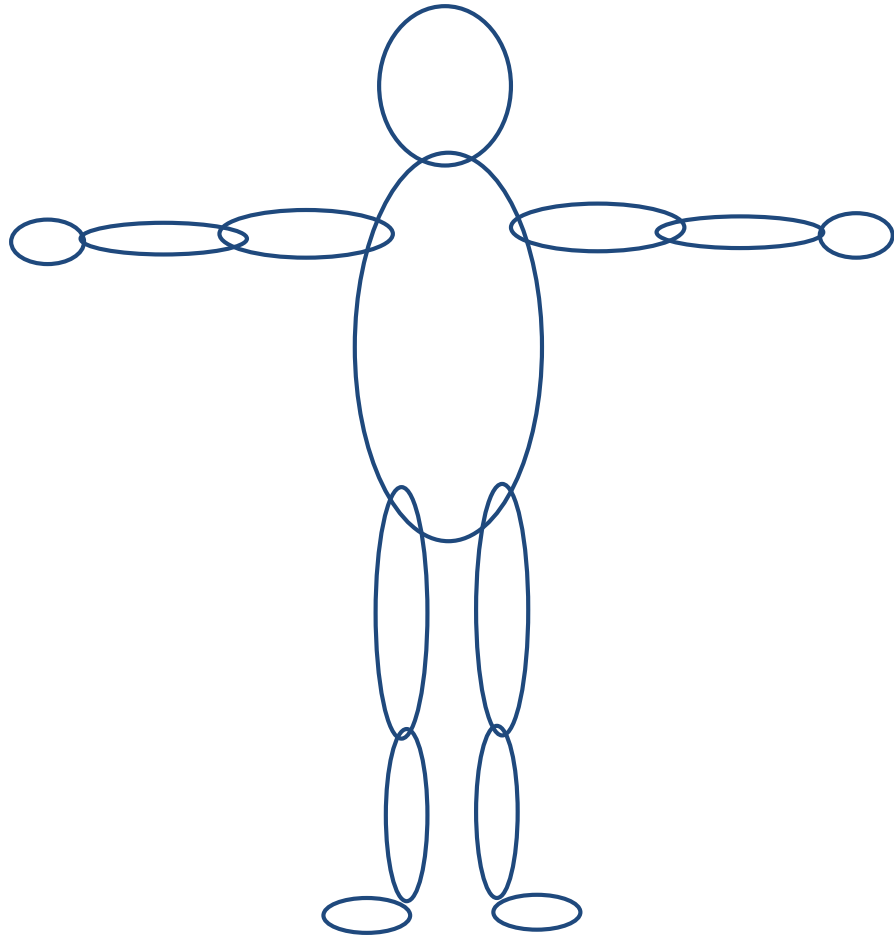


<http://tiny.cc/ift3355>

**IFT 3355: INFOGRAPHIE**  
**LES TRANSFORMATIONS**  
**COMPOSÉE.**  
**LES HIÉRARCHIES**

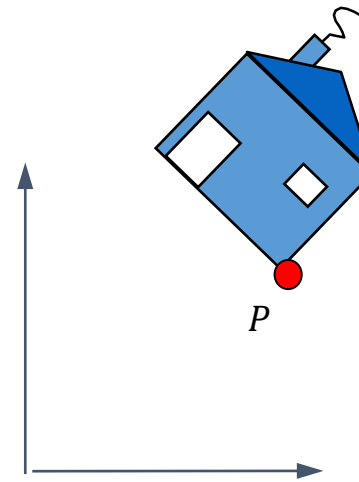
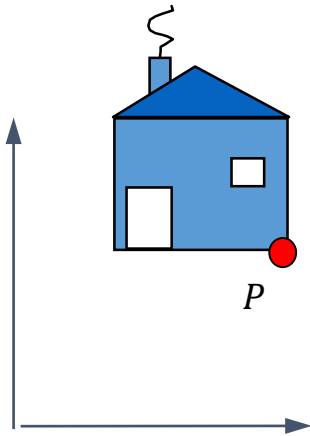
Livre de référence: G:I.4, 5.1



Mikhail Bessmeltsev

# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Quelle opération tourne  $XY$  de  $\theta < 0$  autour de  $P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ ?



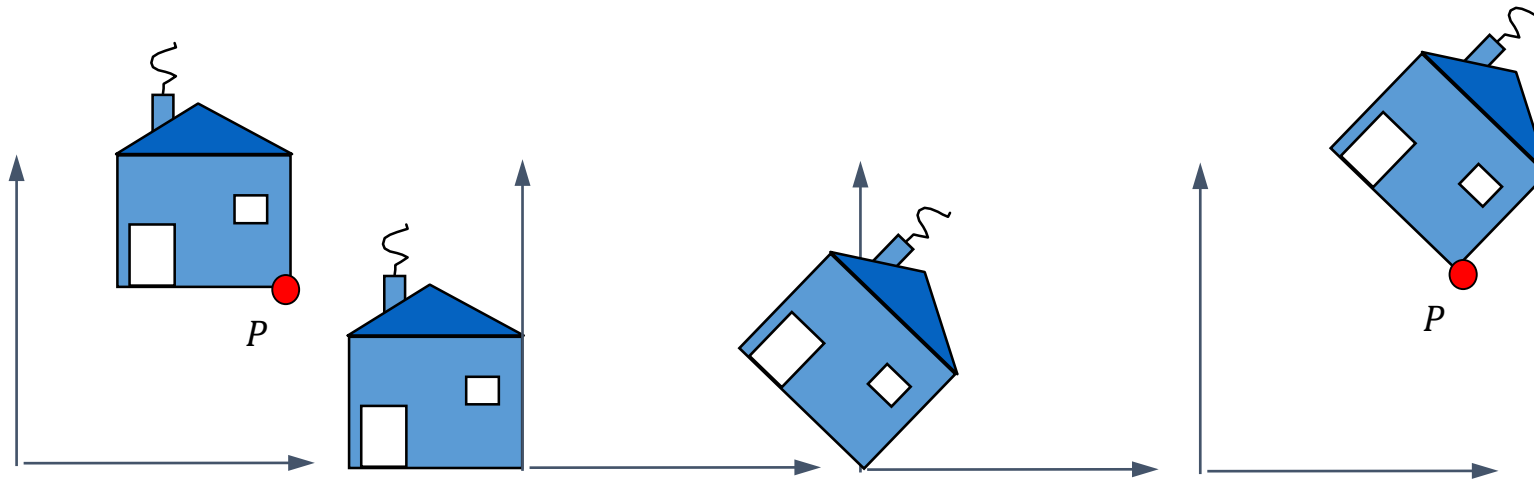
# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Quelle opération tourne  $XY$  de  $\theta < 0$  autour de  $P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ ?
- La réponse:
  - Déplacer  $P$  vers l'origine



# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Quelle opération tourne  $XY$  de  $\theta < 0$  autour de  $P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ ?
- La réponse:
  - Déplacer  $P$  vers l'origine
  - Tourner de  $\theta$  autour de l'origine
  - Retourner en arrière



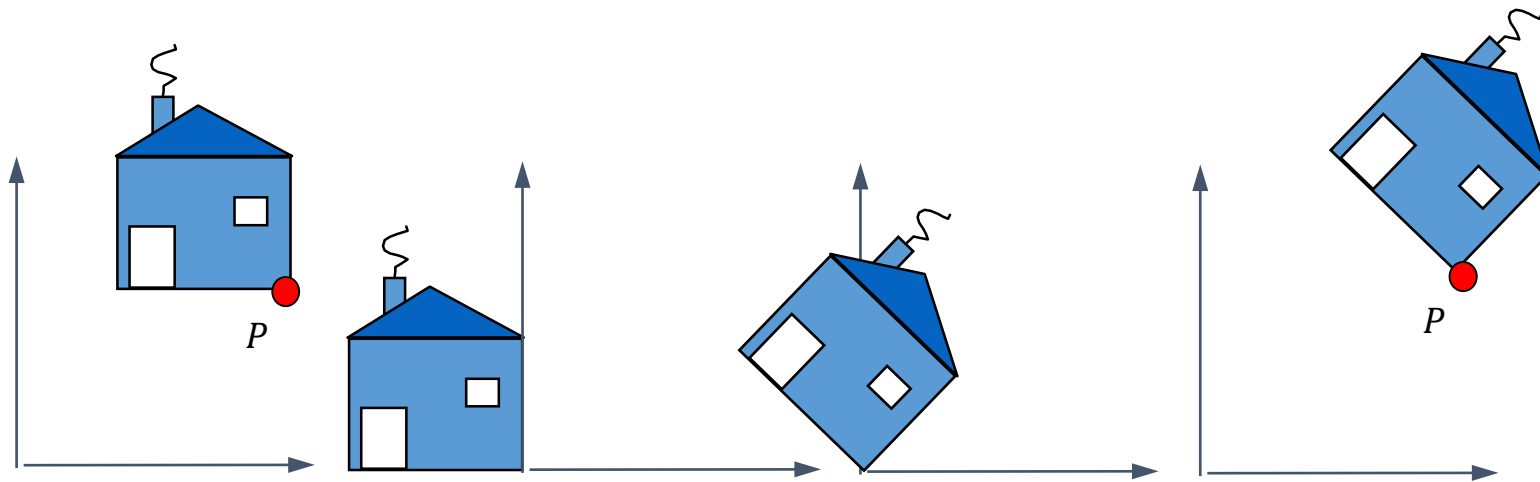
# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

$$T^{(p_x, p_y)} R^\theta T^{(-p_x, -p_y)} (V)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

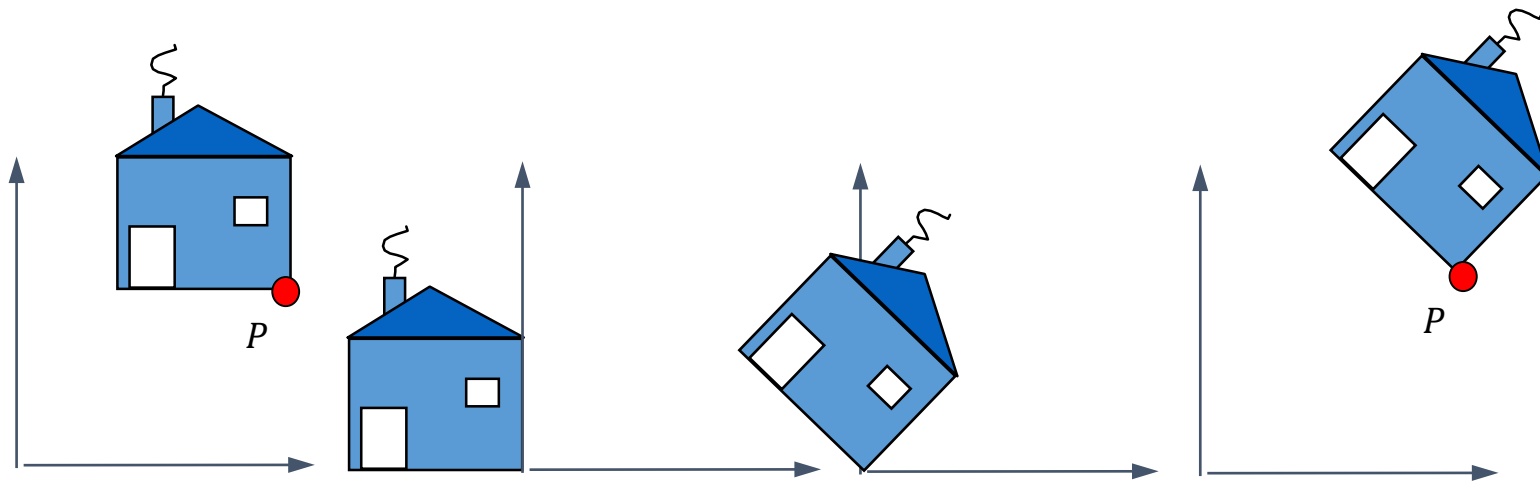
# DEUX INTERPRÉTATIONS

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \cdot (1 - \cos \theta) + p_y \cdot \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y \cdot (1 - \cos \theta) + p_x \cdot \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



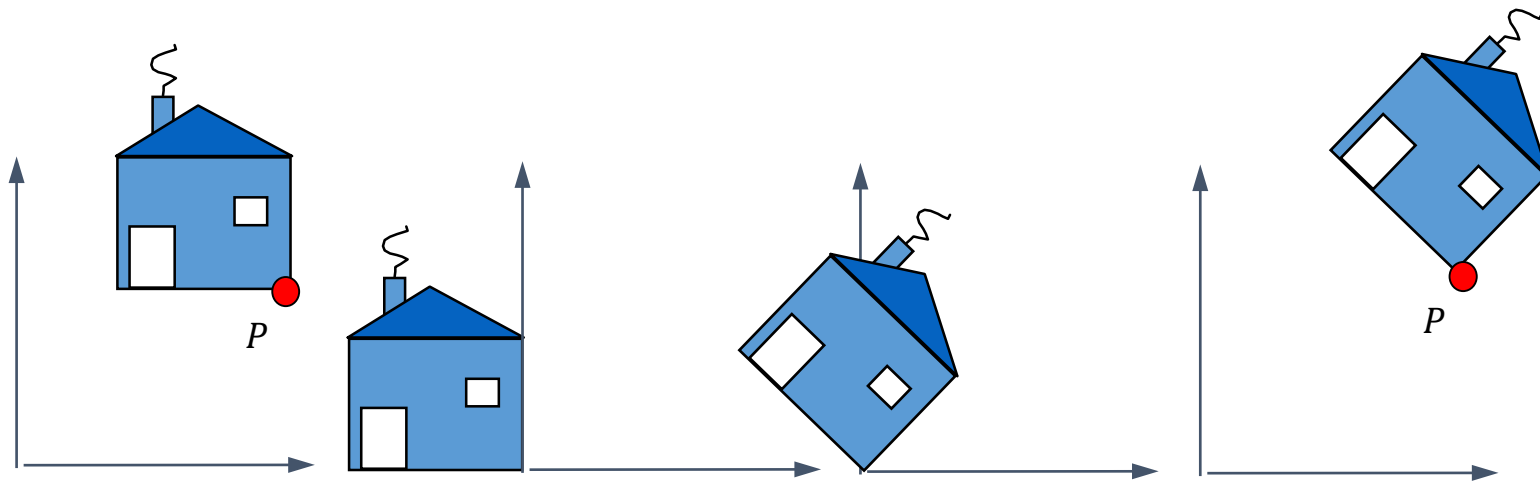
# TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \cdot (1 - \cos \theta) + p_y \cdot \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y \cdot (1 - \cos \theta) + p_x \cdot \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



# TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

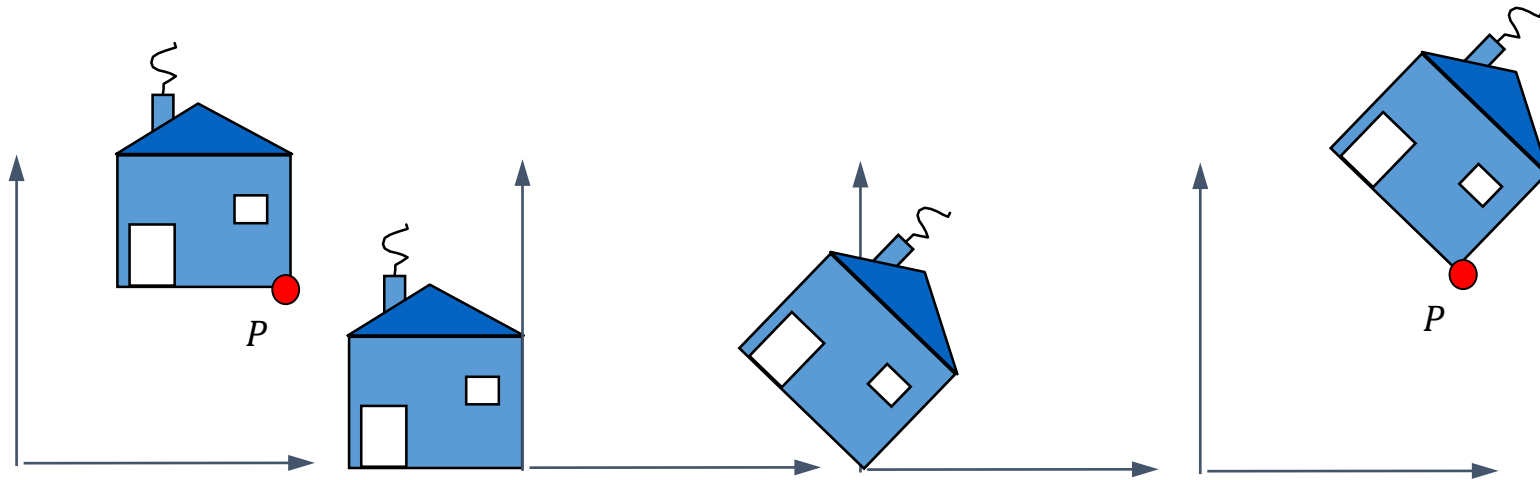
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \cdot (1 - \cos \theta) + p_y \cdot \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y \cdot (1 - \cos \theta) + p_x \cdot \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$





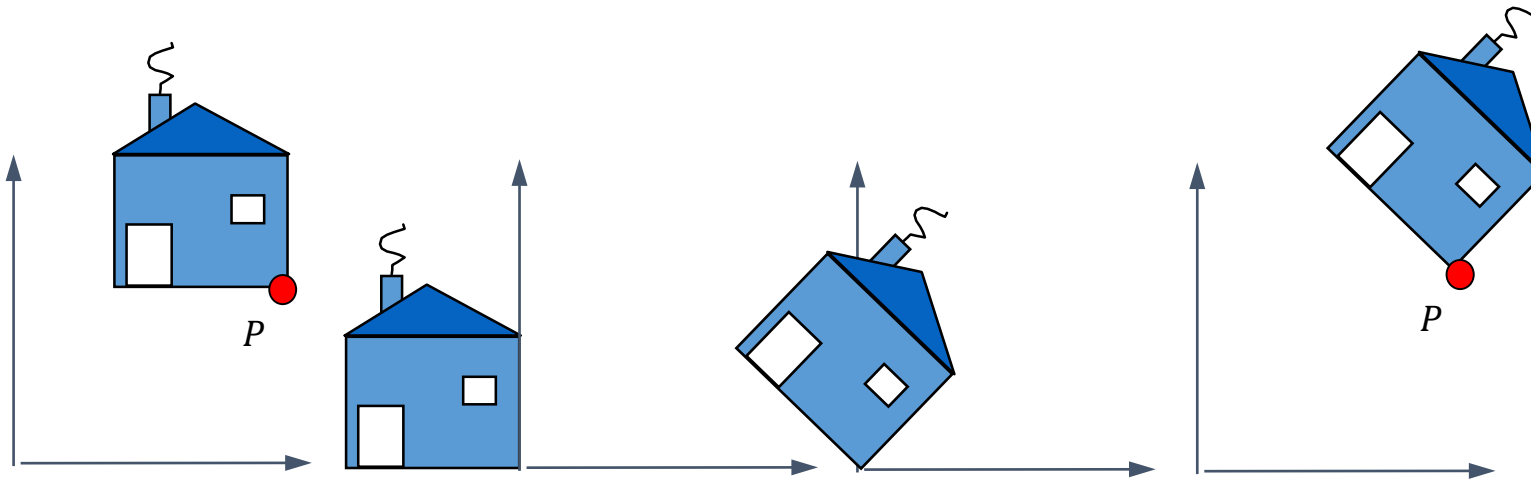
# TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \cdot (1 - \cos \theta) + p_y \cdot \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y \cdot (1 - \cos \theta) + p_x \cdot \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



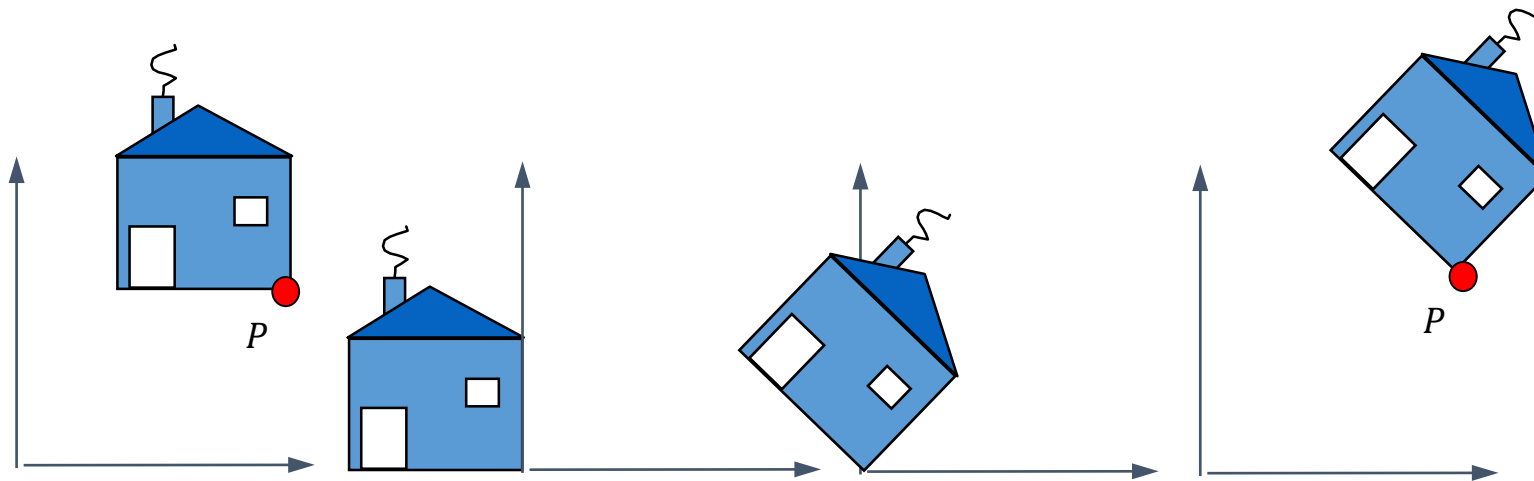
# TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \cdot (1 - \cos \theta) + p_y \cdot \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y \cdot (1 - \cos \theta) + p_x \cdot \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



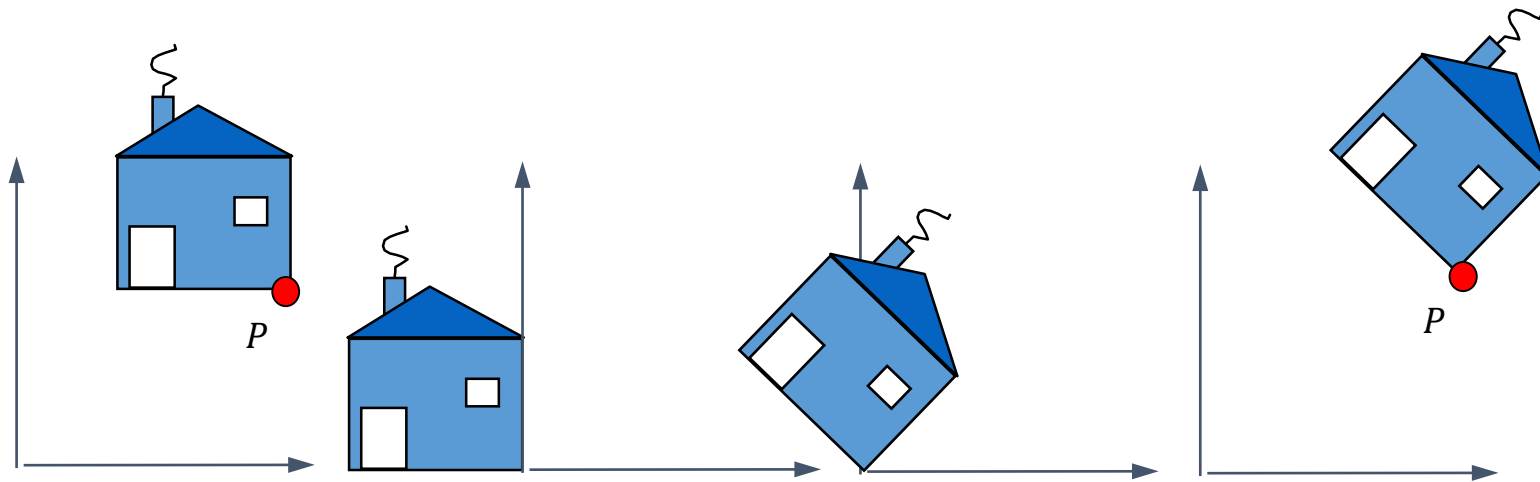
# TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \cdot (1 - \cos \theta) + p_y \cdot \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y \cdot (1 - \cos \theta) + p_x \cdot \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



# TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

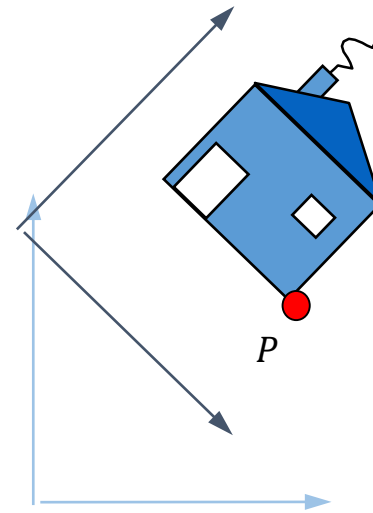
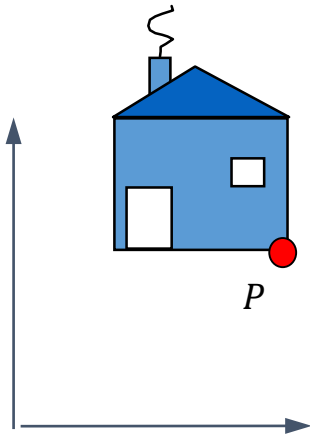
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \cdot (1 - \cos \theta) + p_y \cdot \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y \cdot (1 - \cos \theta) + p_x \cdot \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



# TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

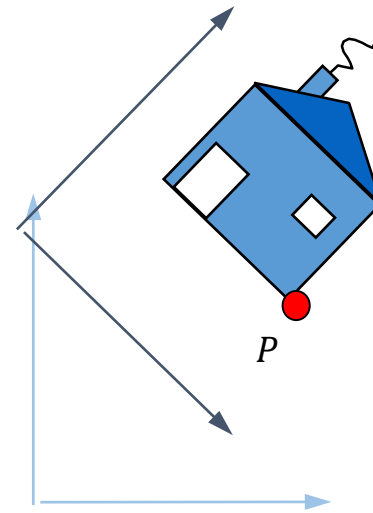
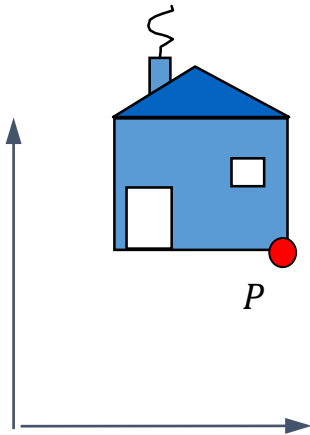
Les colonnes sont les nouveaux vecteurs de base (et la nouvelle origine)!

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} p_x \cdot (1 - \cos \theta) + p_y \cdot \sin \theta \\ p_y \cdot (1 - \cos \theta) + p_x \cdot \sin \theta \\ 1 \end{array} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



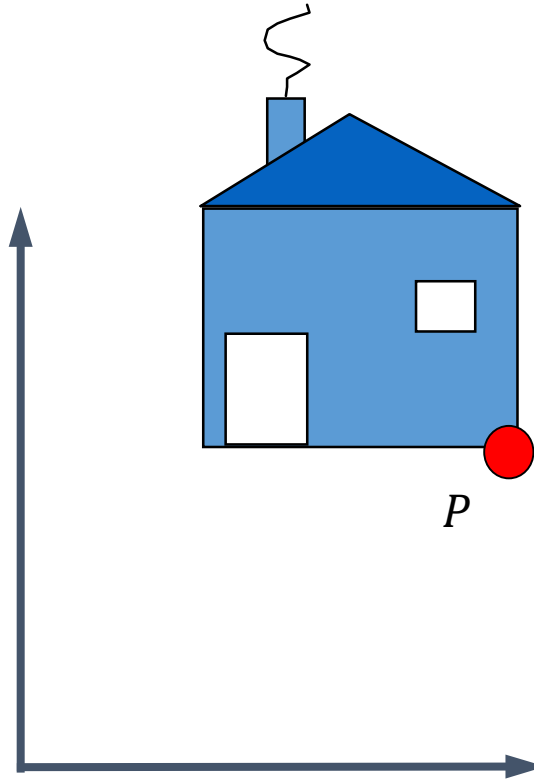
# TRANSFORMATION DE SYSTÈME DE COORDONNÉES

$$T(p_x, p_y) R^\theta T(-p_x, -p_y) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



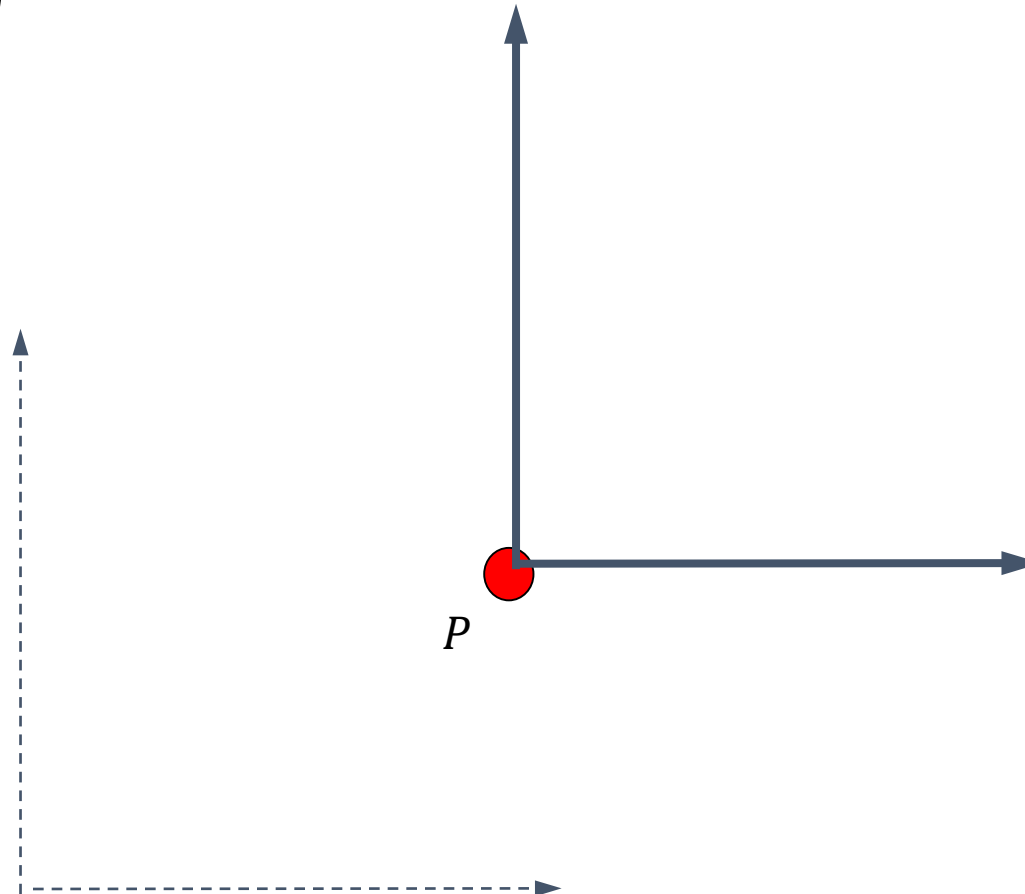
# TRANSFORMATION DE SYSTÈME DE COORDONNÉES

$$T(p_x, p_y) R^\theta T(-p_x, -p_y) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



# TRANSFORMATION DE SYSTÈME DE COORDONNÉES

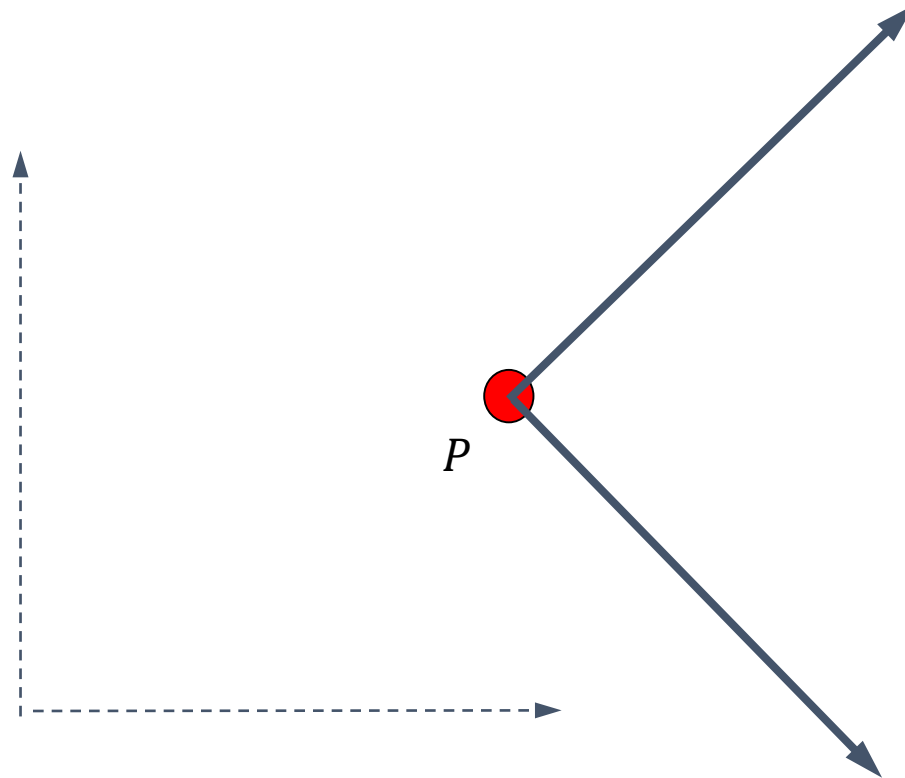
$$T(p_x, p_y) R^\theta T(-p_x, -p_y) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$





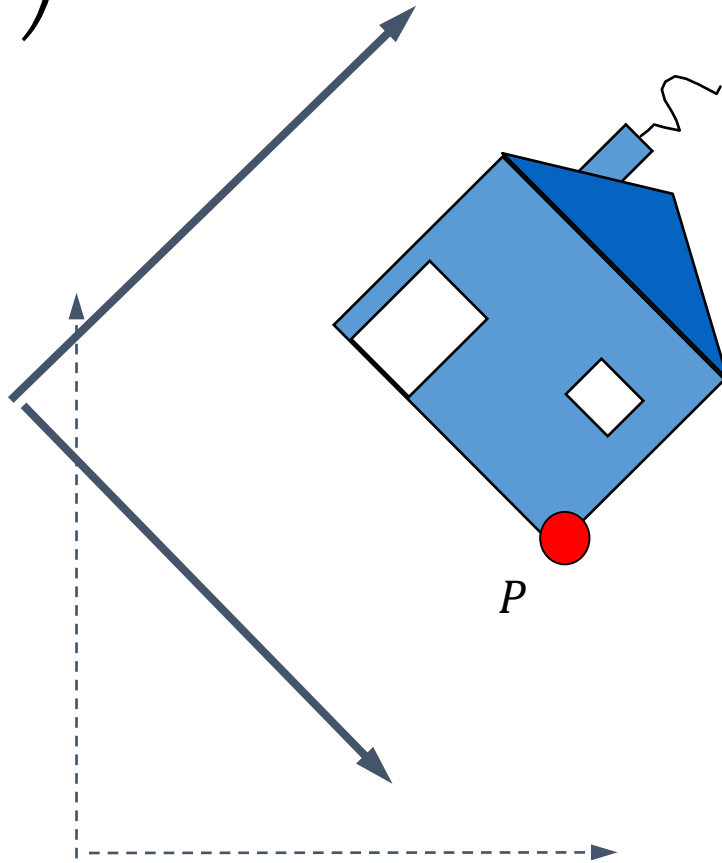
# TRANSFORMATION DE SYSTÈME DE COORDONNÉES

$$T(p_x, p_y) \mathbf{R}^\theta T(-p_x, -p_y) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



# TRANSFORMATION DE SYSTÈME DE COORDONNÉES

$$T(p_x, p_y) R^\theta T(-p_x, -p_y) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

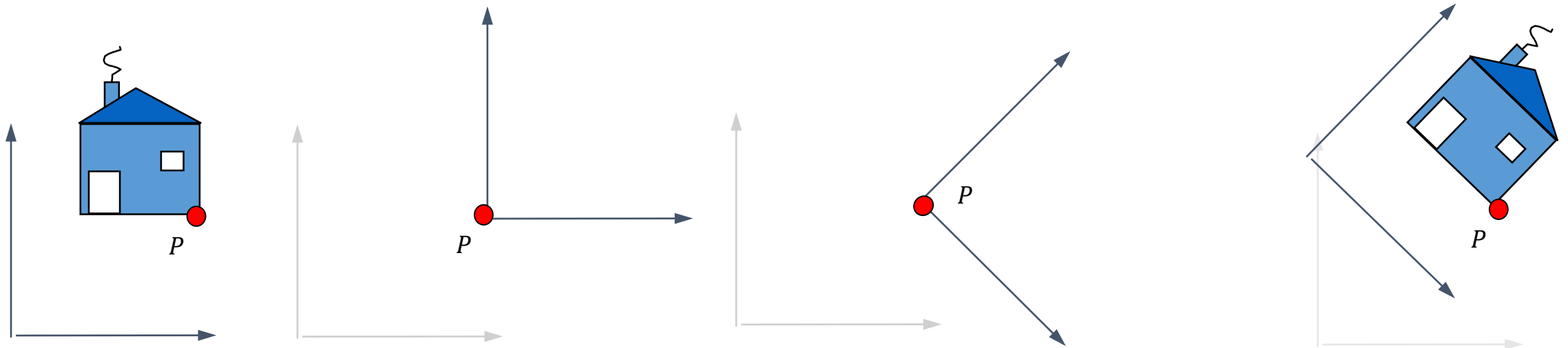


# TRANSFORMATION DE SYSTÈME DE COORDONNÉES

Le système de coordonnées  
du monde

Le système de coordonnées  
de l'objet

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ 1 \end{pmatrix} = T(p_x, p_y) R^\theta T(-p_x, -p_y) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



# DEUX INTERPRÉTATIONS DE LA COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

Le système de coordonnées  
du monde

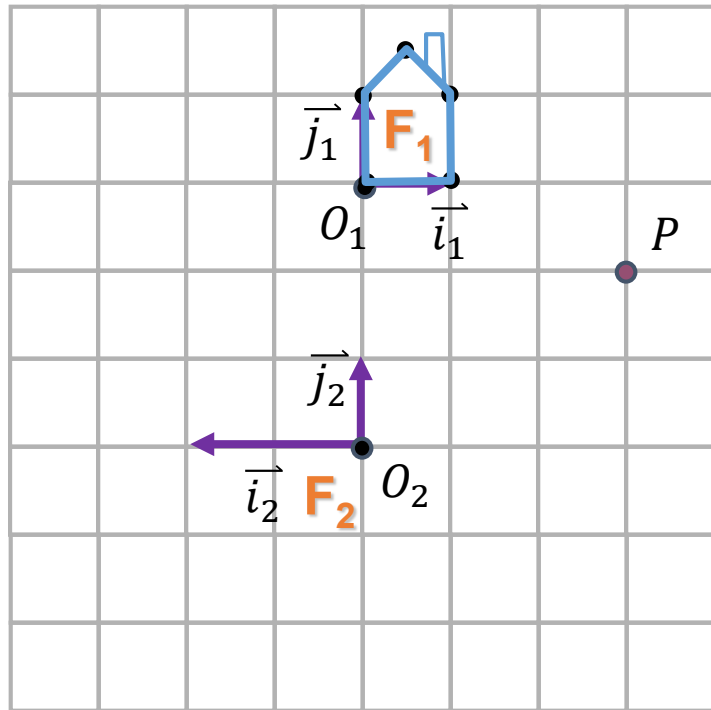
Le système de coordonnées  
de l'objet

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ 1 \end{pmatrix} = T(p_x, p_y) R^\theta T(-p_x, -p_y) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Lire de droite à gauche pour les transformations d'objets
- 2) Lire de gauche à droite pour les transformations du système de coordonnées

# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE

Les transformations comme changements de systèmes de coordonnées



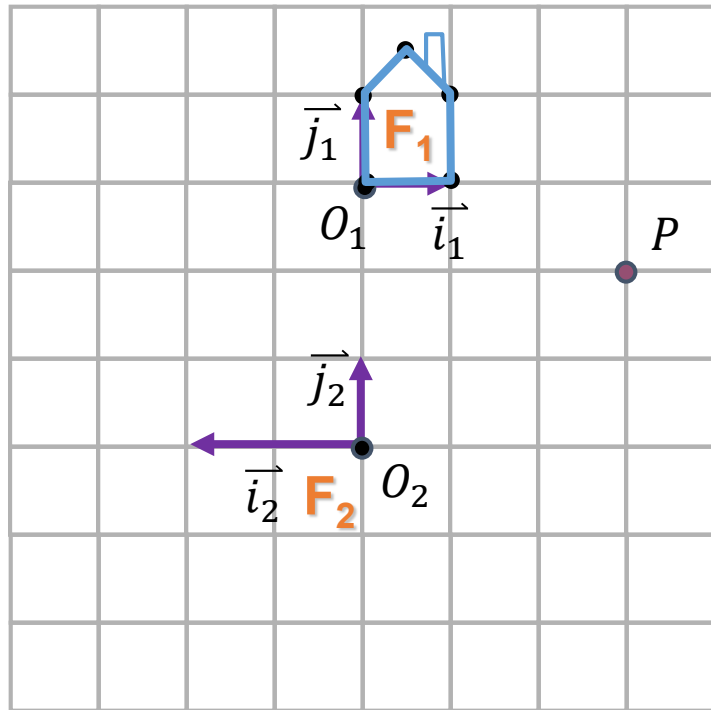
$$P = O_1 + x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}_2 + x_1 \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}_2 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2$$

# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE

Les transformations comme changements de systèmes de coordonnées



$$P = O_1 + x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1$$

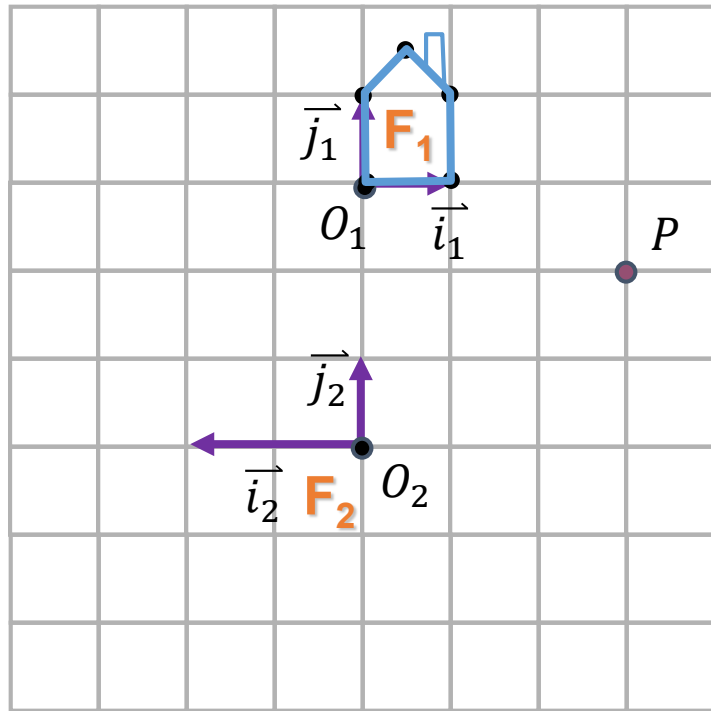
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}_2 + x_1 \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}_2 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE

Les transformations comme changements de systèmes de coordonnées



$$P = O_1 + x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1$$

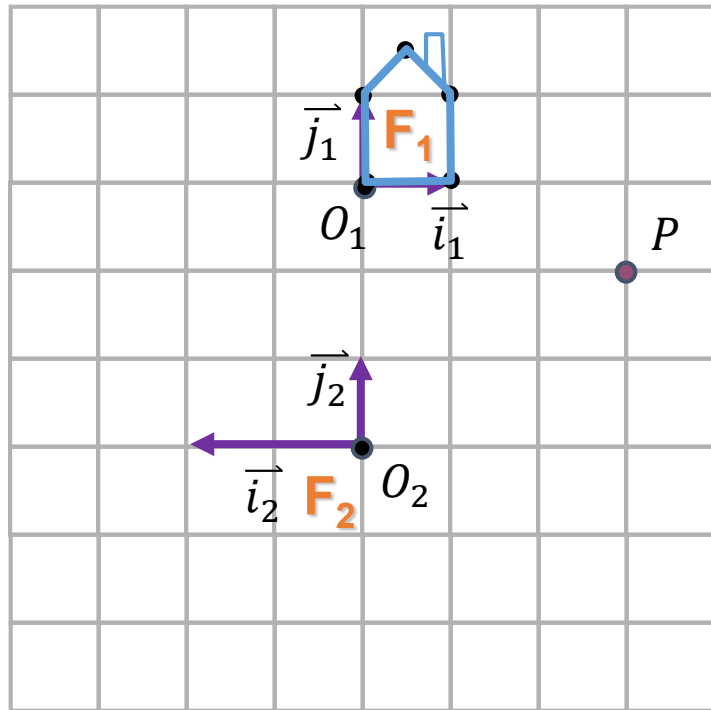
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}_2 + x_1 \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}_2 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE

Les transformations comme changements de systèmes de coordonnées



$$P = O_1 + x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1$$

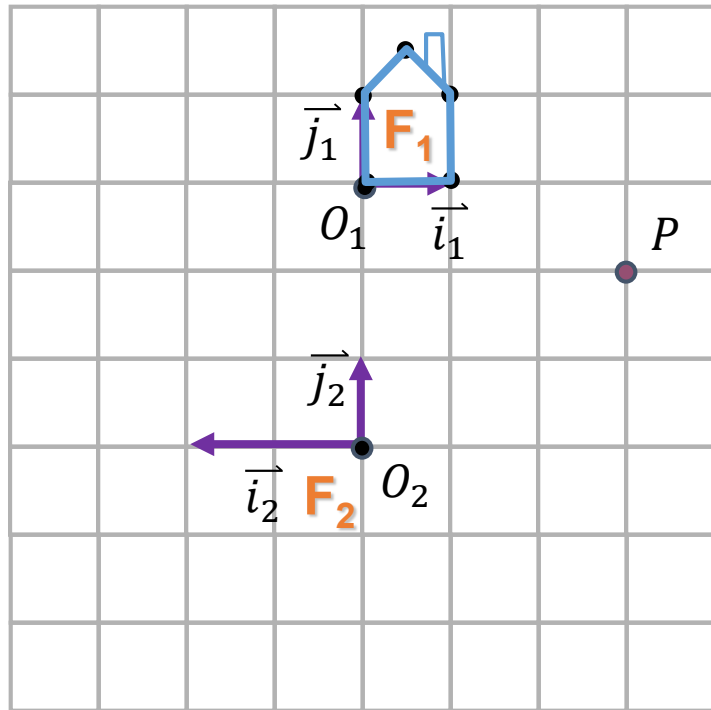
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}_2 + x_1 \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}_2 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE



$$P = O_1 + x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1$$

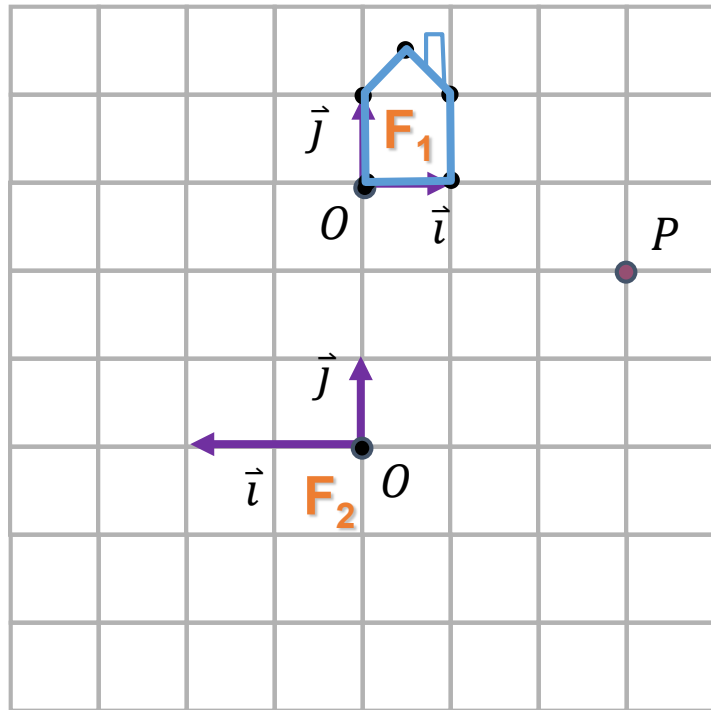
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}_2 + x_1 \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}_2 + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & O_1 \\ -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

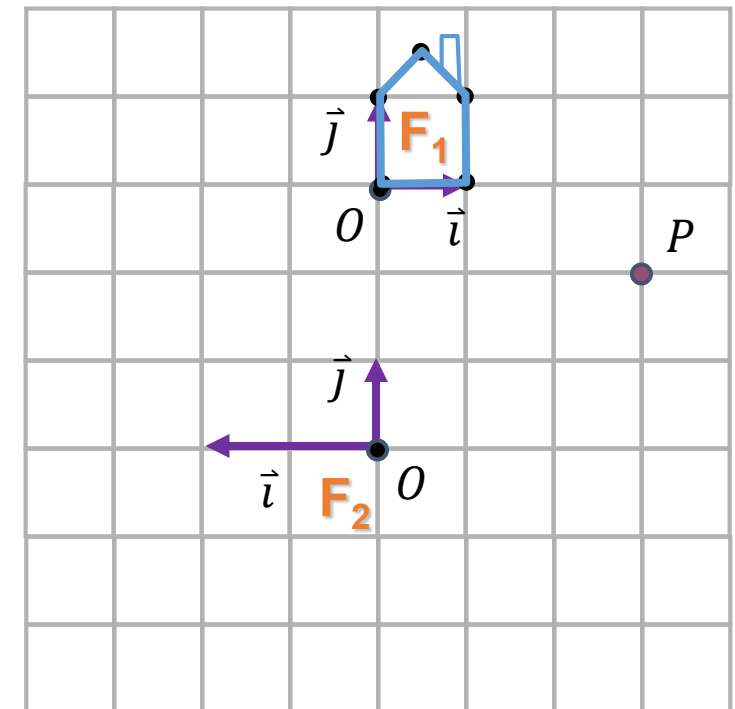
# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE

- Comment transformer  $F_2$  dans  $F_1$ ?



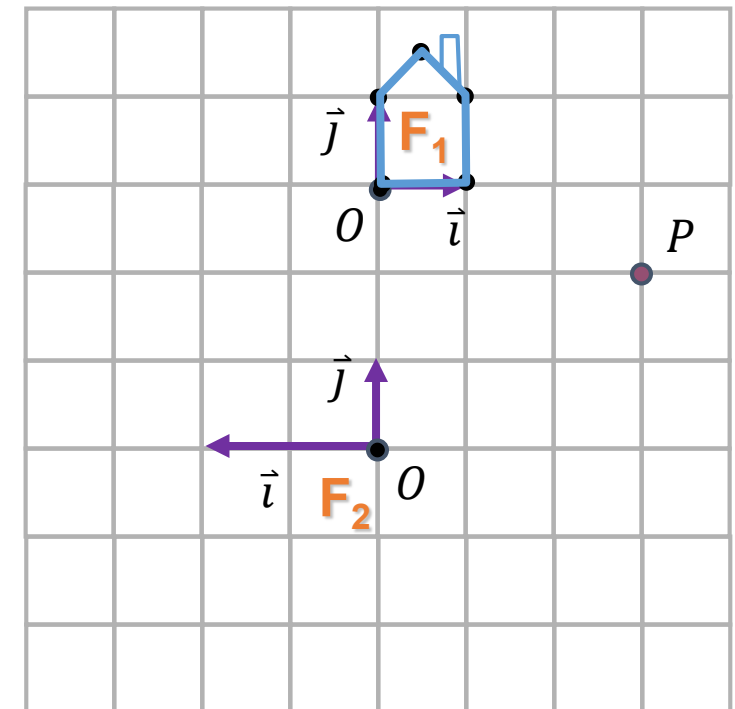
# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE

- Comment transformer  $F_2$  dans  $F_1$ ?
  - Changer l'échelle par  $(-0.5, 1)$



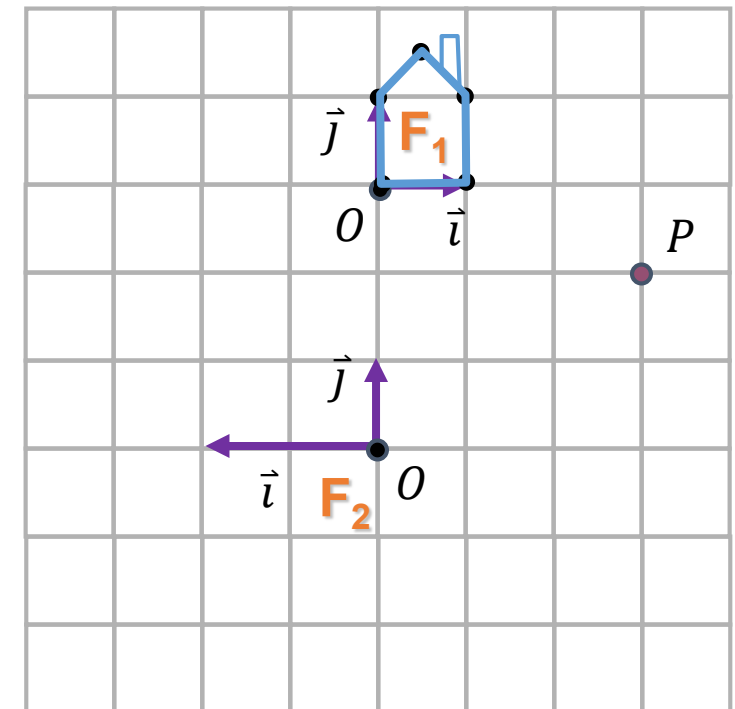
# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE

- Comment transformer  $F_2$  dans  $F_1$ ?
  - Changer l'échelle par  $(-0.5, 1)$
  - Ou tourner de  $-90$



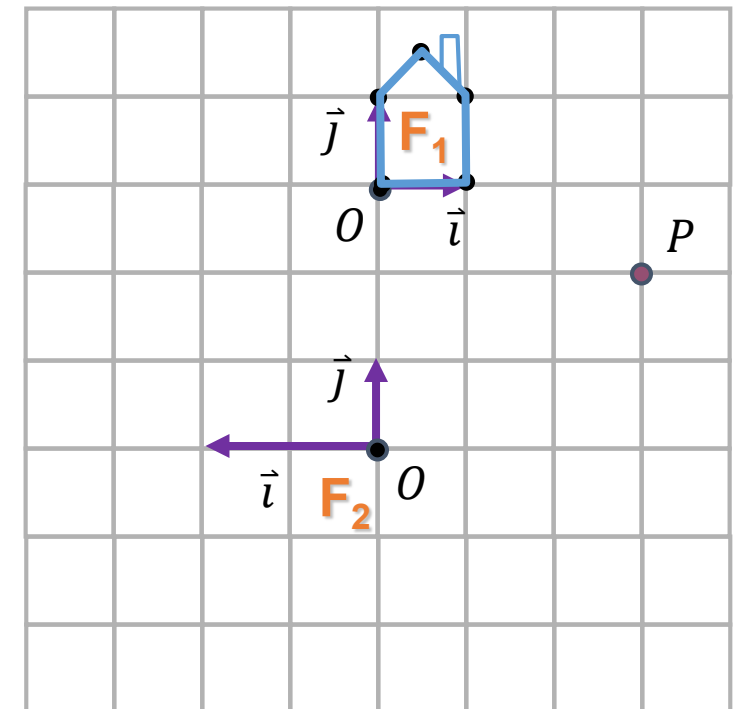
# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE

- Comment transformer  $F_2$  dans  $F_1$ ?
  - Changer l'échelle par  $(-0.5, 1)$
  - Déplacer par  $(0,3)$



# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE

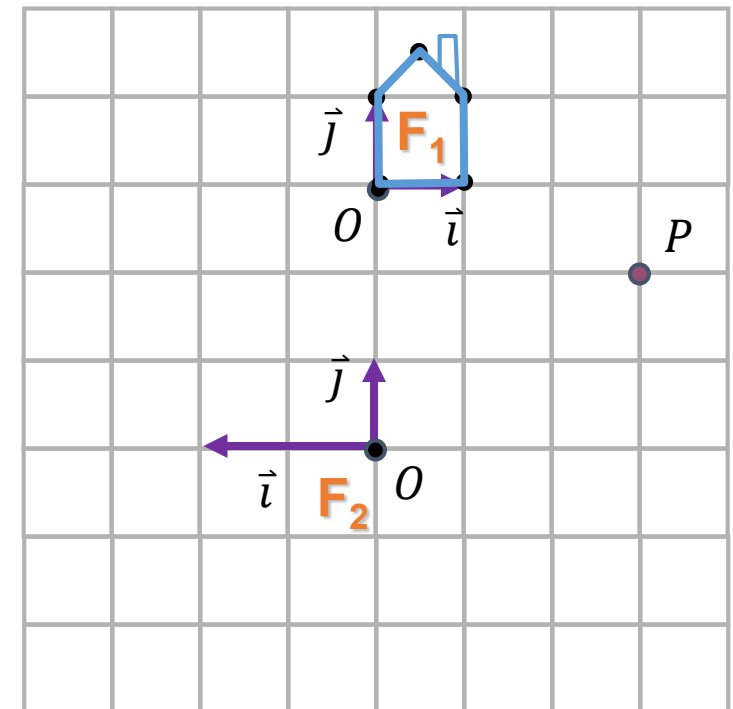
- Comment transformer  $F_2$  dans  $F_1$ ?
  - Changer l'échelle par  $(-0.5, 1)$
  - Déplacer par  $(0,3)$



# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE

- Comment transformer  $F_2$  dans  $F_1$ ?
  - Changer l'échelle par  $(-0.5, 1)$
  - Déplacer par  $(0,3)$

$$M = M_{scale} \cdot M_{translate}$$

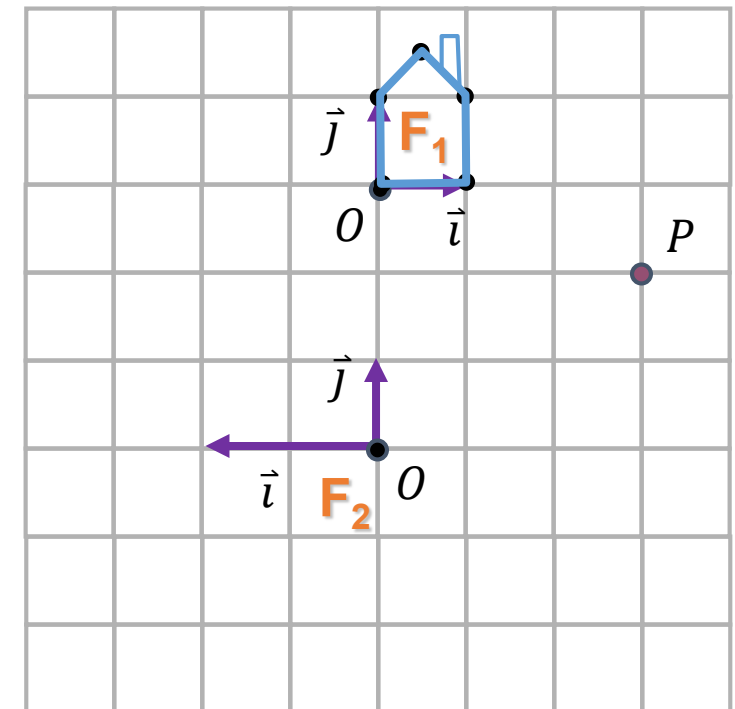


# LES TRANSFORMATIONS - EXEMPLE

- Comment transformer  $F_2$  dans  $F_1$ ?
  - Changer l'échelle par  $(-0.5, 1)$
  - Déplacer par  $(0,3)$

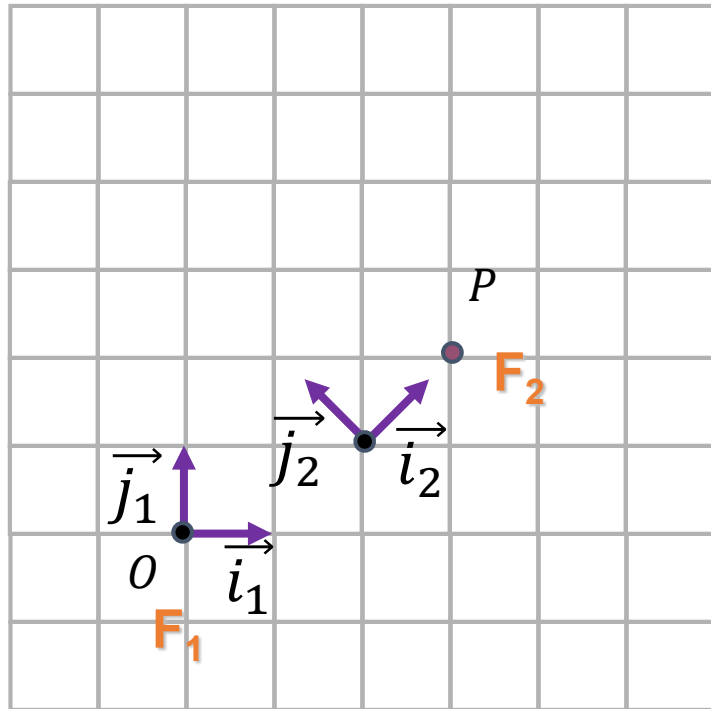
$$M = M_{scale} \cdot M_{translate}$$

$$M = M_{scale} \cdot M_{translate} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

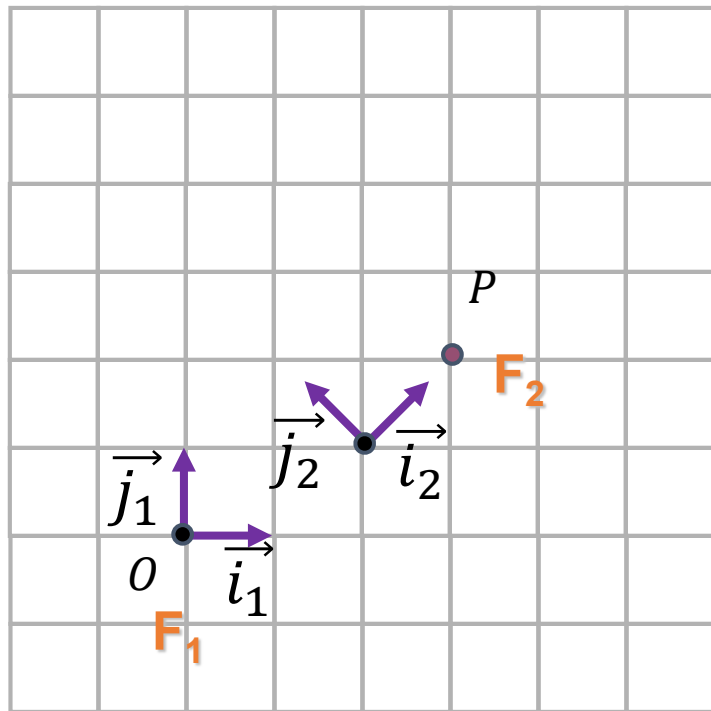




# UN AUTRE EXEMPLE

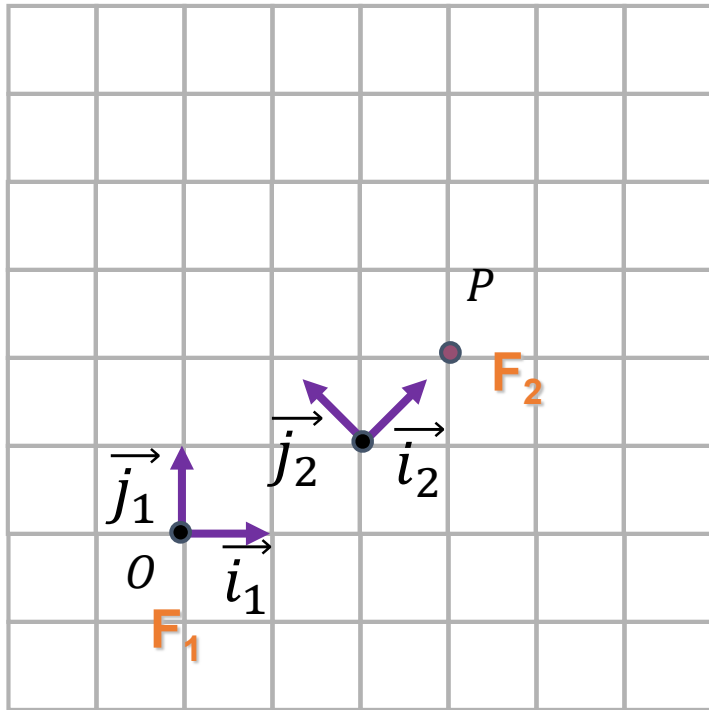


# UN AUTRE EXEMPLE



$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

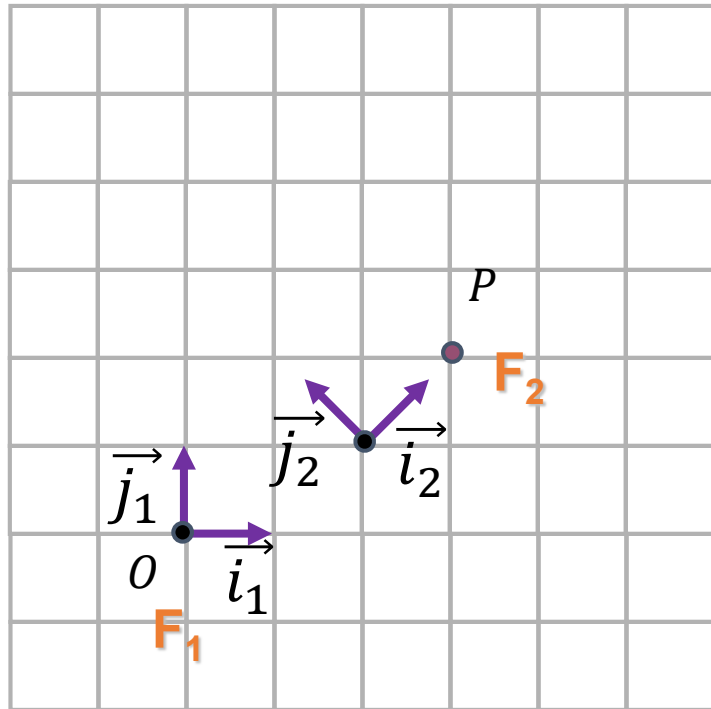
# UN AUTRE EXEMPLE



$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# UN AUTRE EXEMPLE



$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

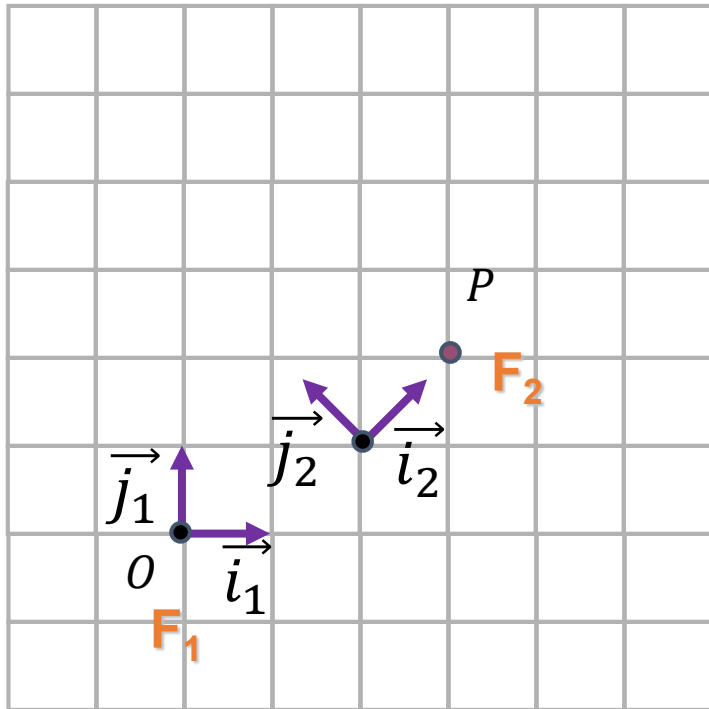
Convertir les coordonnées de 2 à 1

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{21} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# UN AUTRE EXEMPLE

Pour convertir un point dans le système 2 en système 1,  
penser dans l'autre direction:  
Comment convertir le cadre de coordonnées 1 en 2?

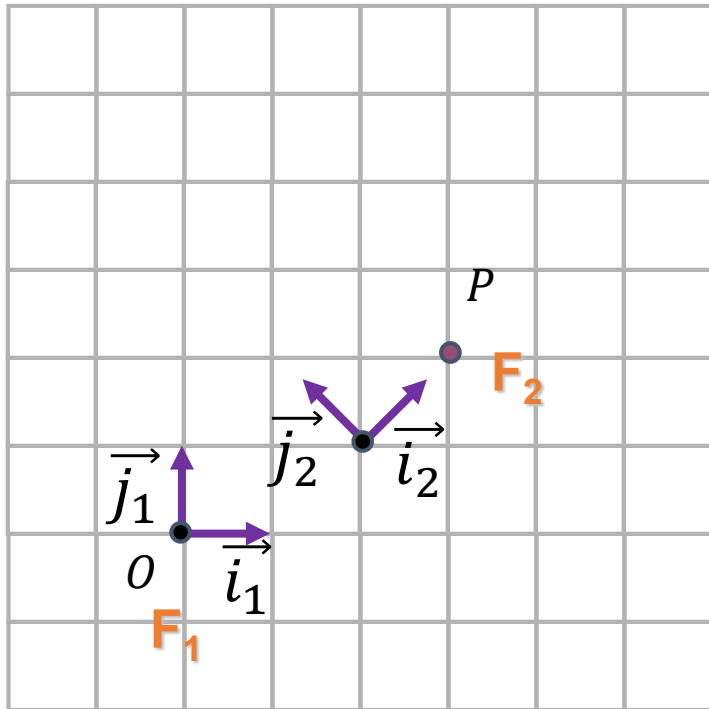


# UN AUTRE EXEMPLE

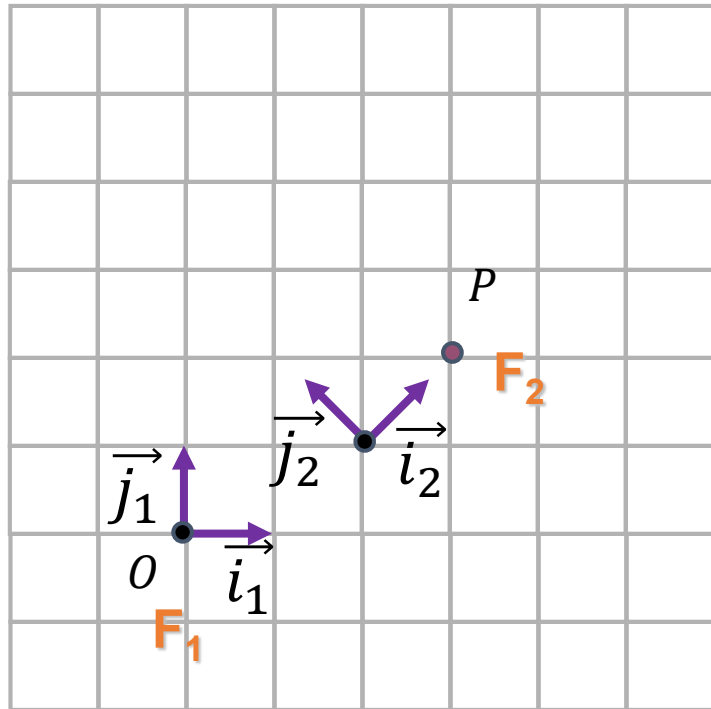
Pour convertir un point dans le système 2 en système 1,  
pensons dans l'autre direction:

Comment convertir le cadre de coordonnées 1 en 2?

$$M_{21} = Tr_{(2,1)} \cdot Rot_{\pi/4}$$



# UN AUTRE EXEMPLE



Pour convertir un point dans le système 2 en système 1,  
pensons dans l'autre direction:

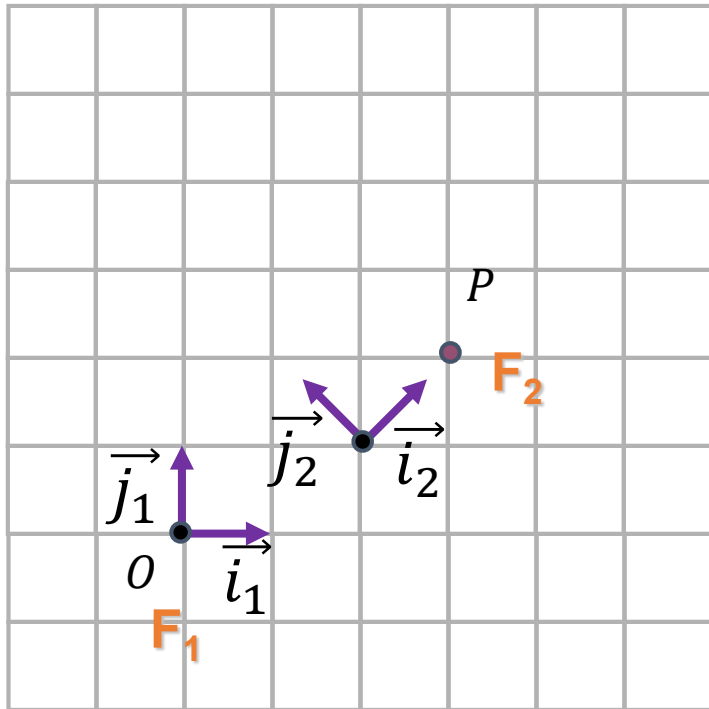
Comment convertir le cadre de coordonnées 1 en 2?

$$M_{21} = Tr_{(2,1)} \cdot Rot_{\pi/4} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# UN AUTRE EXEMPLE

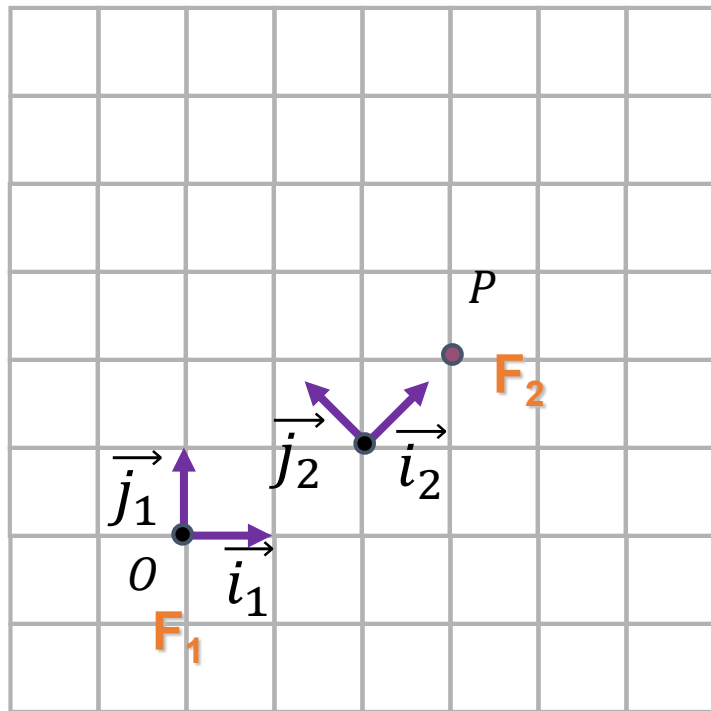
Pour convertir un point dans le système 2 en système 1,  
pensons dans l'autre direction:  
Comment convertir le cadre de coordonnées 1 en 2?



$$M_{21} = Tr_{(2,1)} \cdot Rot_{\pi/4} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

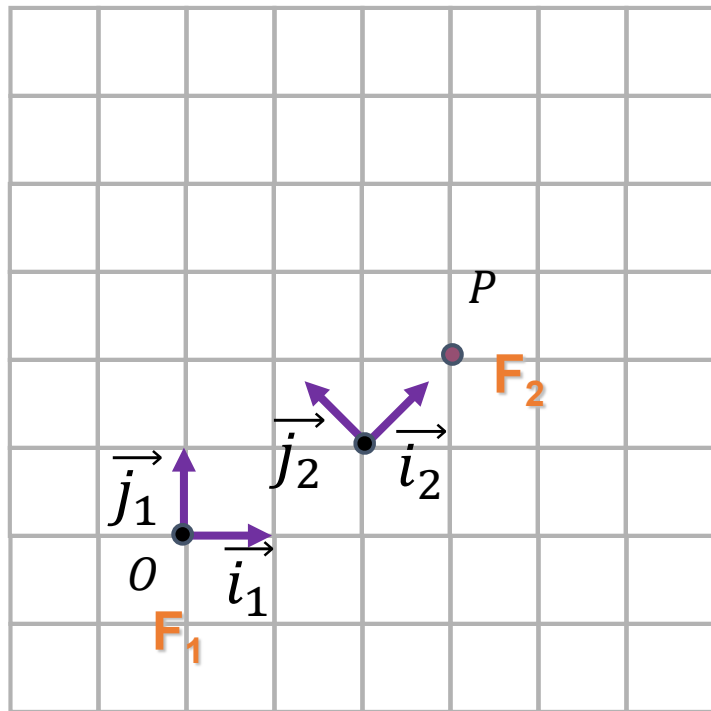


# UN AUTRE EXEMPLE



Comme vous le savez,  
la multiplication des matrices n'est pas commutative  
 $AB \neq BA$

# UN AUTRE EXEMPLE



Comme vous le savez,  
la multiplication des matrices n'est pas commutative

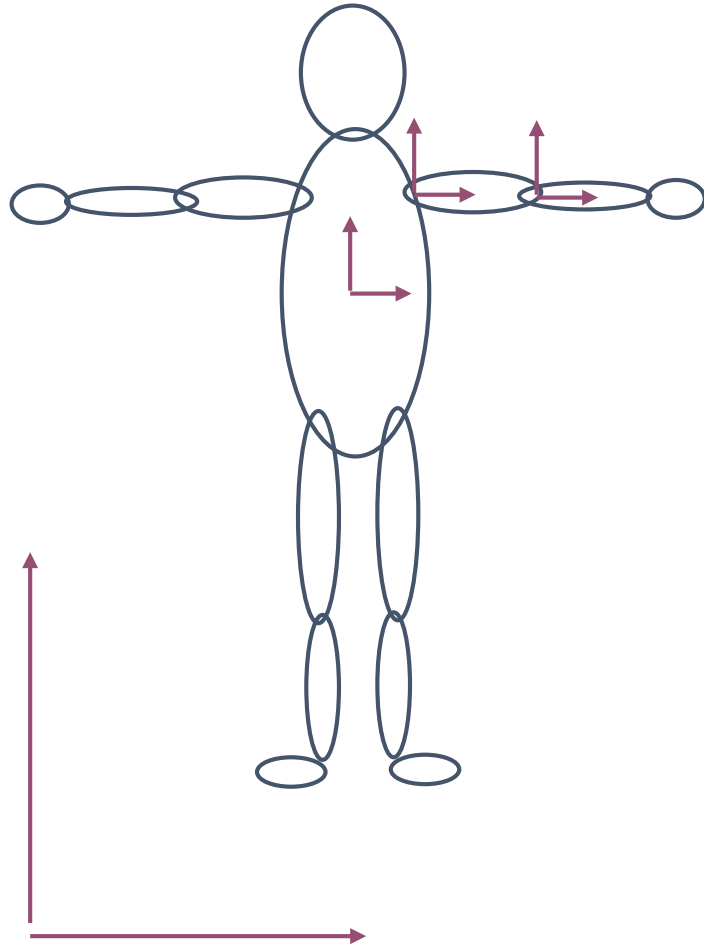
$$AB \neq BA$$

$$M_{21} = Tr_{(2,1)} \cdot Rot_{\pi/4} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rot_{\pi/4} \cdot Tr_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & \mathbf{1/\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \mathbf{3/\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# LA HIÉRARCHIE DE TRANSFORMATIONS

# LA HIÉRARCHIE DE TRANSFORMATIONS

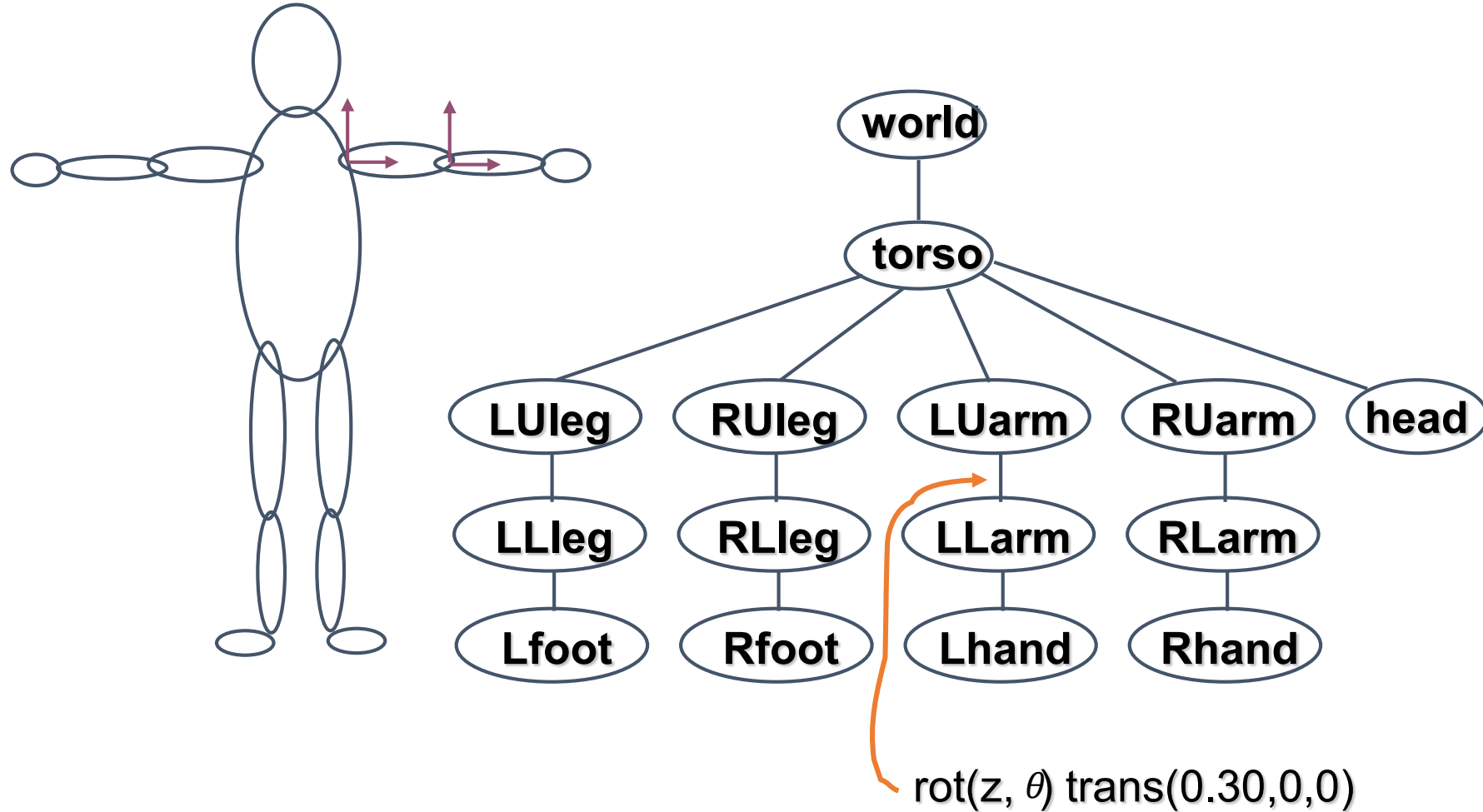


- Il y a plusieurs systèmes de coordonnées dans une scène
  - Ils sont souvent liés
    - Parties du corps
- Les définir indépendamment est sujet à des erreurs
- La solution: La hiérarchie de transformations





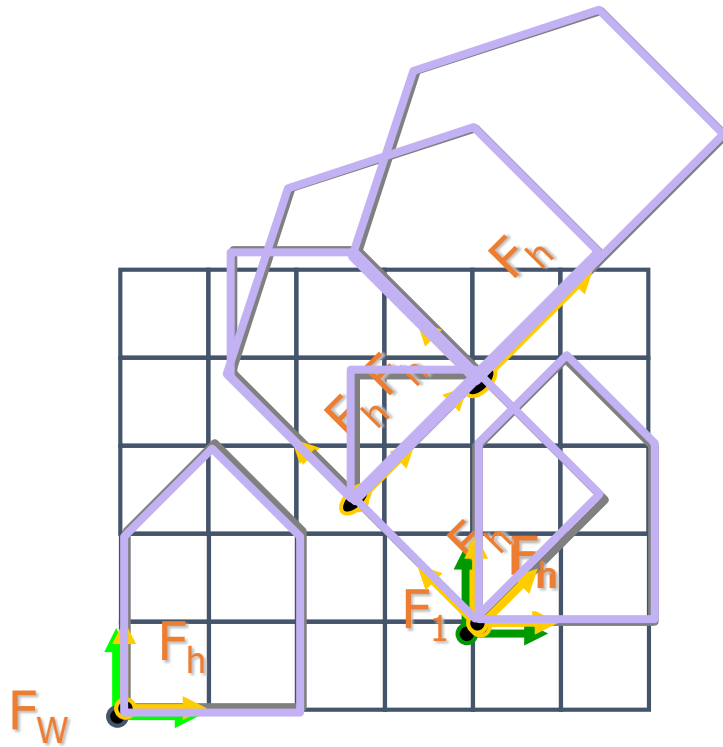
# LA HIÉRARCHIE DE TRANSFORMATIONS







# UNE QUESTION



```
M.setIdentity();
```

```
1) House1.matrix = M;
```

```
2) M = M*Translation(4,1,0);  
House2.matrix = M;
```

```
3) M = M*Rotation(pi/4,0,0,1);  
House3.matrix = M;
```

```
4) M = M*Translation(0,2,0);  
House4.matrix = M;
```

```
5) M = M*Scale(2,1,1);  
House5.matrix = M;
```

```
6) M = M*Translation(1,0,0);  
House6.matrix = M;
```

# QUE SE PASSERA-T-IL SI...

- On fait plusieurs translations l'une après l'autre?
- Plusieurs changements d'échelle?
- Plusieurs rotations?

# DEVOIRS

- La date limite pour D1 est le jeudi 30 janvier
- D2 sera disponible le même jour
  - L'animation de personnages!
  - Plus de matrices de transformations!