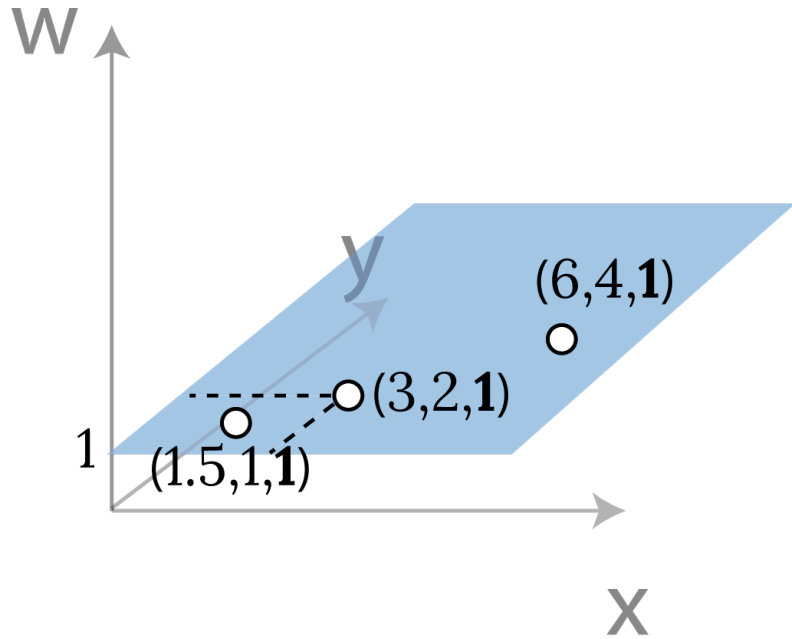


IFT 3355: INFOGRAPHIE

LES COORDONNÉES

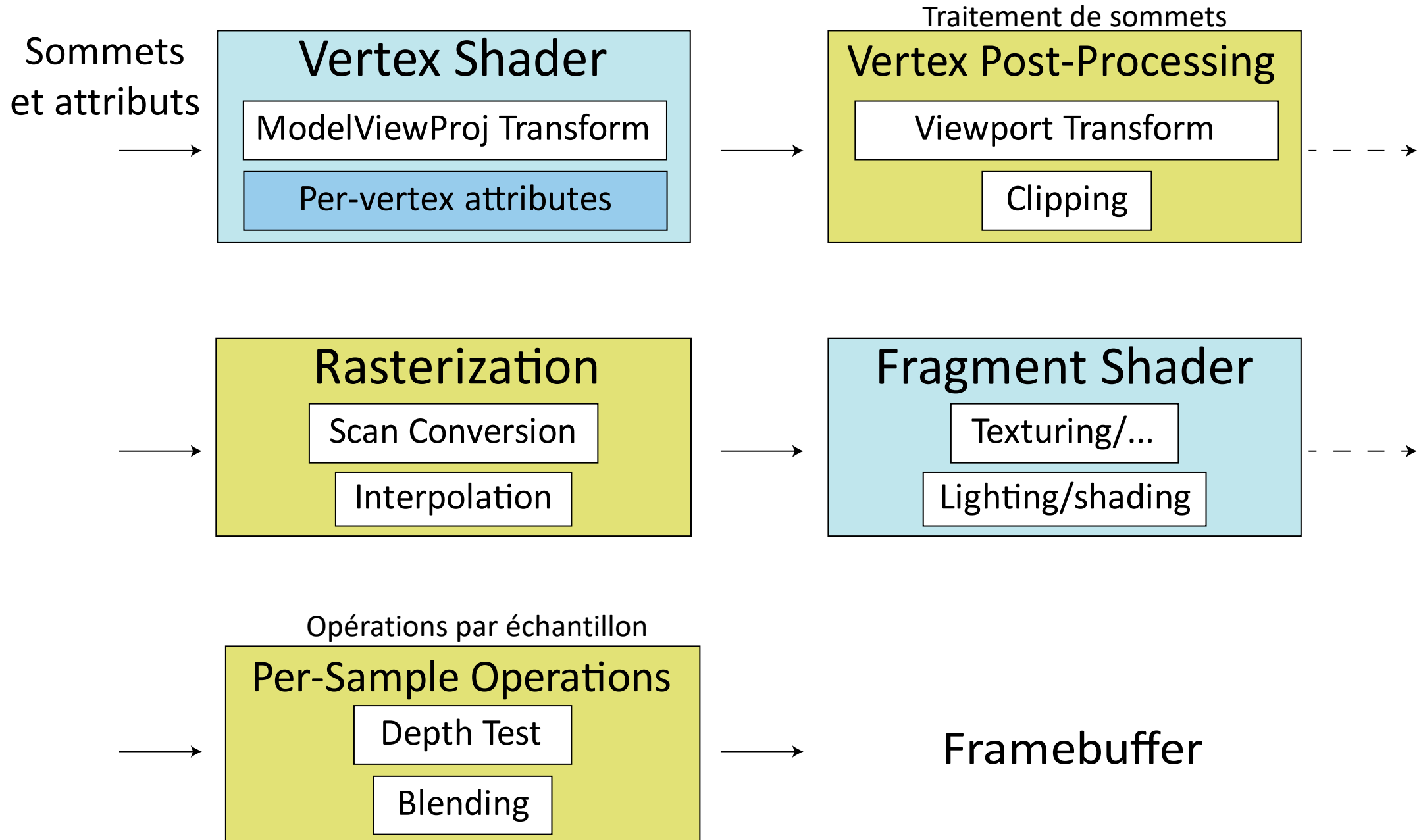
HOMOGÈNES

Livre de référence: -

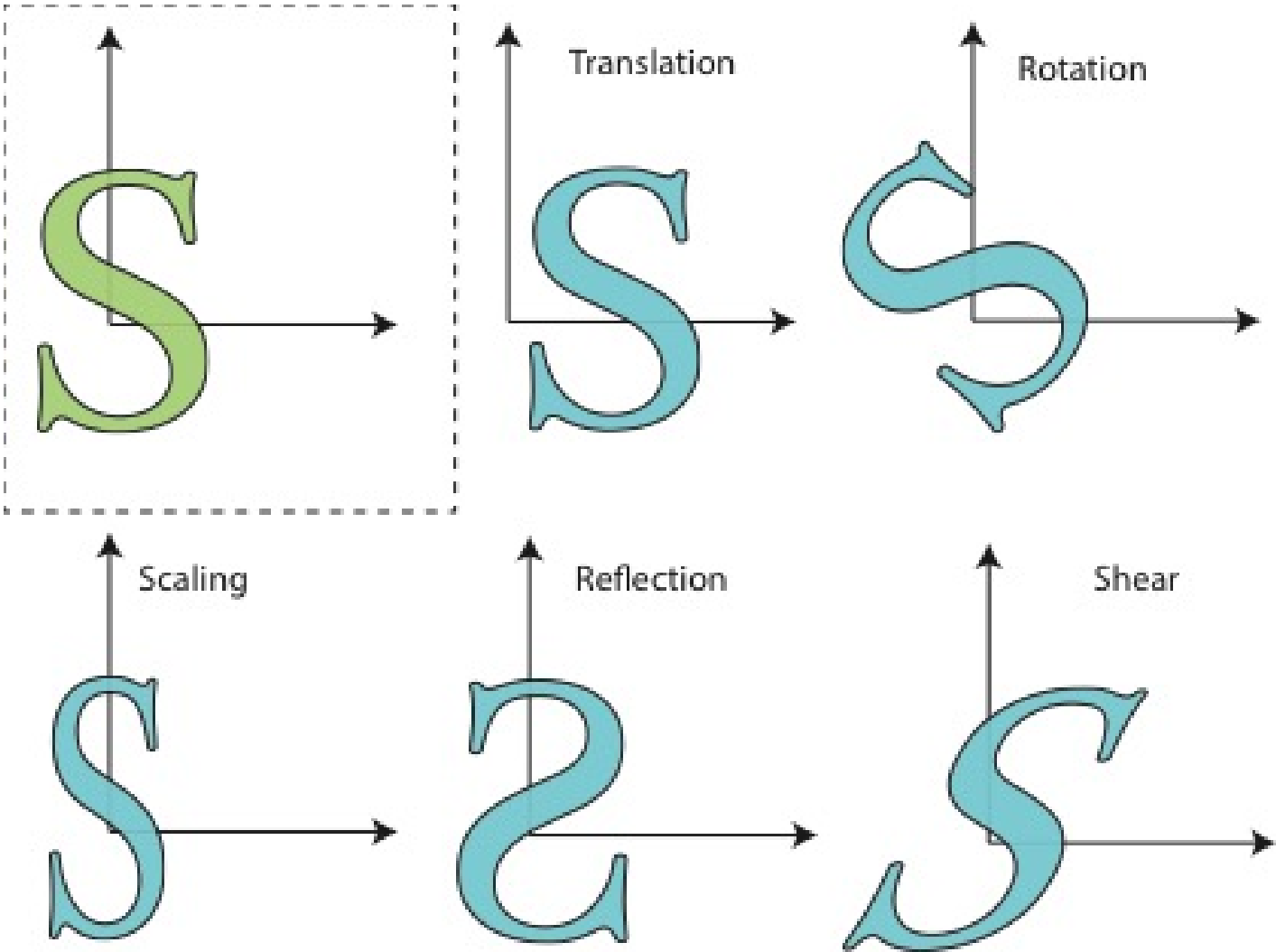


Mikhail Bessmeltsev

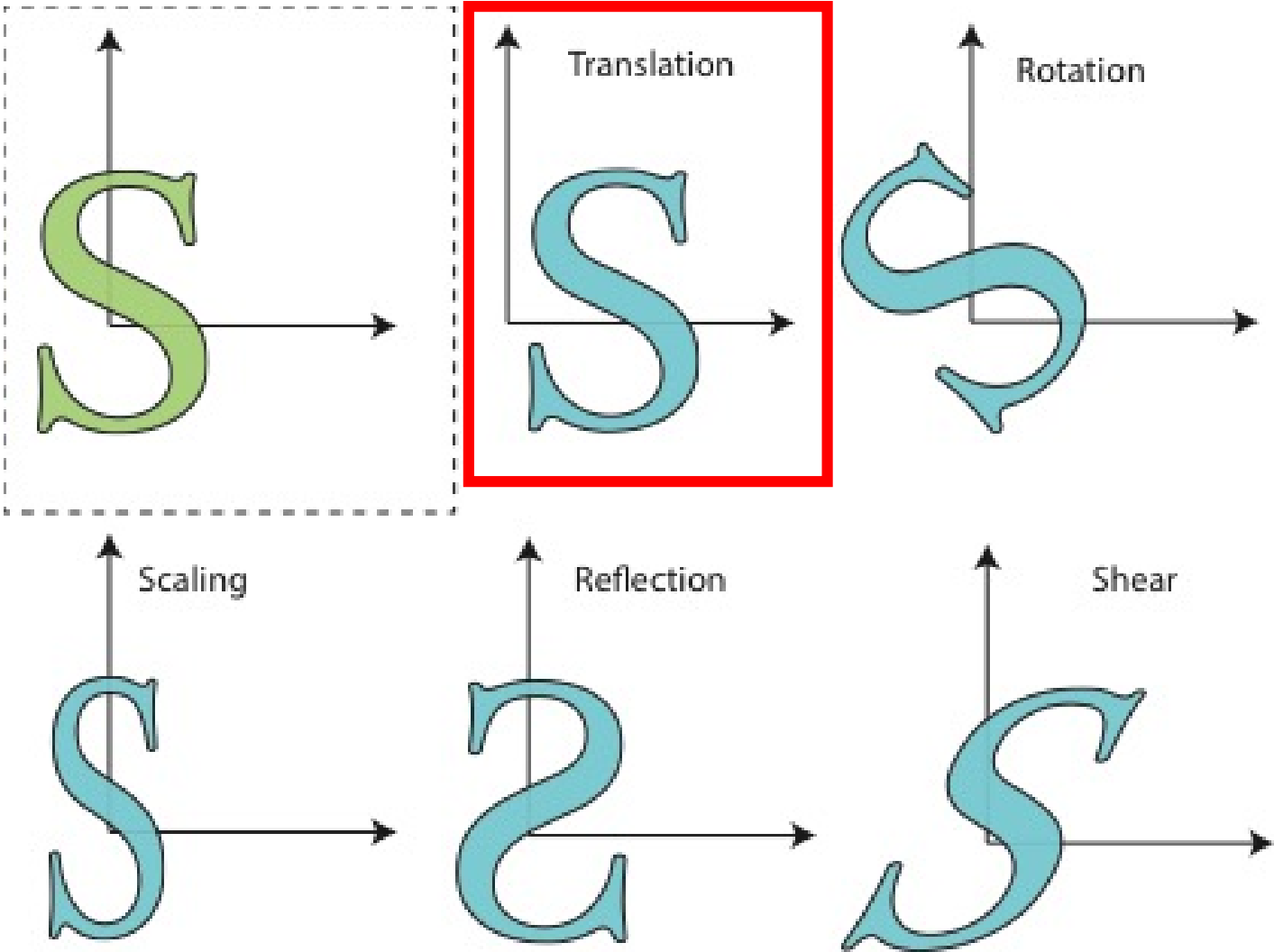
PIPELINE: PLUS DE DÉTAILS



LES TRANSFORMATIONS AFFINES



LES TRANSFORMATIONS AFFINES



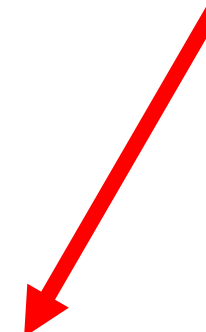
UNE IDÉE

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

LA MATRICE AUGMENTÉE

$$M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Translation

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + b_x \\ y' + b_y \\ z' + b_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{b}$$


LA MATRICE AUGMENTÉE

La transformation linéaire

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LA MATRICE AUGMENTÉE

La transformation linéaire

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

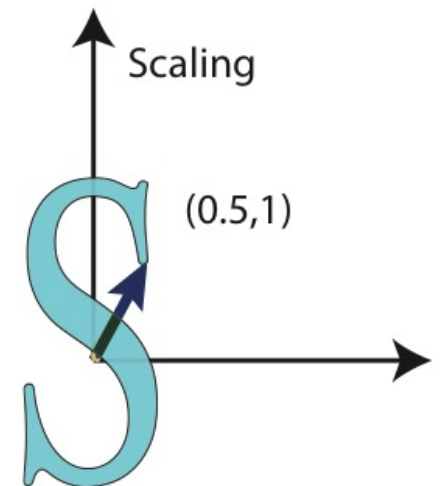
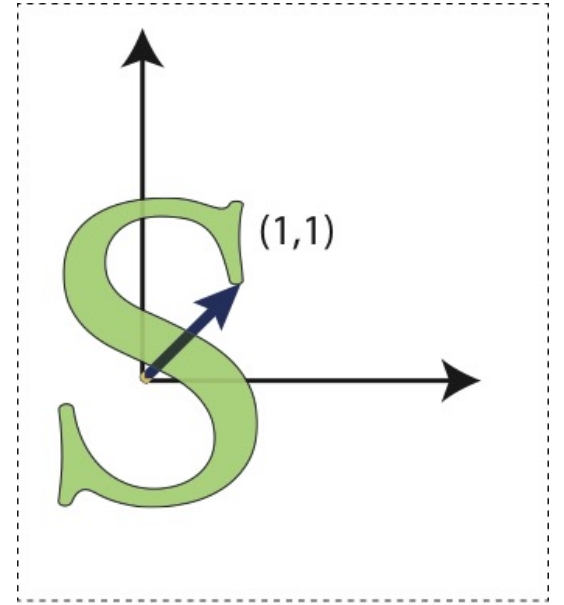
Translation



LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Changement d'échelle:

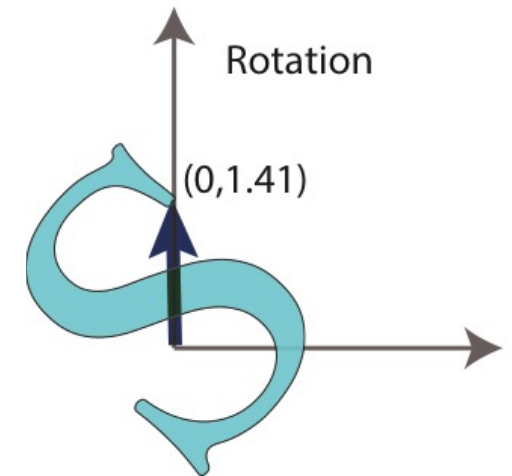
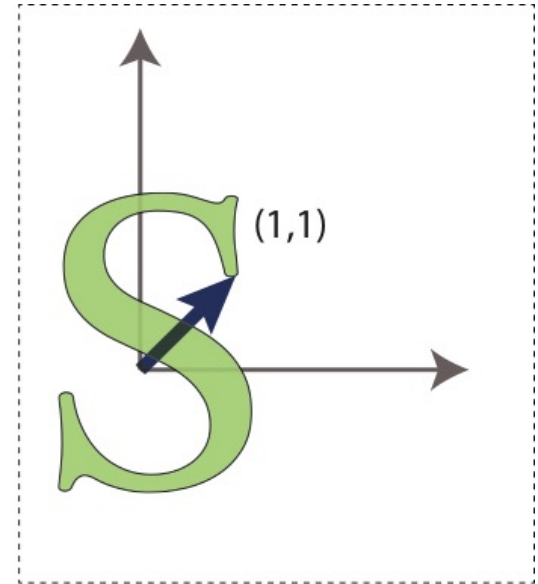
$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Rotation (autour de l'axe z)

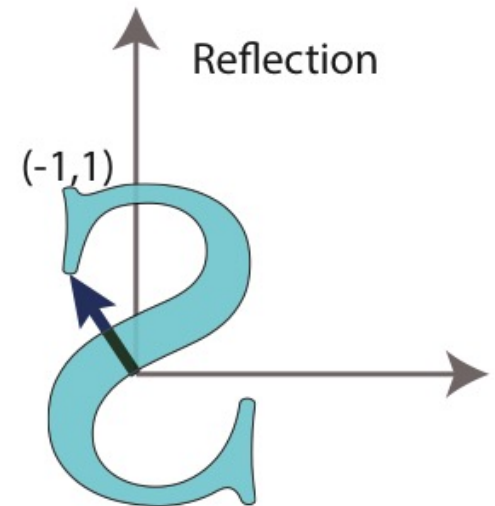
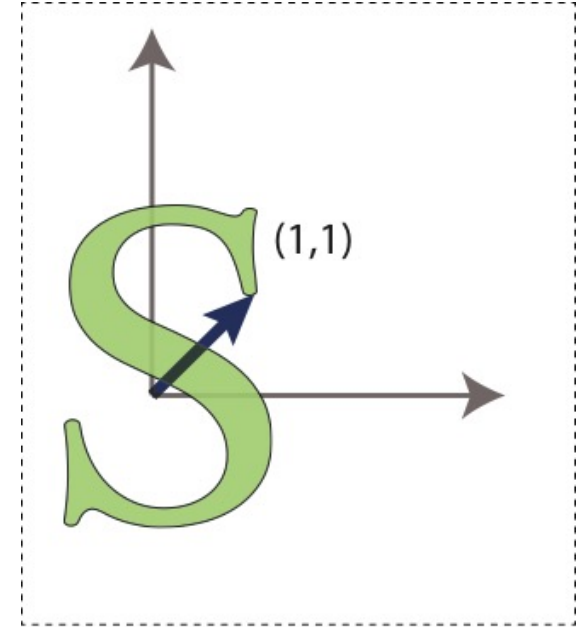
$$M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Réflexion (y)

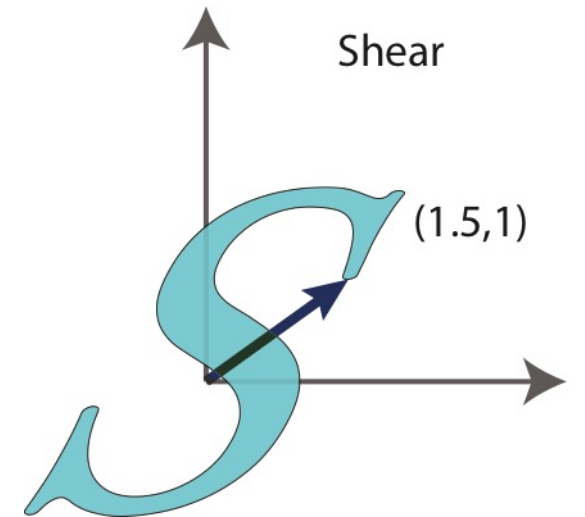
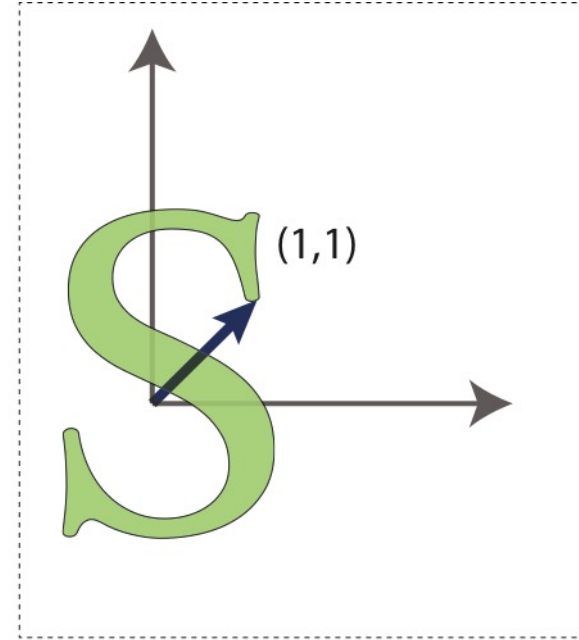
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Cisaillement (axe x)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Translation

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & 0 & c_y \\ 0 & 0 & 1 & c_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C'EST QUOI, 1?

- Maintenant tous les points sont représentés par $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ en coordonnées homogènes
- Ce sont des vecteurs d'un **autre espace**

LES COORDONNÉES HOMOGÈNES

Les coordonnées homogènes $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ ← $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ Les coordonnées euclidiennes

LES COORDONNÉES HOMOGÈNES

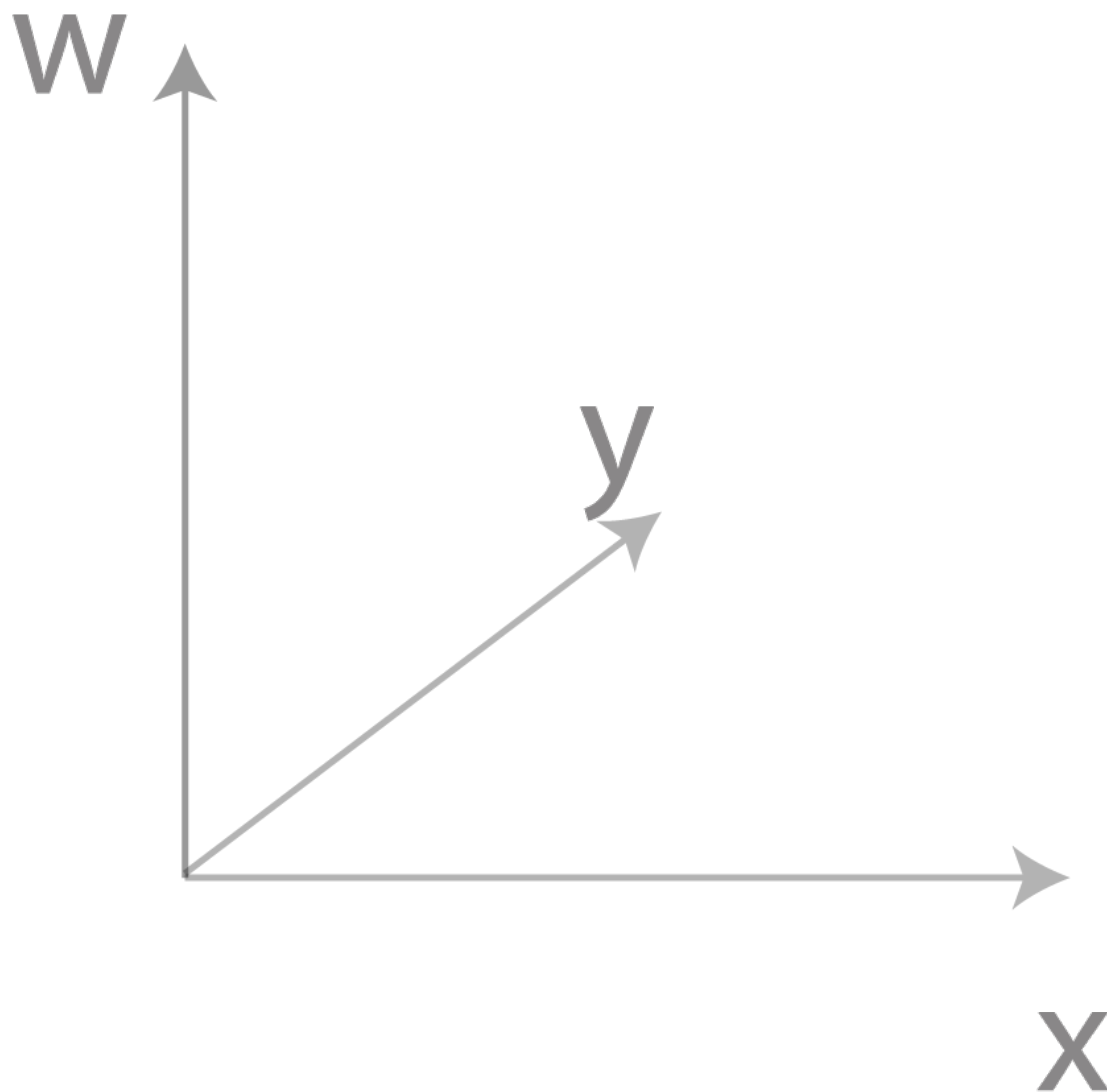
Les coordonnées homogènes $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{bmatrix}$ Les coordonnées euclidiennes

LES COORDONNÉES HOMOGÈNES

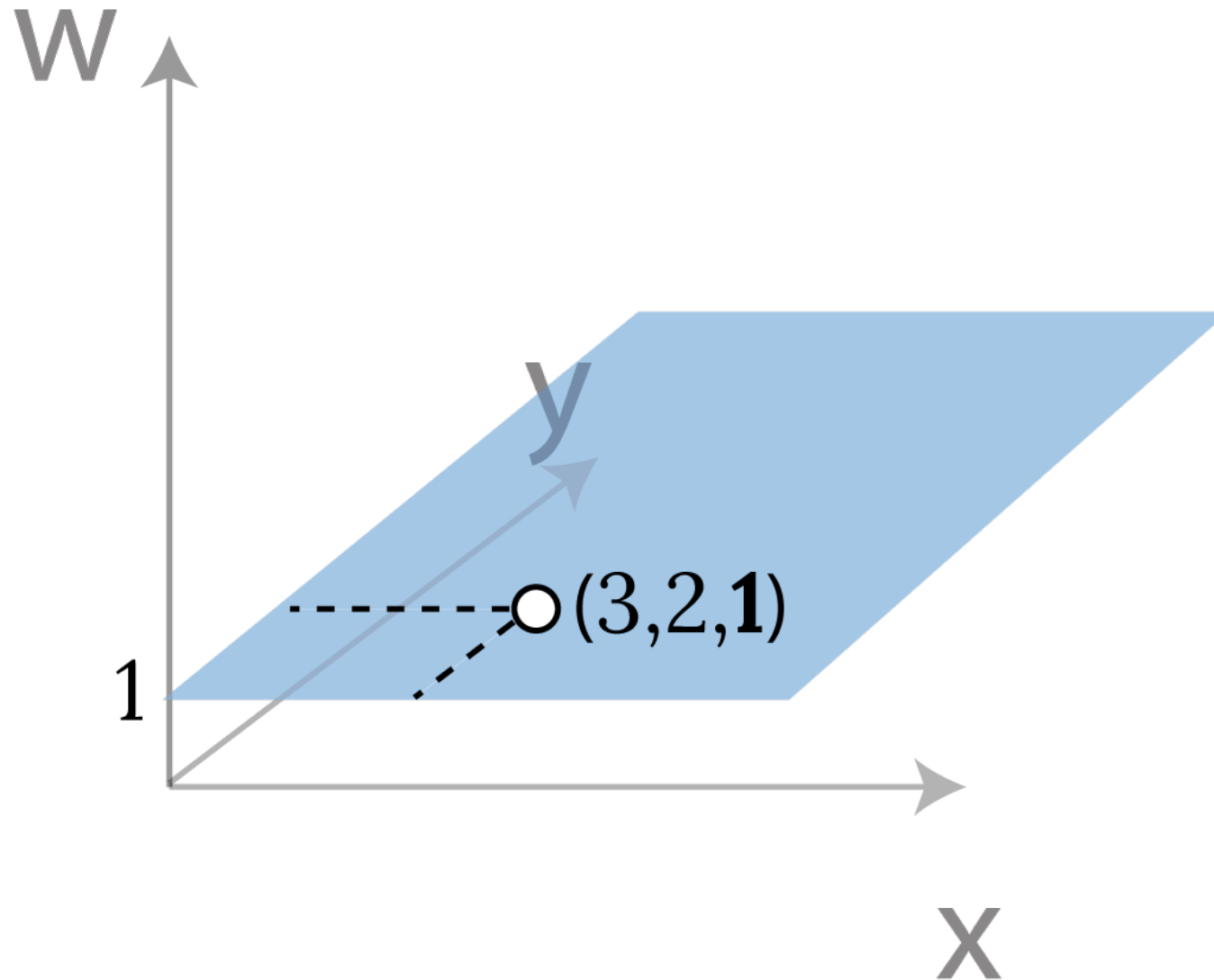
Les coordonnées homogènes $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{bmatrix}$ Les coordonnées euclidiennes

Pas 1-1!

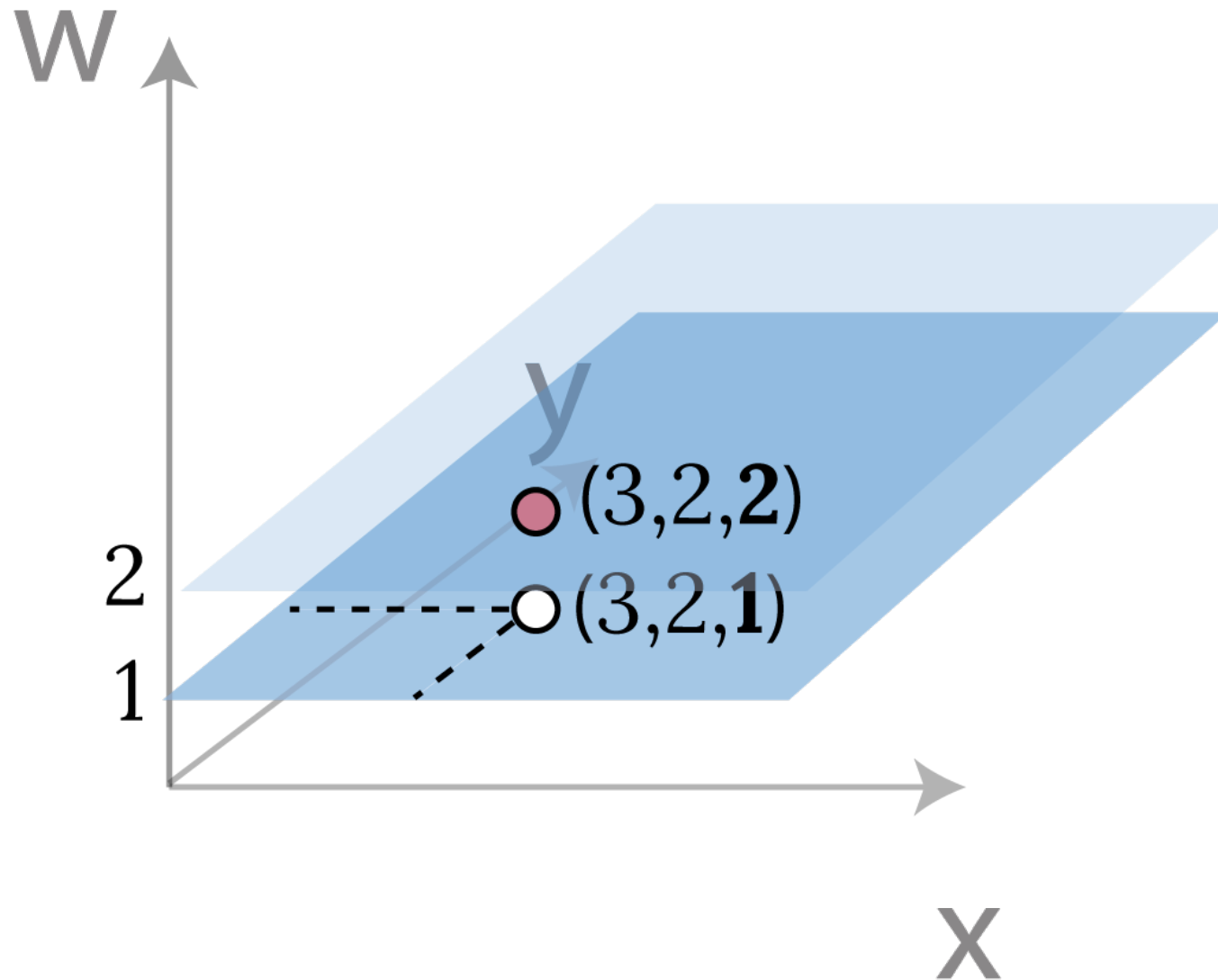
LES COORDONNÉES HOMOGÈNES



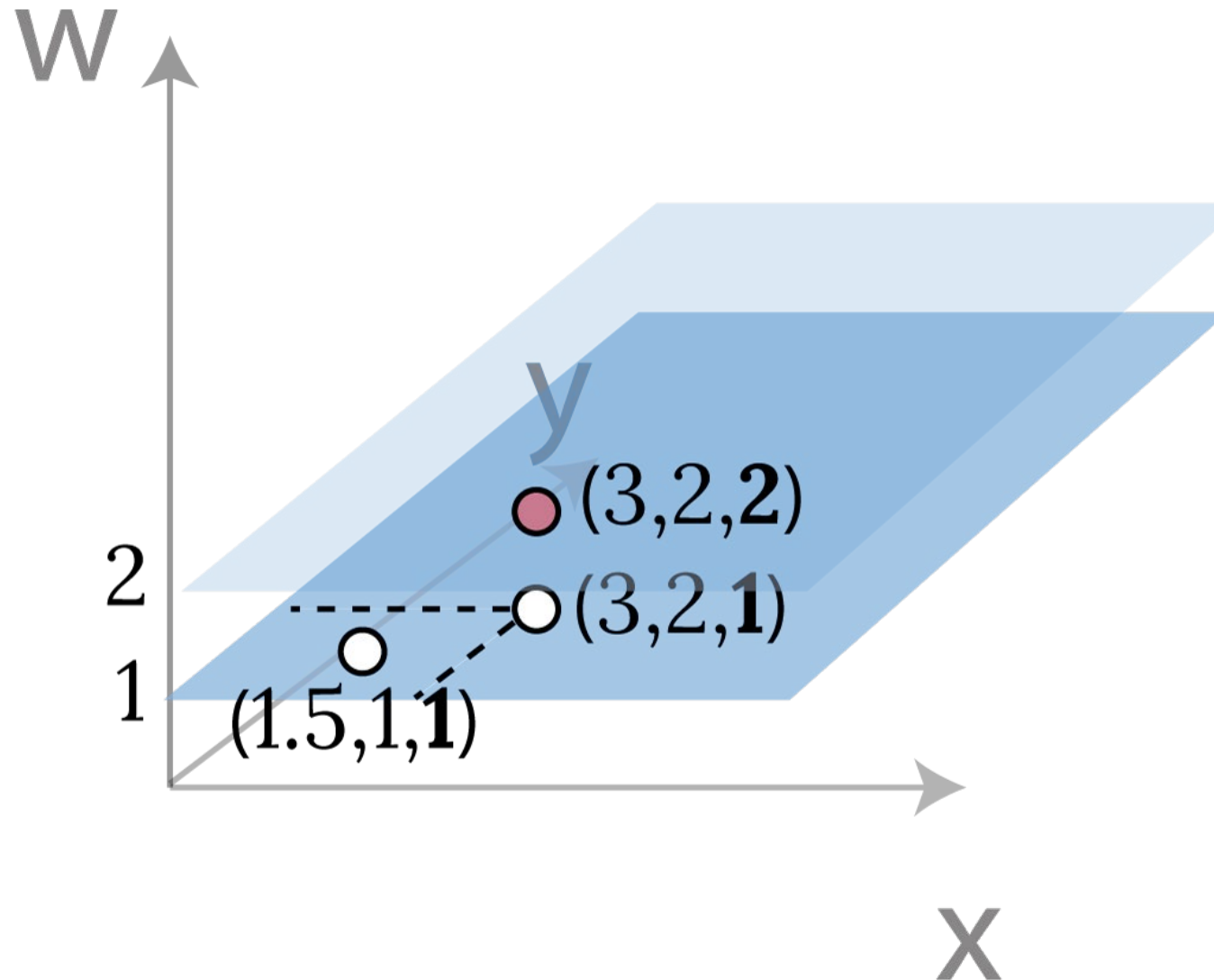
LES COORDONNÉES HOMOGÈNES



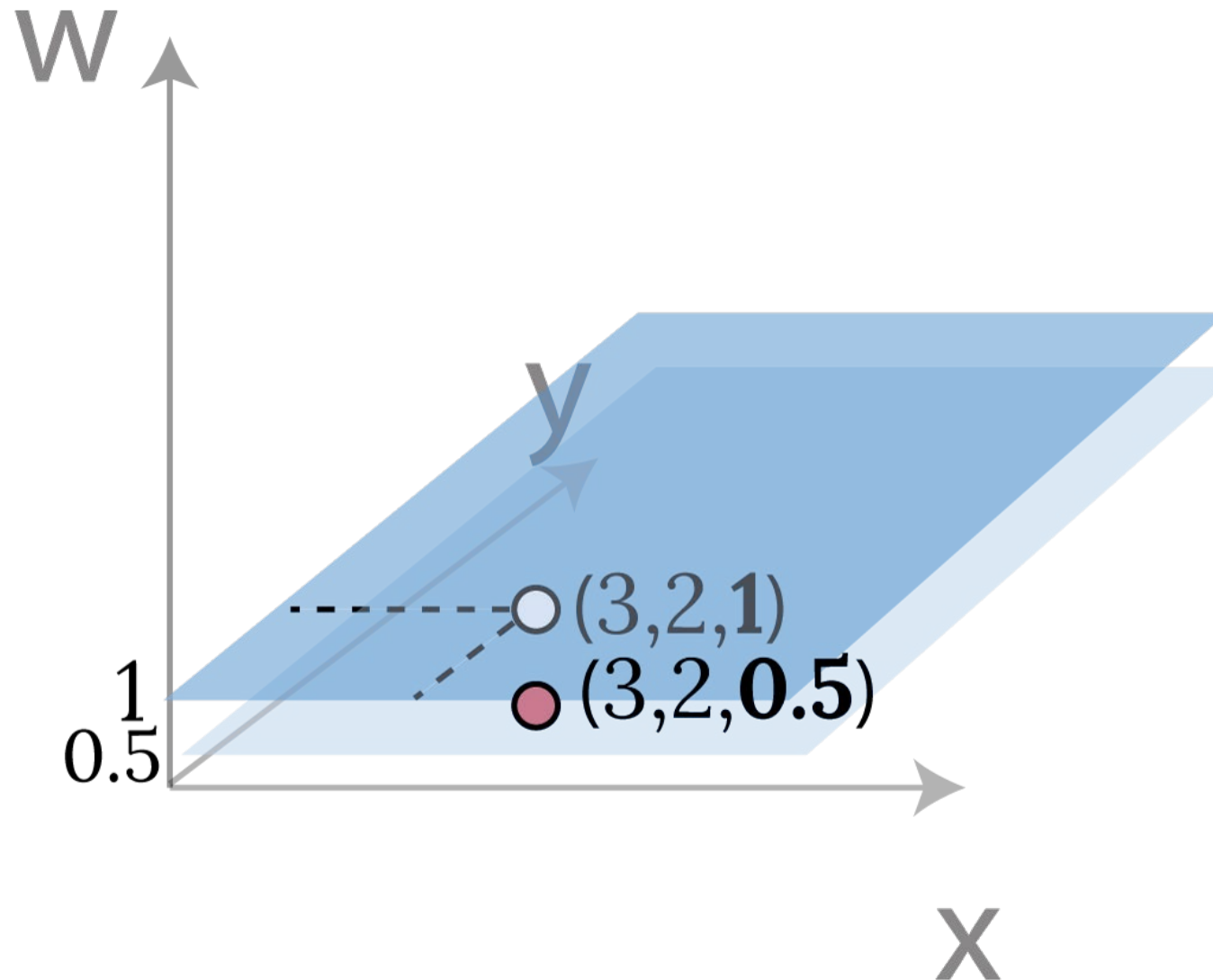
LES COORDONNÉES HOMOGÈNES



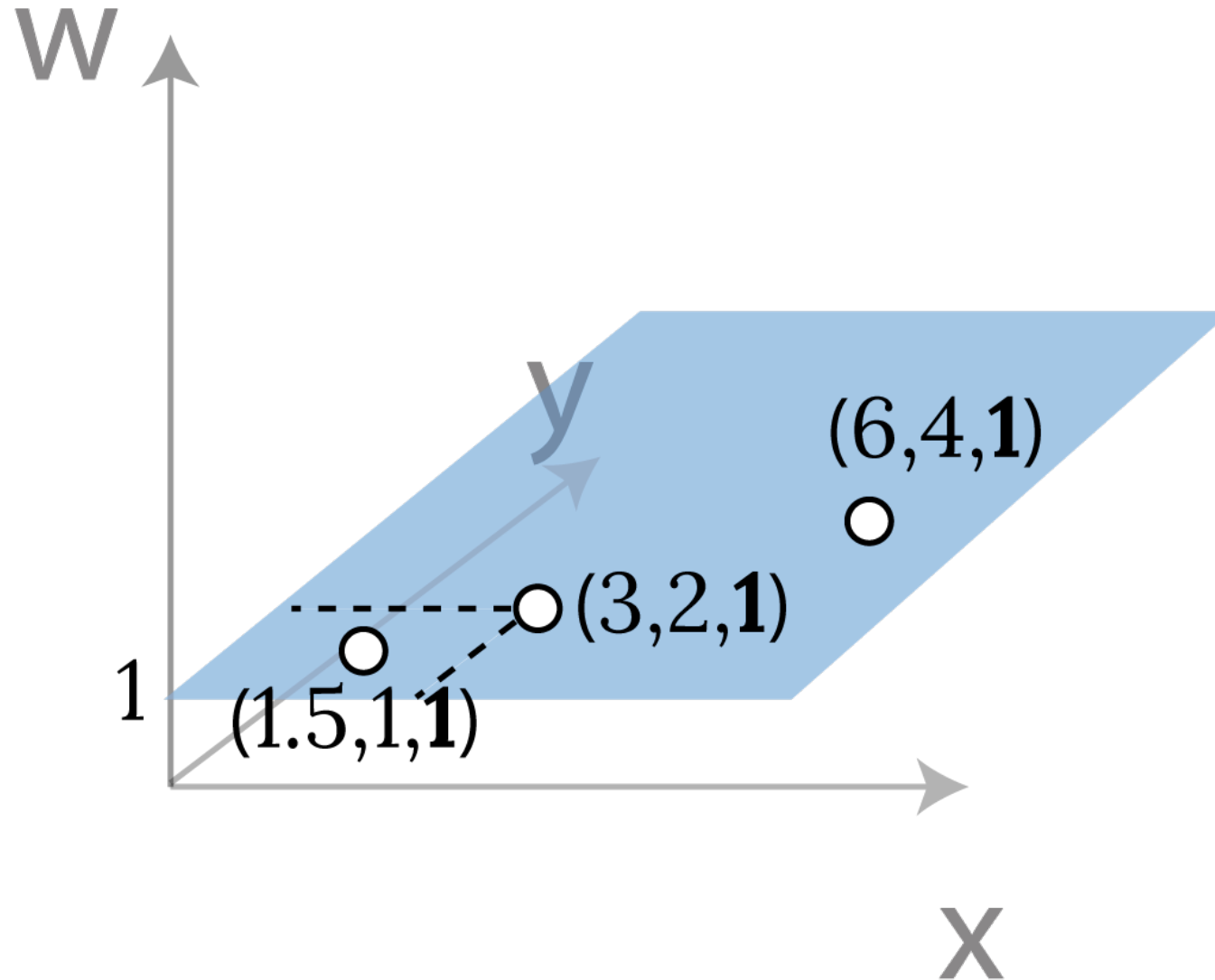
LES COORDONNÉES HOMOGÈNES



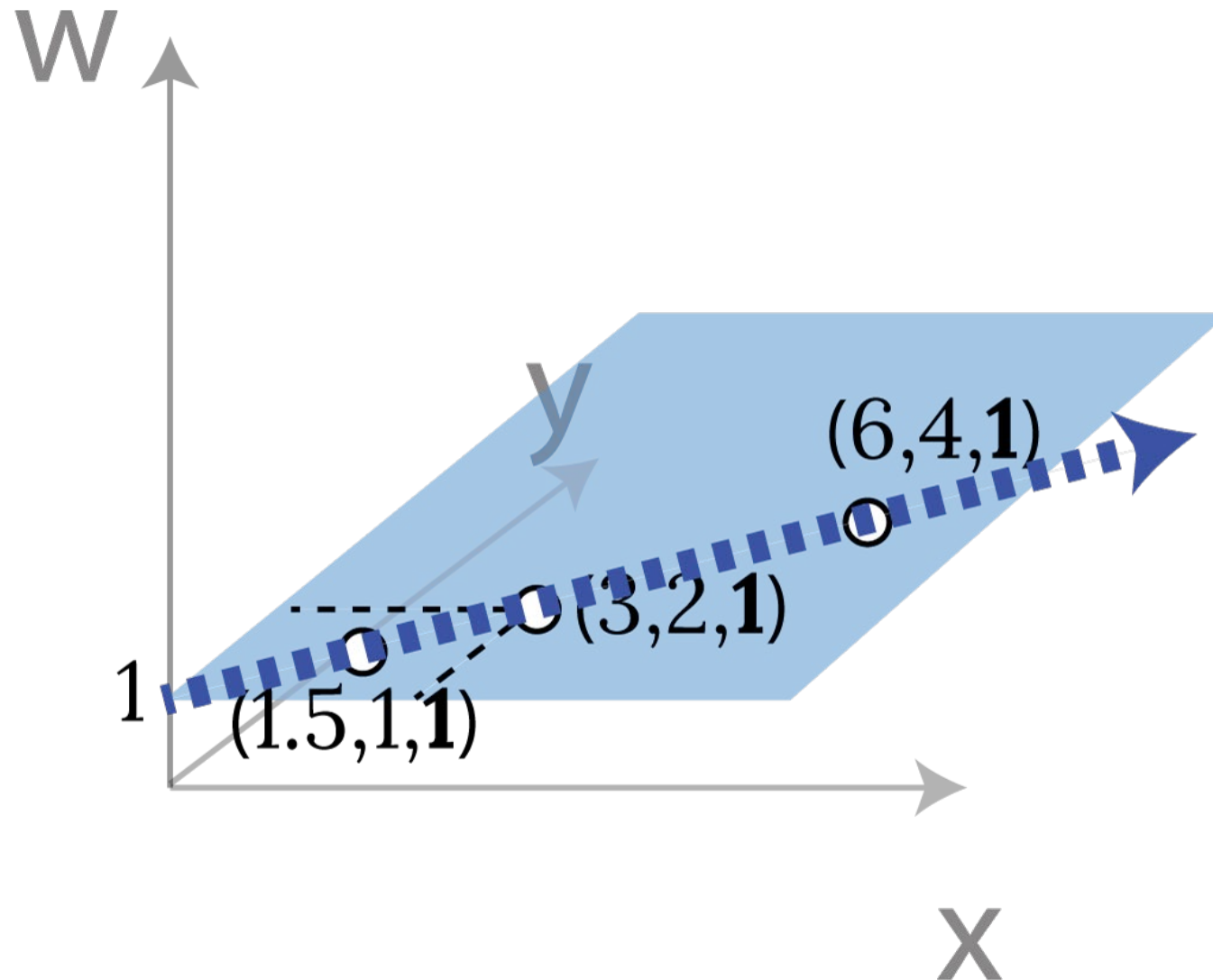
LES COORDONNÉES HOMOGÈNES



LES COORDONNÉES HOMOGÈNES



LES COORDONNÉES HOMOGÈNES



LES POINTS ET LES VECTEURS

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs!

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, w \neq 0$ sont des points

UNE QUESTION

- Que font ces transformations affines 2D?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

QUELLES PAIRES SONT ÉQUIVALENTES?

A. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D. A & B

E. A & C

TRANSFORMER LES POINTS & VECTEURS

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + b_x \\ y' + b_y \\ z' + b_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMER POINTS & VECTEURS

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + b_x \\ y' + b_y \\ z' + b_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Point:
Transformation
linéaire +
translation

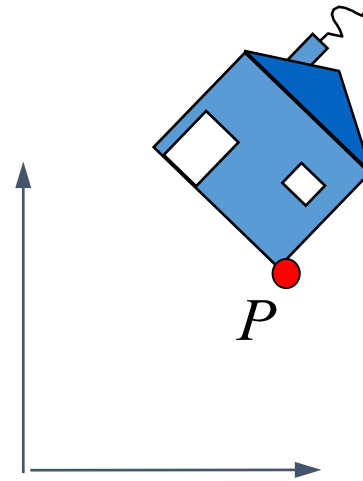
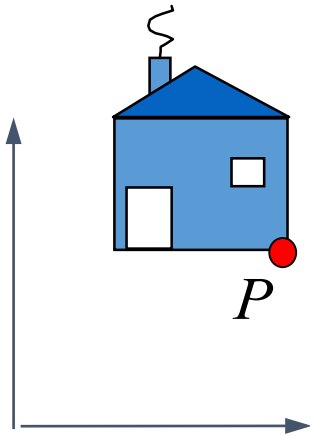
$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur:
Transformation
linéaire

COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

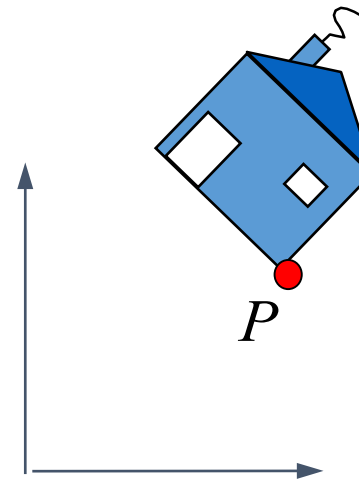
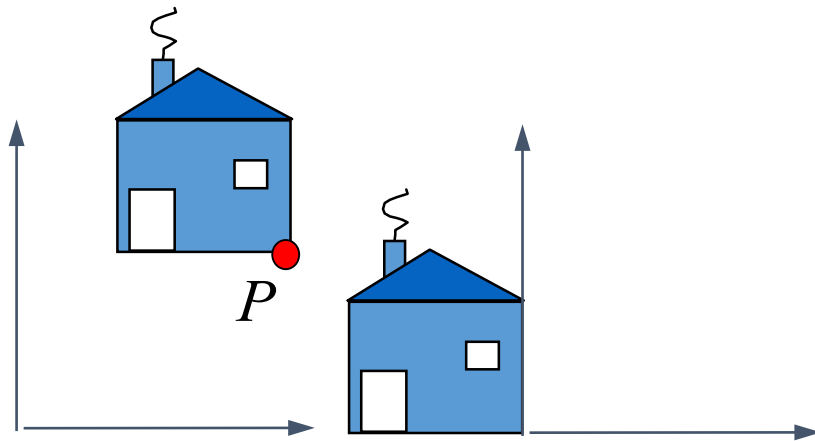
COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Quelle opération tourne XY par θ autour du $P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$?



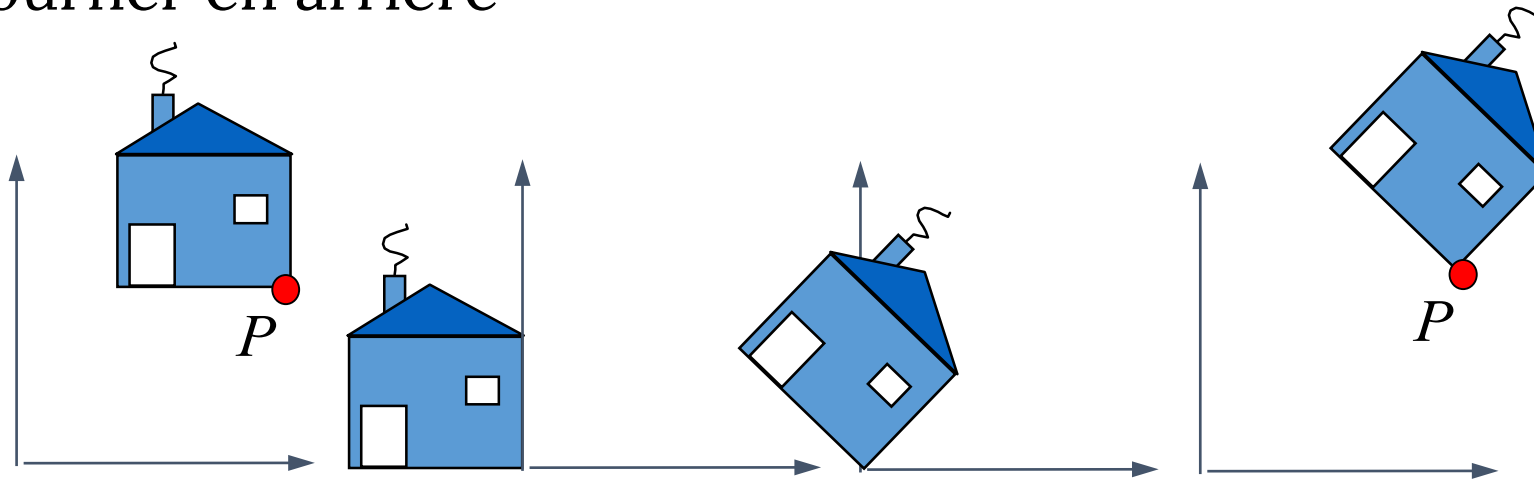
COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Quelle opération tourne XY par θ autour du $P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$?
- La réponse:
 - Bouger P vers l'origine



COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Quelle opération tourne XY par θ autour du $P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$?
- La réponse:
 - Bouger P vers l'origine
 - Tourner de θ autour de l'origine
 - Retourner en arrière



COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

$$T^{(p_x, p_y)} R^\theta T^{(-p_x, -p_y)} (V)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

UNE IDÉE GÉNÉRALE

- Transformer la géométrie en système de coordonnées où l'opération est plus simple
- Effectuer l'opération
- Transformer la géométrie en arrière en système de coordonnées original

- NB: la composition des transformations affines est une transformation affine (*fermée sous composition*)

DEUX INTERPRÉTATIONS DE LA COMPOSITION

1) Lire **de droite à gauche** pour les transformations d'**objet**

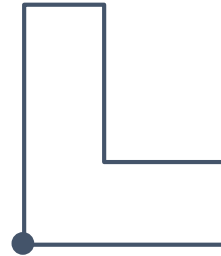
- Déplacer l'objet par $-t$
- Tourner l'objet de θ
- Déplacer l'objet par t

$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

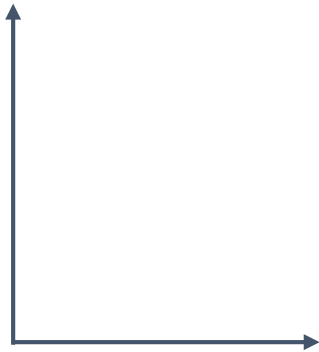
2) Lire **de gauche à droite** pour les transformations du **système de coordonnées**

- Déplacer le système par $-t$
- Tourner le système de $-\theta$
- Déplacer le système par t

COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

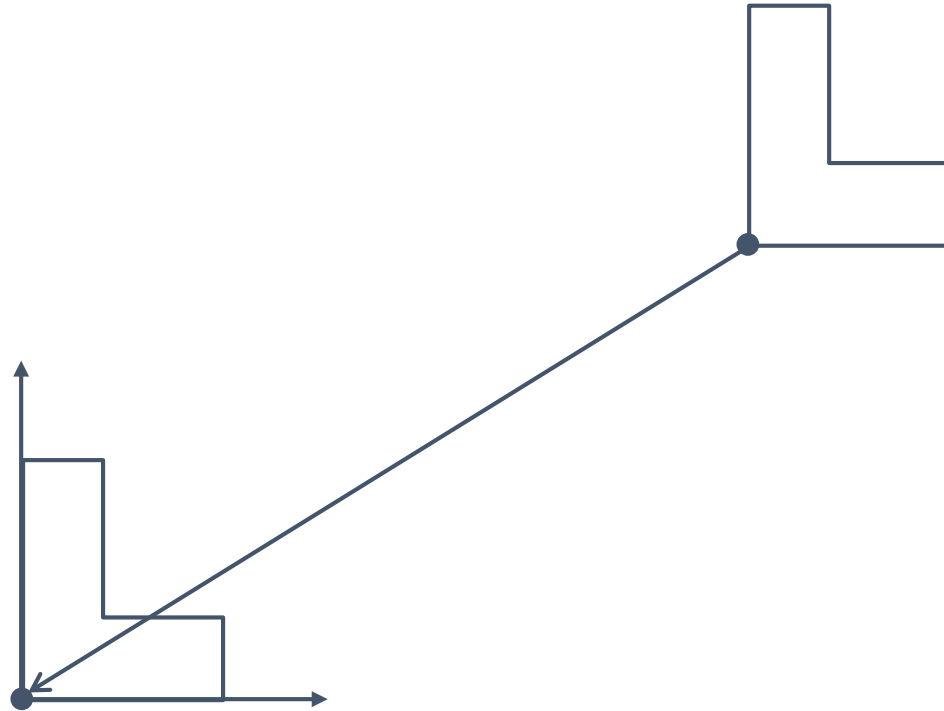


$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$



COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

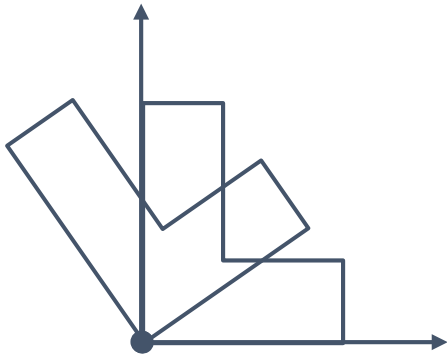
- Première interprétation:
 - Étape 1: déplacer l'objet par $-t$ (vers l'origine)



$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

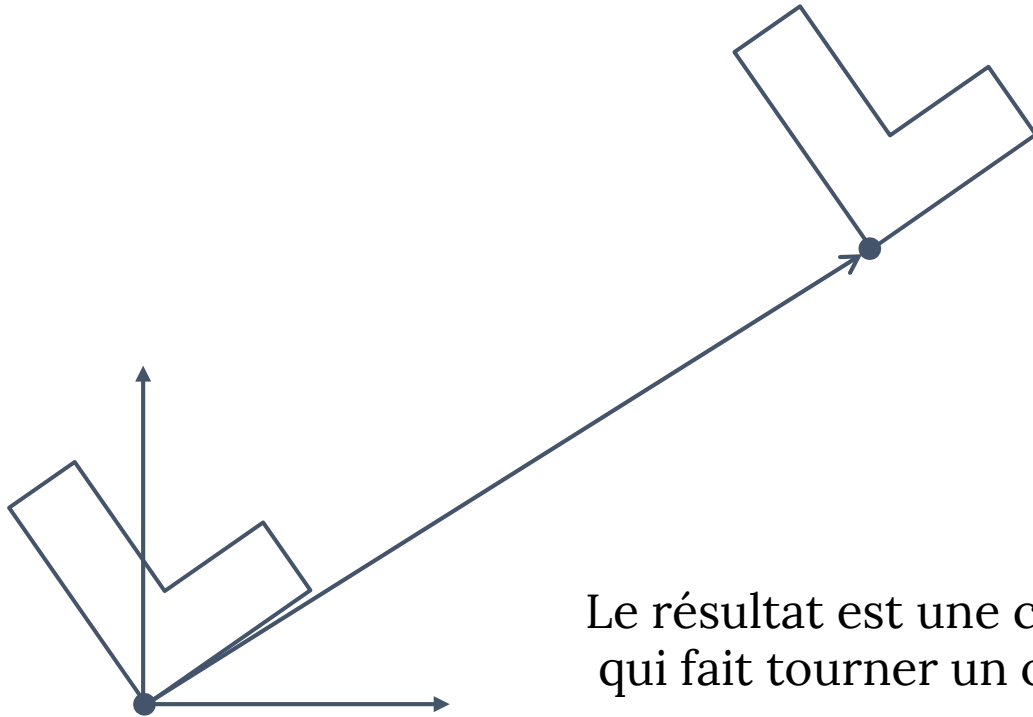
- Première interprétation:
 - Étape 2: tournez l'objet de θ



$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Première interprétation:
 - Étape 3: déplacer l'objet par t (en arrière)

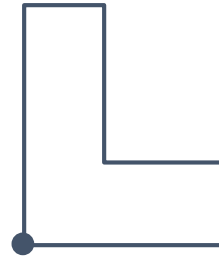


$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

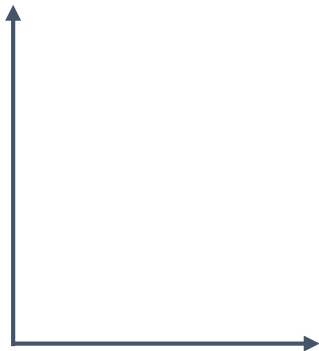
Le résultat est une composition de transformations qui fait tourner un objet autour du point à la position t

COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Deuxième interprétation:

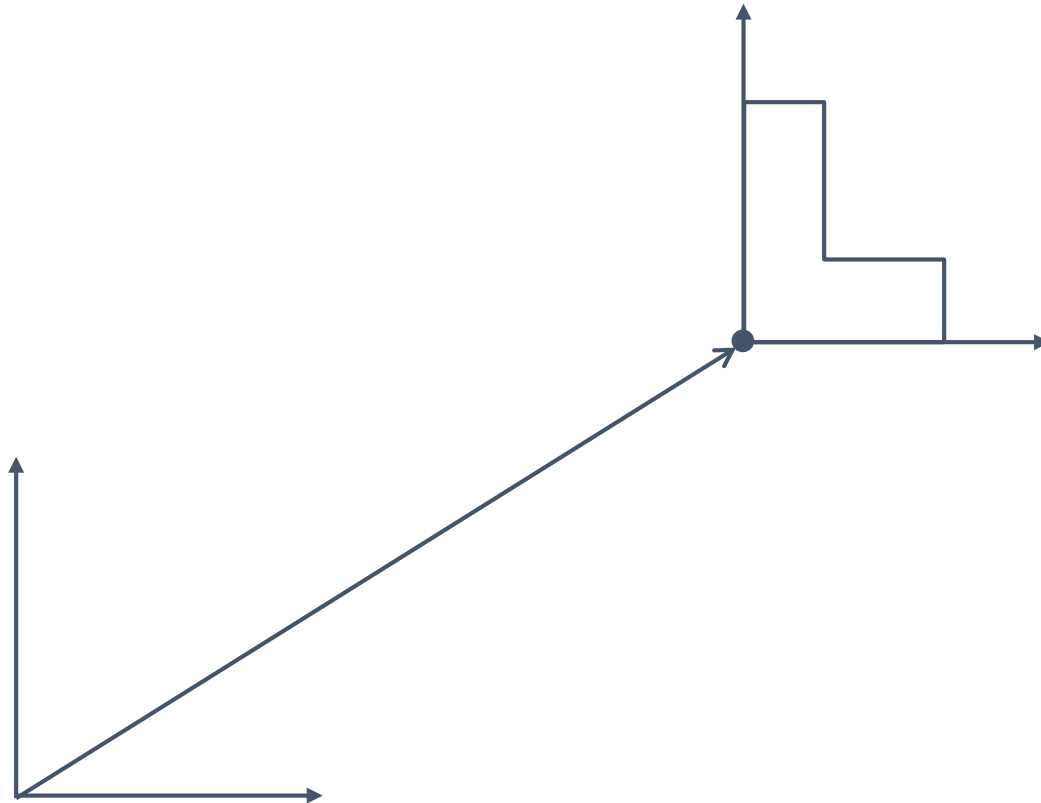


$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$



COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

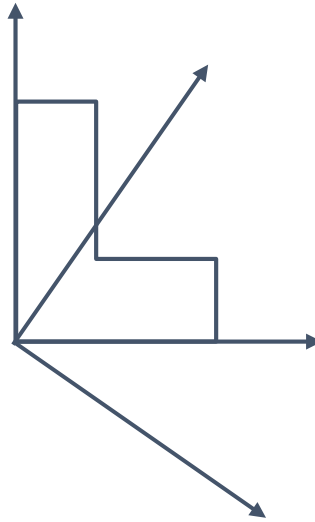
- Deuxième interprétation:
 - Étape 1: Déplacer le système (dans la direction opposée)



$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Deuxième interprétation:
 - Étape 2: tournez le système de $-\theta$



$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Deuxième interprétation:
 - Étape 3: déplacer le système à nouveau
 - (vecteur $-t$ dans le nouveau système de coordonnées!)



$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$