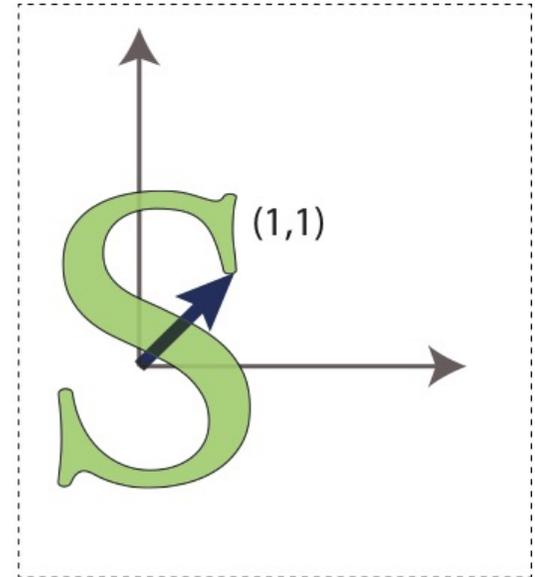
LES MATRICES DE TRANSFORMATIONS

- Rotation

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Example:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$



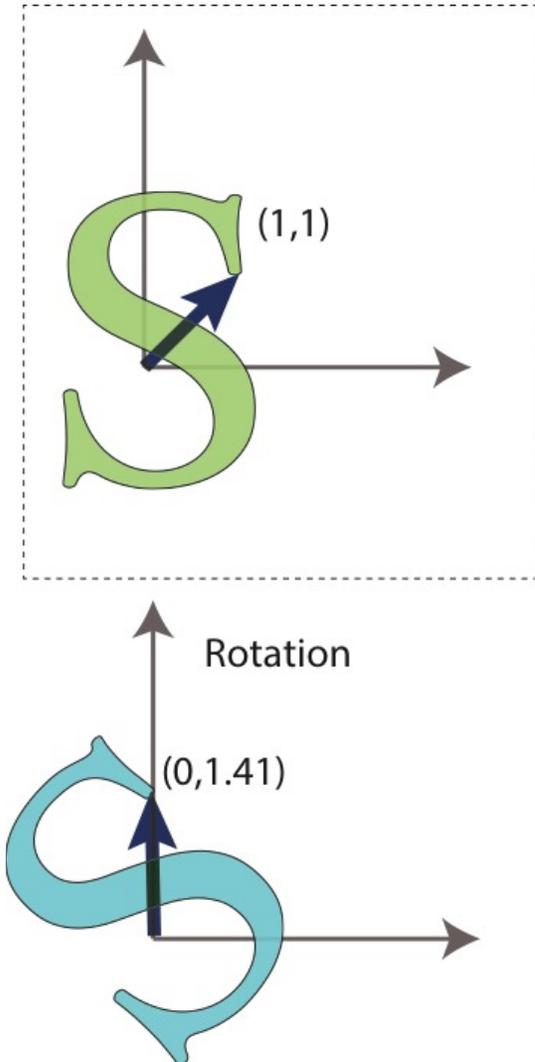
LES MATRICES DE TRANSFORMATIONS

- Rotation

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



LES PROPRIÉTÉS DE ROTATION

- $R(\alpha)$ est la matrice orthogonale

$$R(\alpha)^{-1} = R(\alpha)^T$$

LES PROPRIÉTÉS DE ROTATION

- $R(\alpha)$ est la matrice orthogonale

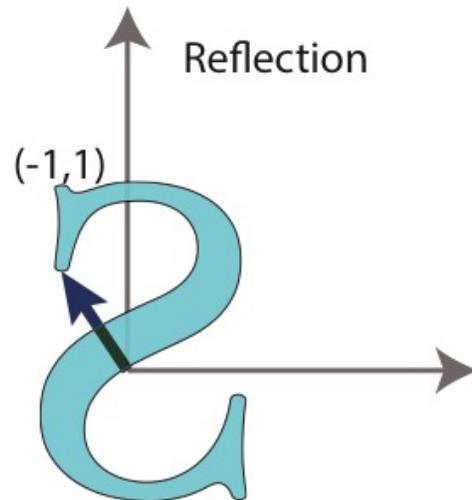
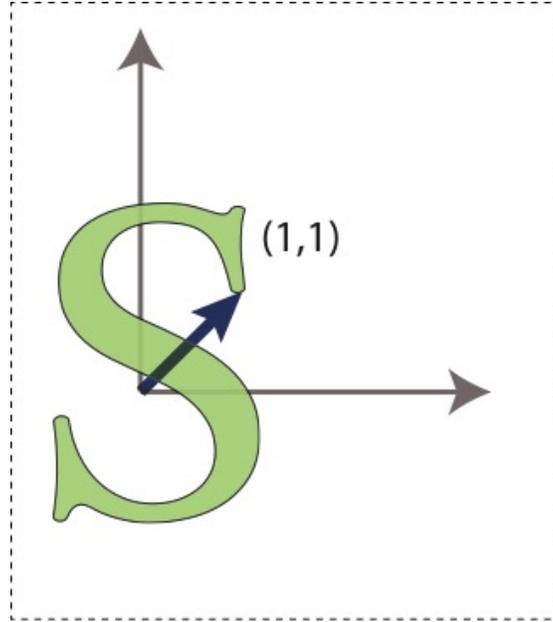
$$R(\alpha)^{-1} = R(\alpha)^T$$

- Donc, pour tourner en arrière (i.e. par $-\alpha$), c'est

$$R(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = R(\alpha)^T$$

LES MATRICES DE TRANSFORMATIONS

- Réflexion



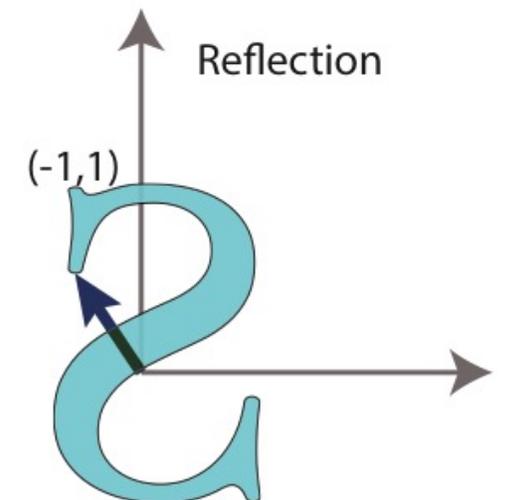
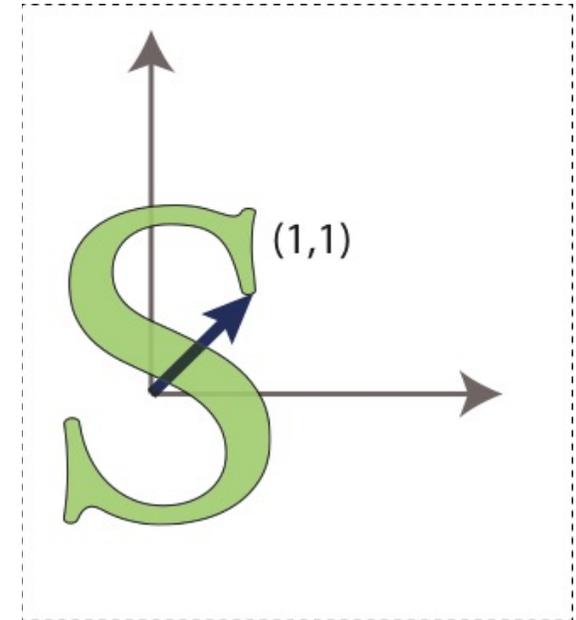
LES MATRICES DE TRANSFORMATIONS

- Réflexion

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ or } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$



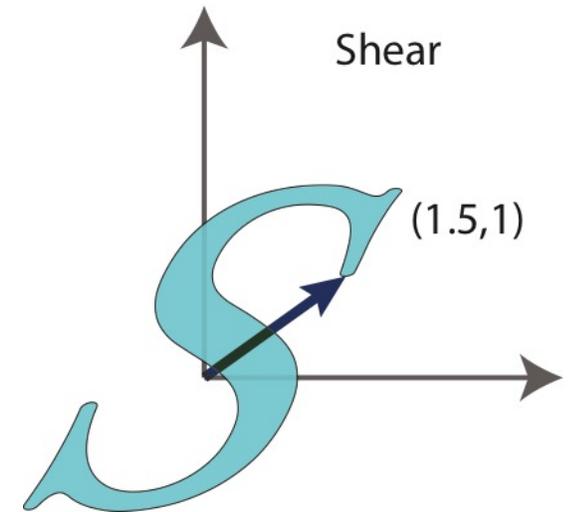
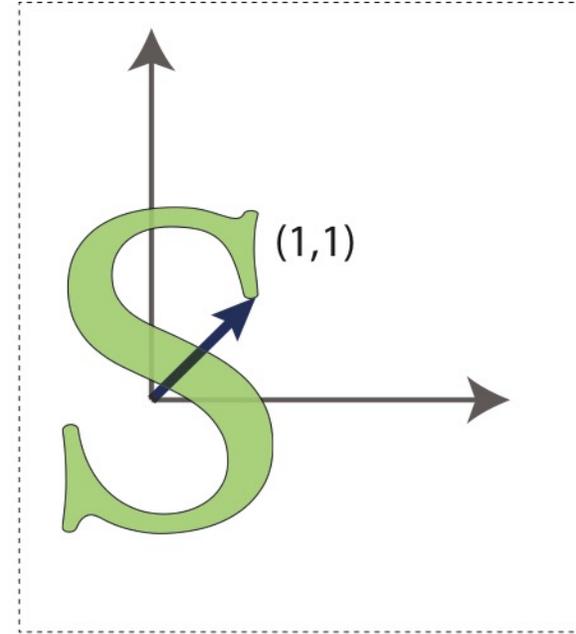
LES MATRICES DE TRANSFORMATIONS

- Cisaillement

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ or } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}$$



UNE TRANSFORMATION LINÉAIRE

Une transformation L est **linéaire** si pour deux vecteurs u, v

$$L(u) + L(v) = L(u + v) \quad \text{additivité}$$

Et un scalaire α

$$\alpha \cdot L(u) = L(\alpha u) \quad \text{homogénéité de degré 1}$$

UNE TRANSFORMATION LINÉAIRE

Une transformation L est **linéaire** si pour deux vecteurs u, v

$$L(u) + L(v) = L(u + v)$$

additivité

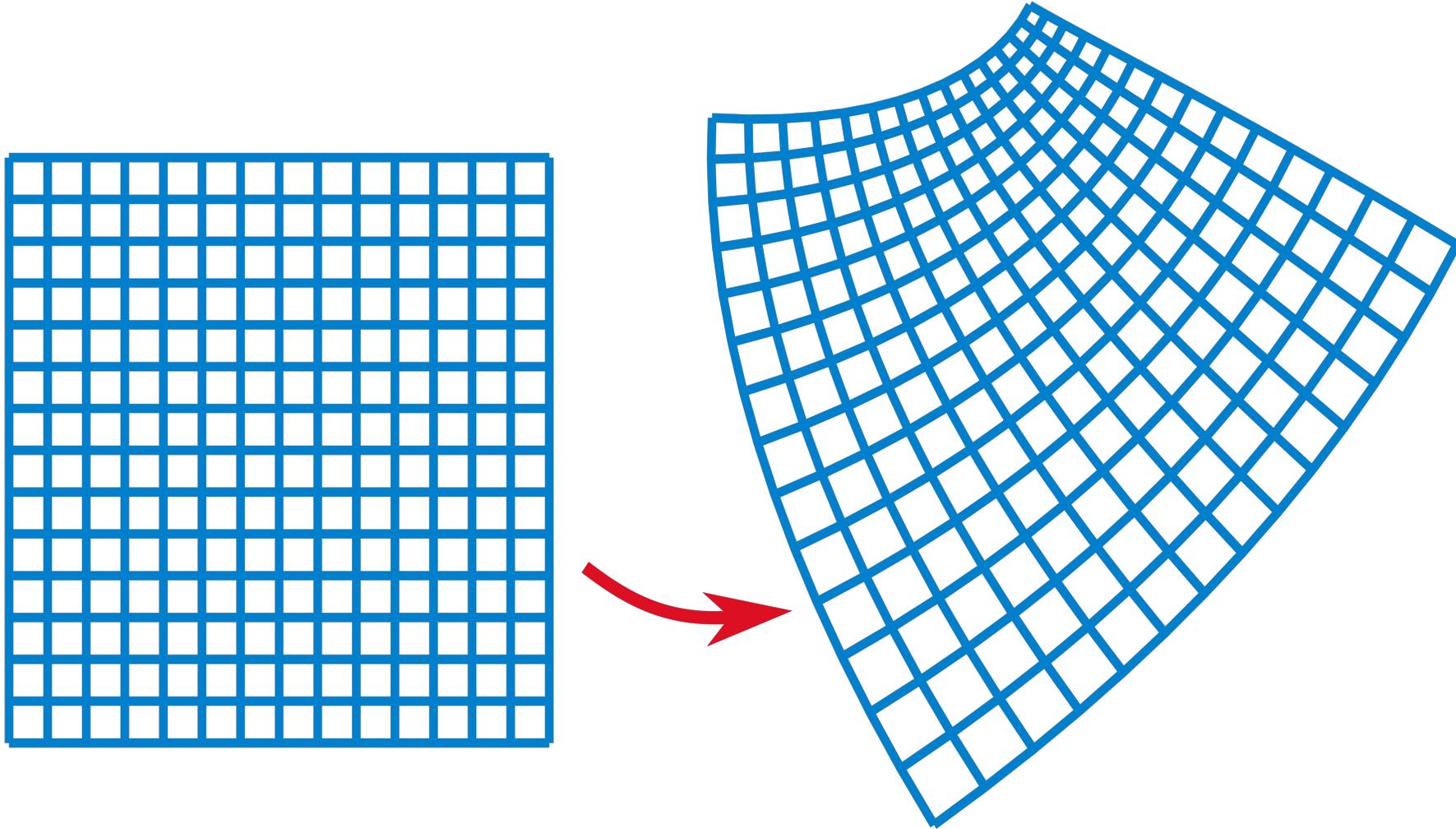
$$\alpha \cdot L(u) = L(\alpha u)$$

homogénéité de degré 1

Corollaire: Les lignes restent des lignes. (“Les transformations linéaires préservent la colinéarité”)

- Pas vrai pour toute transformation.

UNE TRANSFORMATION NON-LINÉAIRE



UNE TRANSFORMATION LINÉAIRE

homogénéité de degré 1

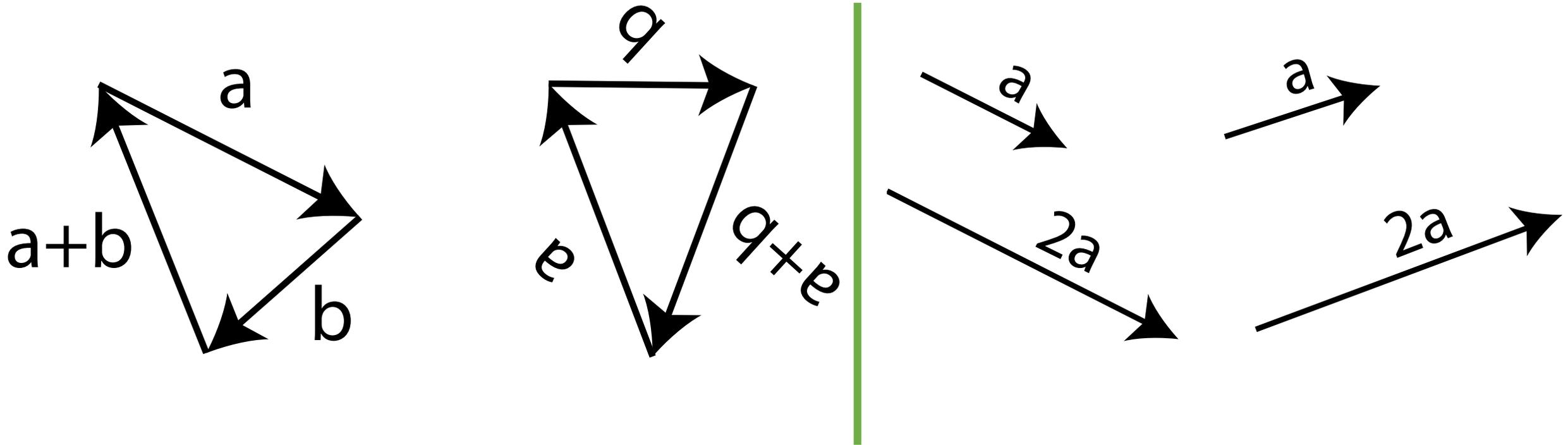
$$\alpha \cdot L(u) = L(\alpha u)$$

- En particulier,

$$L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

JUSTE POUR EN ÊTRE CERTAIN

- Les rotations sont linéaires
 - Elles sont représentables par une matrice
 - Mais aussi on peut le vérifier directement:



MULTIPLICATION DES MATRICES

- La multiplication des matrices satisfait ces exigences:

additivité

$$L(u) + L(v) = L(u + v)$$

$$M(u + v) = Mu + Mv$$

homogénéité de degré 1

$$\alpha \cdot L(u) = L(\alpha u)$$

$$\alpha \cdot Mu = M \cdot (\alpha u)$$

- Donc toutes les transformations représentées par une matrice sont LINÉAIRES

Que fait cette transformation 2D?

- A. Elle tourne de 90 degrés
- B. Elle change d'échelle par 2
- C. Elle tourne de -90 degrés
- D. Rien

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Que fait cette transformation 2D?

- A. Elle tourne de 90 degrés
- B. Elle reflète l'objet
- C. Elle tourne de -90 degrés
- D. Elle change d'échelle

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

TRANSLATION

- On a un problème.
- Translation:

$$L: u \rightarrow u + b$$
$$L(0) = b \neq 0$$

La translation n'est pas une transformation linéaire et ne peut pas être représentée par une matrice dans cet espace.

TRANSLATION

- On a un problème.
- Translation:

$$L: u \rightarrow u + b$$
$$L(0) = b \neq 0$$

La translation n'est pas une transformation linéaire et ne peut pas être représentée par une matrice dans cet espace.

On a besoin de plus de puissance.