

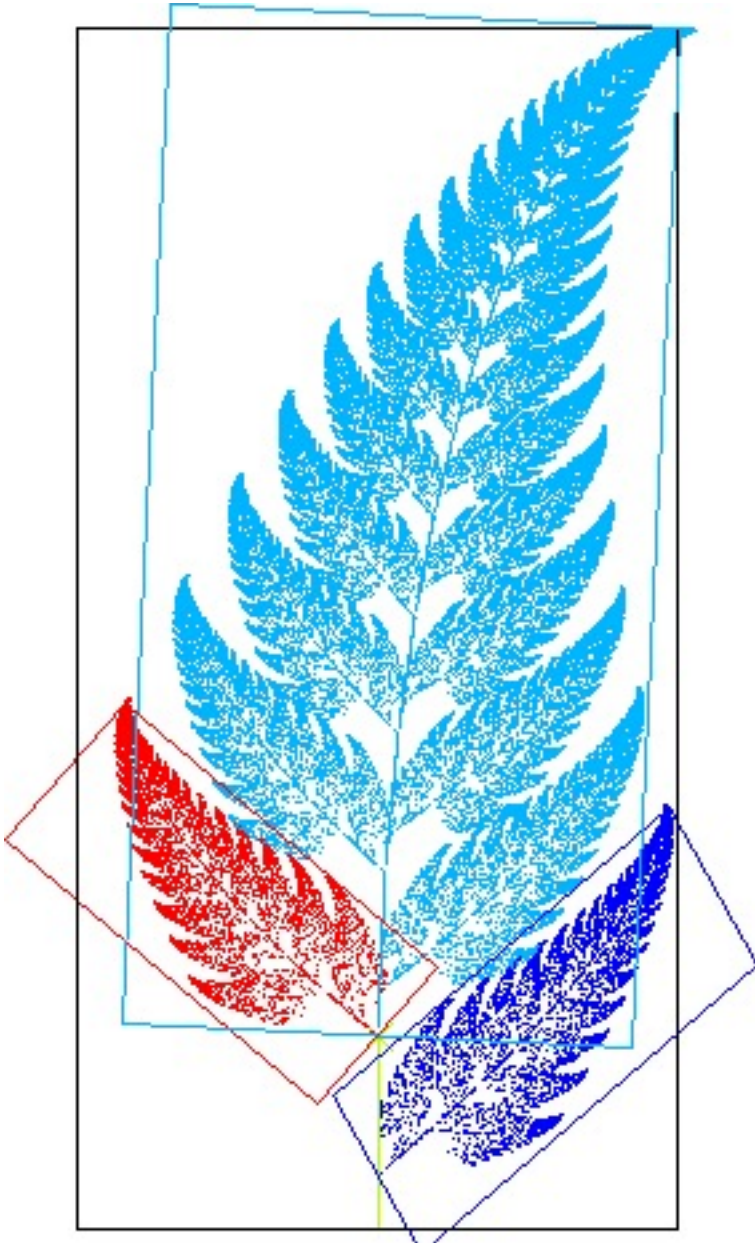
<http://tinyurl.com/ift3355>

IFT 3355: INFOGRAPHIE

LES TRANSFORMATIONS

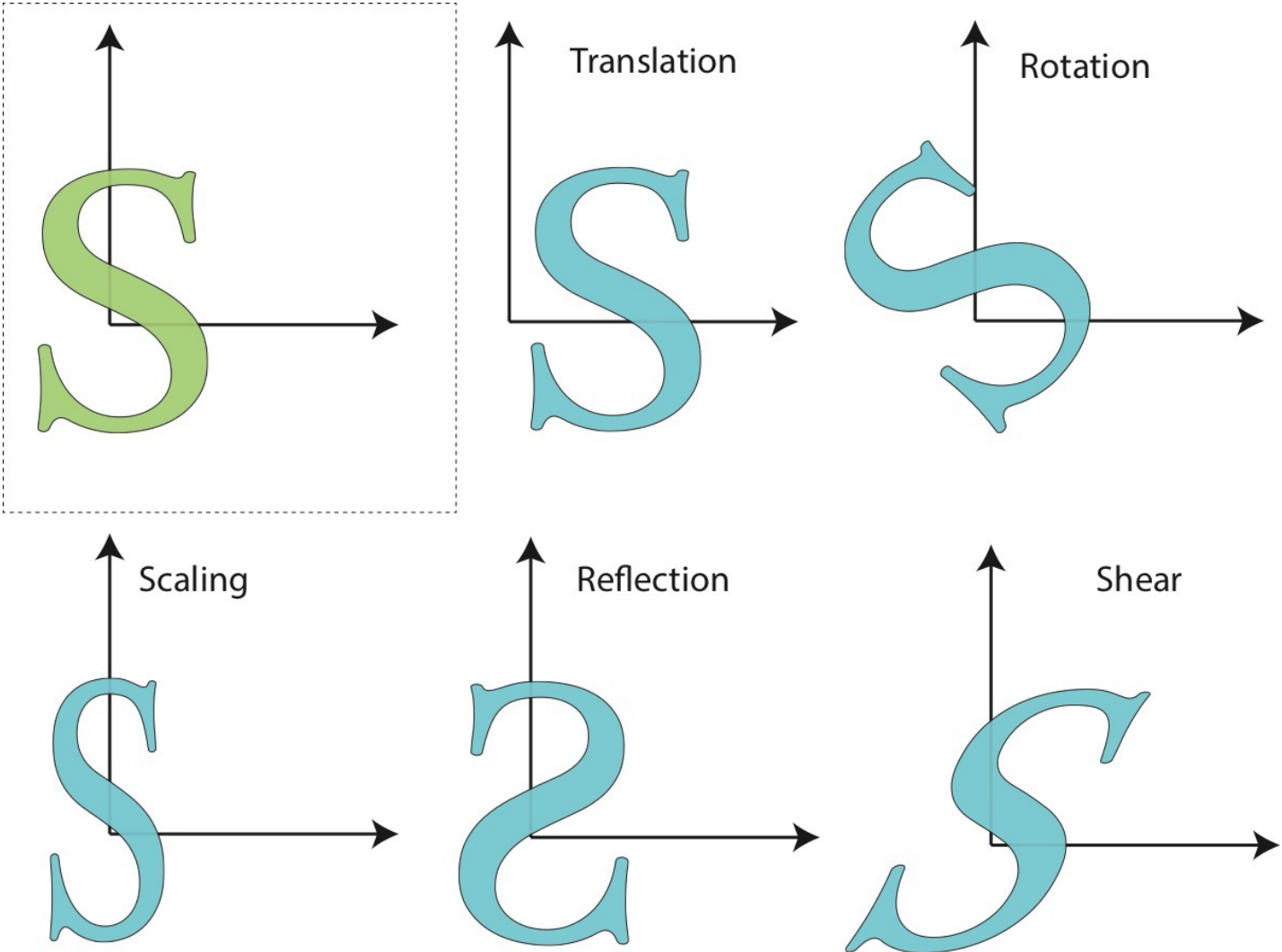
AFFINES

Livre de référence: G:I.3, S:6



Mikhail Bessmeltsev

LES TRANSFORMATIONS QU'ON VEUT



MULTIPLICATION DES MATRICES

- La multiplication des matrices satisfait ces exigences:

additivité

$$L(u) + L(v) = L(u + v)$$

$$M(u + v) = Mu + Mv$$

homogénéité de degré 1

$$\alpha \cdot L(u) = L(\alpha u)$$

$$\alpha \cdot Mu = M \cdot (\alpha u)$$

- Donc toutes les transformations représentées par une matrice sont LINÉAIRES

TRANSLATION

- On a un problème
- Translation:

$$L: u \rightarrow u + b$$
$$L(0) = b \neq 0$$

La translation n'est pas une transformation linéaire et ne peut pas être représentée par une matrice dans cet espace.

TRANSLATION

- On a un problème
- Translation:

$$L: u \rightarrow u + b$$
$$L(0) = b \neq 0$$

La translation n'est pas une transformation linéaire et ne peut pas être représentée par une matrice dans cet espace.

On a besoin de plus de puissance

LES TRANSFORMATIONS GÉNÉRALES

On a besoin de représenter toutes les transformations linéaires + la translation

Des idées?

LES TRANSFORMATIONS GÉNÉRALES

On a besoin de représenter toutes les transformations linéaires + la translation

Des idées?

$$T(\mathbf{v}) = M\mathbf{v} + \mathbf{b}$$

L'UNIFICATION

- On veut une méthode plus universelle:

$$T(v) = Mv$$

Ensuite, on pourrait facilement combiner des transformations différentes ou les inverser

Ajoutons une coordonnée artificielle au vecteur: $v = (x, y, 1)$

Ensuite, quelle doit être M ?

LA MATRICE AUGMENTÉE

$$M_{2 \times 2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

On ne l'a pas beaucoup changée, n'est-ce pas?

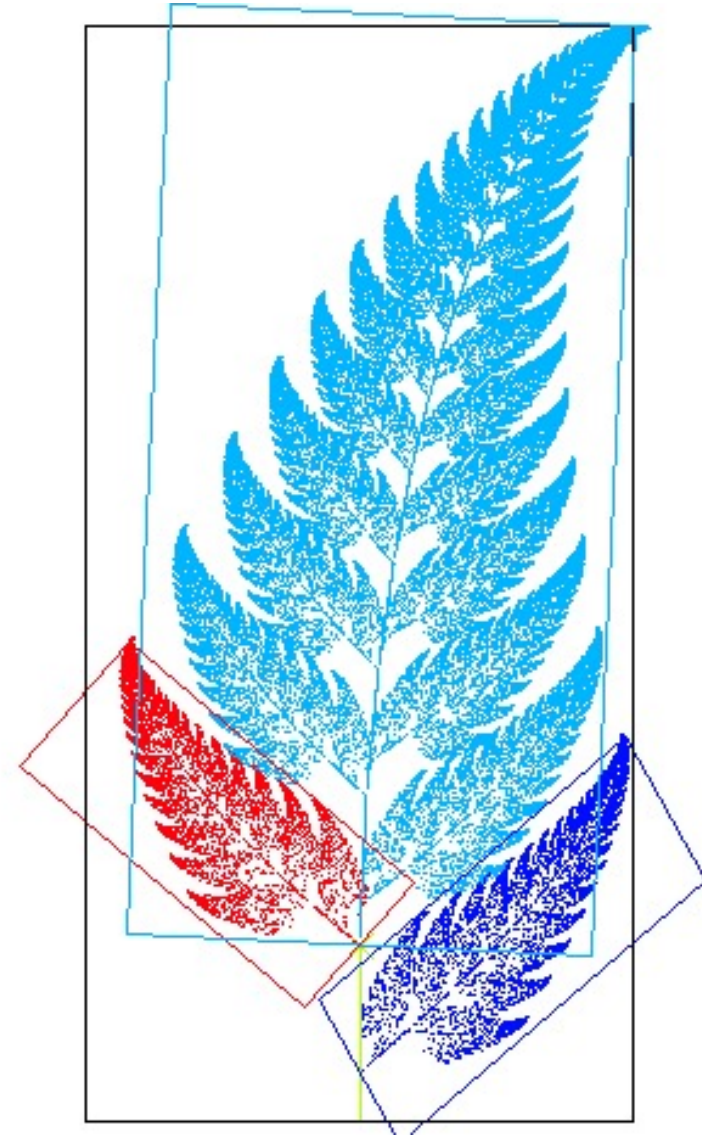
LA MATRICE AUGMENTÉE

$$\begin{bmatrix} M_{2 \times 2} & \begin{matrix} b_x \\ b_y \end{matrix} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + b_x \\ y' + b_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{b}$$

Translation 

LES TRANSFORMATIONS AFFINES

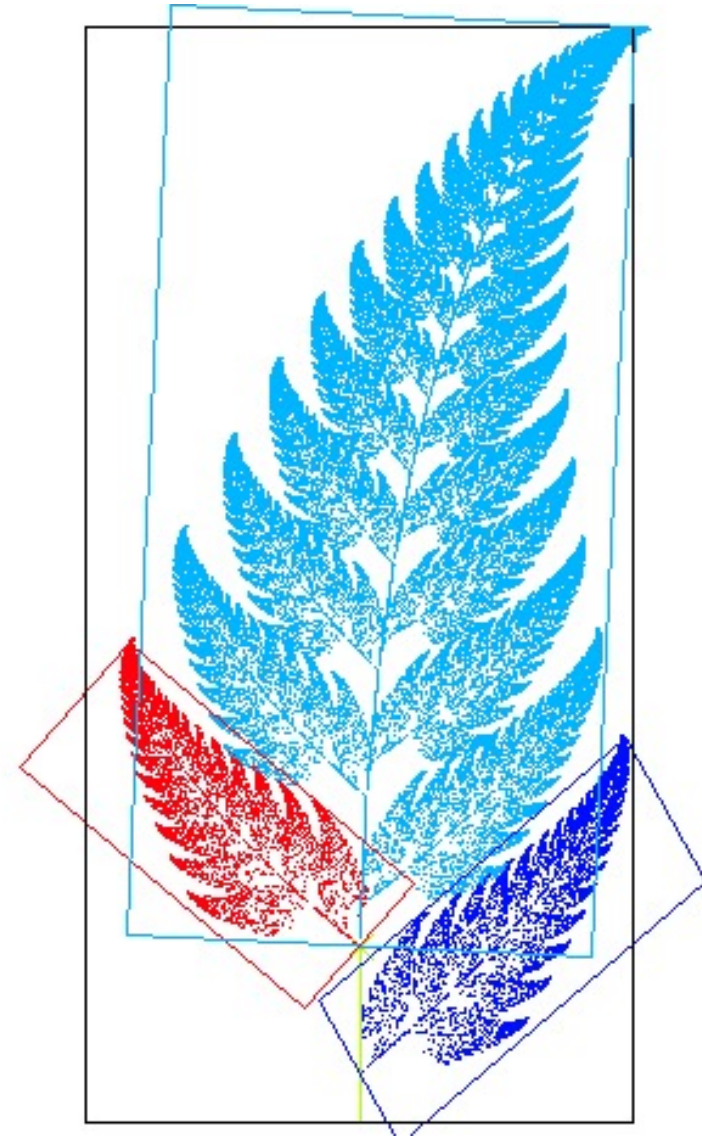
Linéaires (rotation, changement d'échelle, cisaillement, réflexion) + TRANSLATION



LES TRANSFORMATIONS AFFINES

Linéaires (rotation, changement d'échelle, cisaillement, réflexion) + TRANSLATION

Comment convertir une matrice d'une transformation linéaire en une matrice d'une transformation affine?



LES TRANSFORMATIONS AFFINES

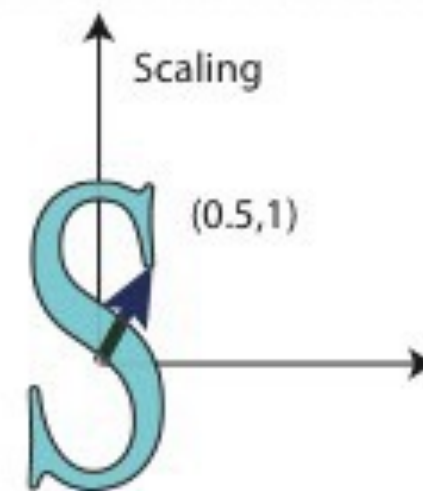
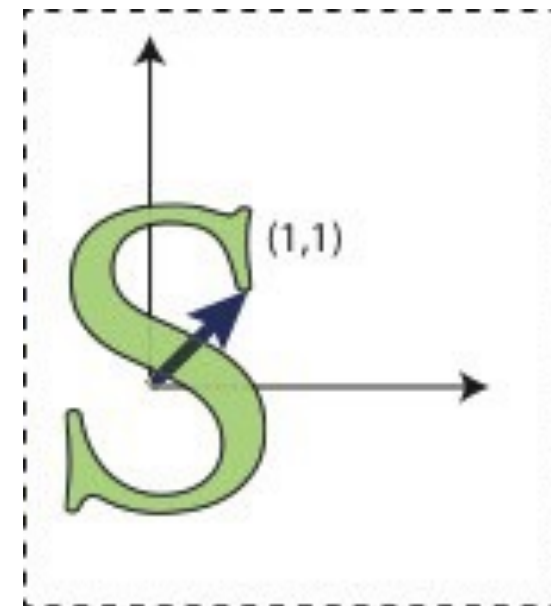
- Changement d'échelle:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\beta \\ 3\gamma \\ 1 \end{pmatrix}$$



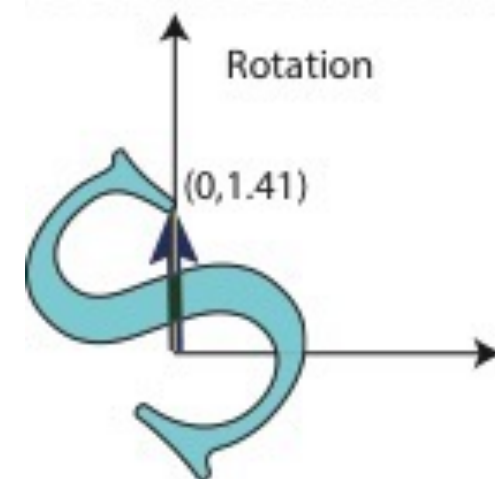
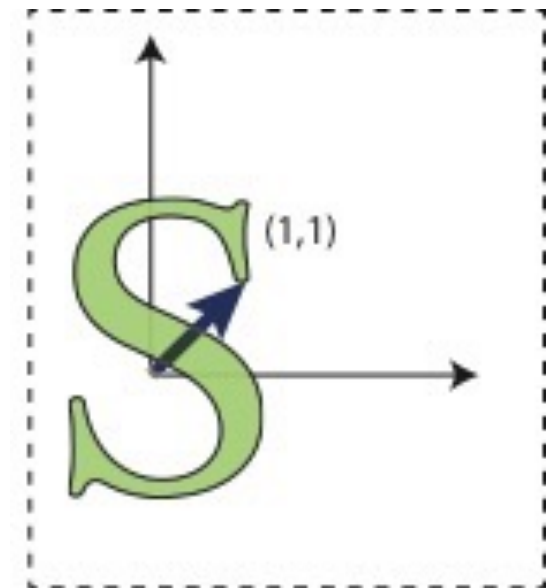
LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Rotation

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



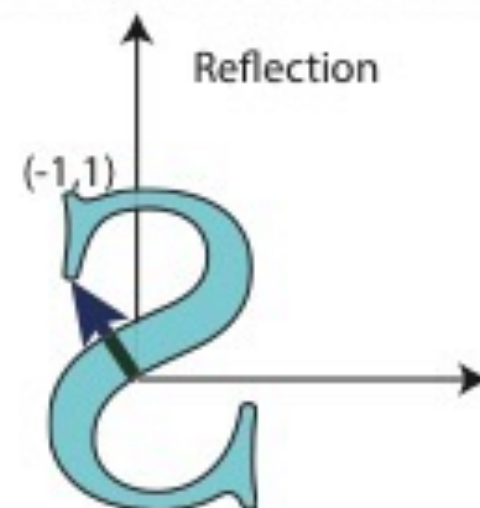
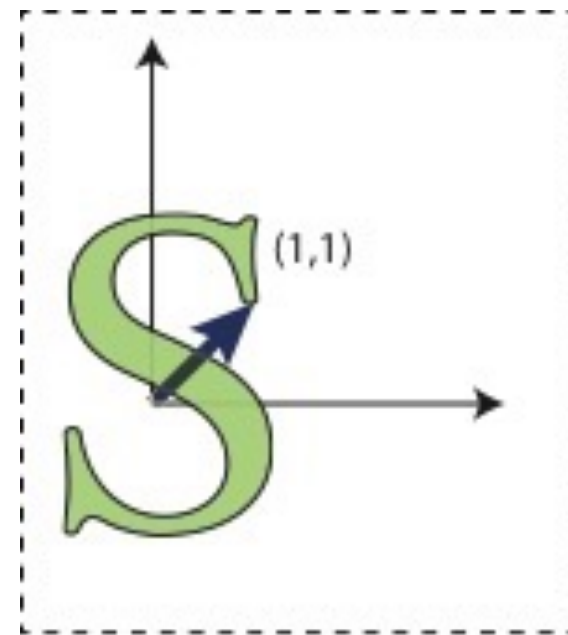
LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Réflexion (y)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



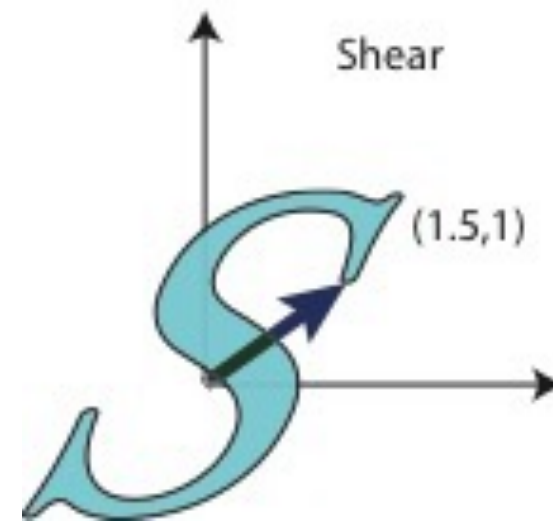
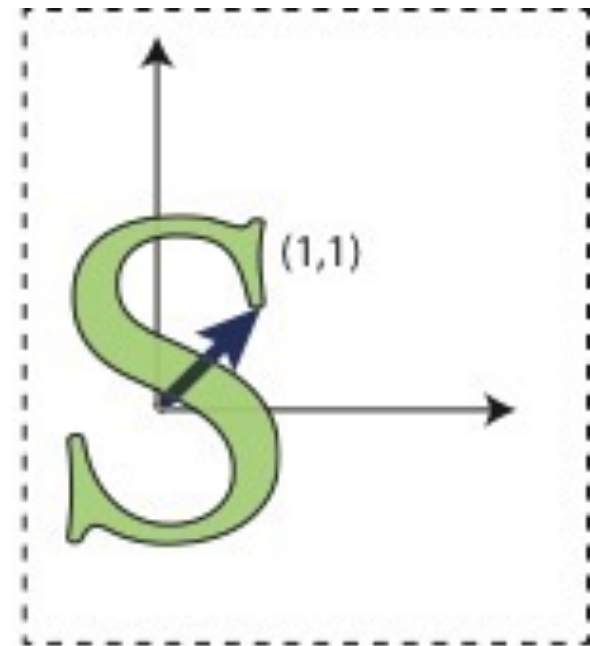
LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Cisaillement (axes x)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Translation

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & 0 & c_y \\ 0 & 0 & 1 & c_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & 0 & c_y \\ 0 & 0 & 1 & c_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + c_x \\ y + c_y \\ z + c_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

LES TRANSFORMATIONS AFFINES: 2D

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & 0 & c_y \\ 0 & 0 & 1 & c_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LES TRANSFORMATIONS AFFINES: 2D

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C'EST QUOI, 1?

- Maintenant tous les points sont représentés par $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ - en coordonnées homogènes
- Ce sont des vecteurs d'un **autre espace**