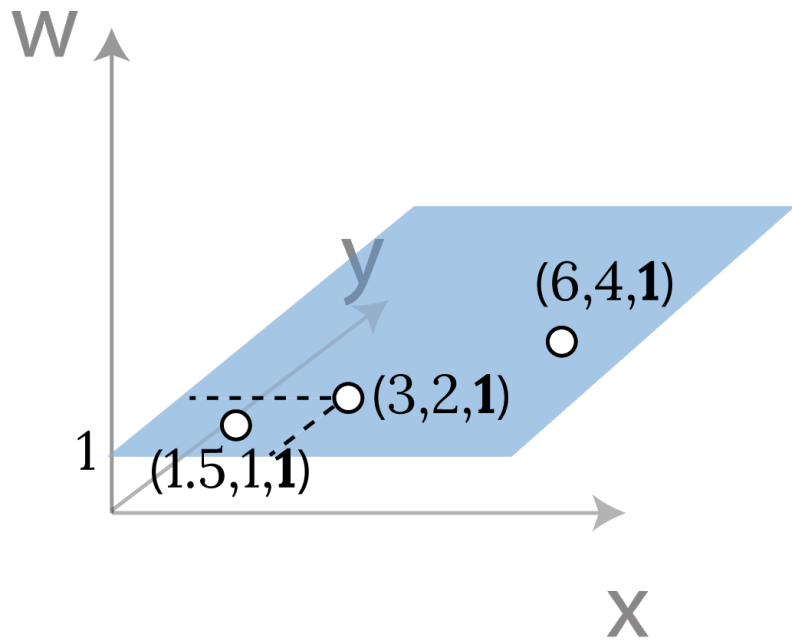


# IFT 3355: INFOGRAPHIE

# LES COORDONNÉES

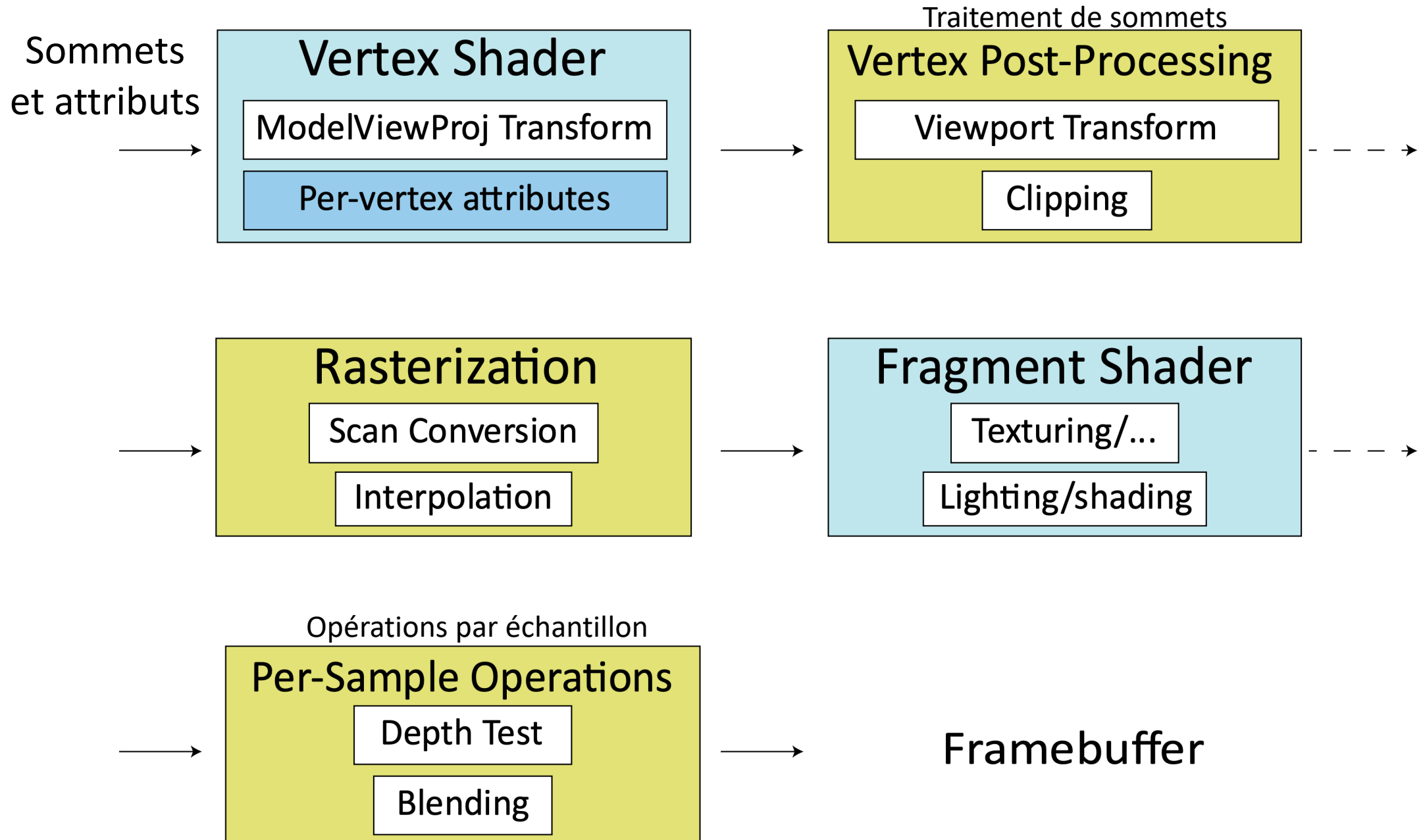
# HOMOGÈNES

Livre de référence: -

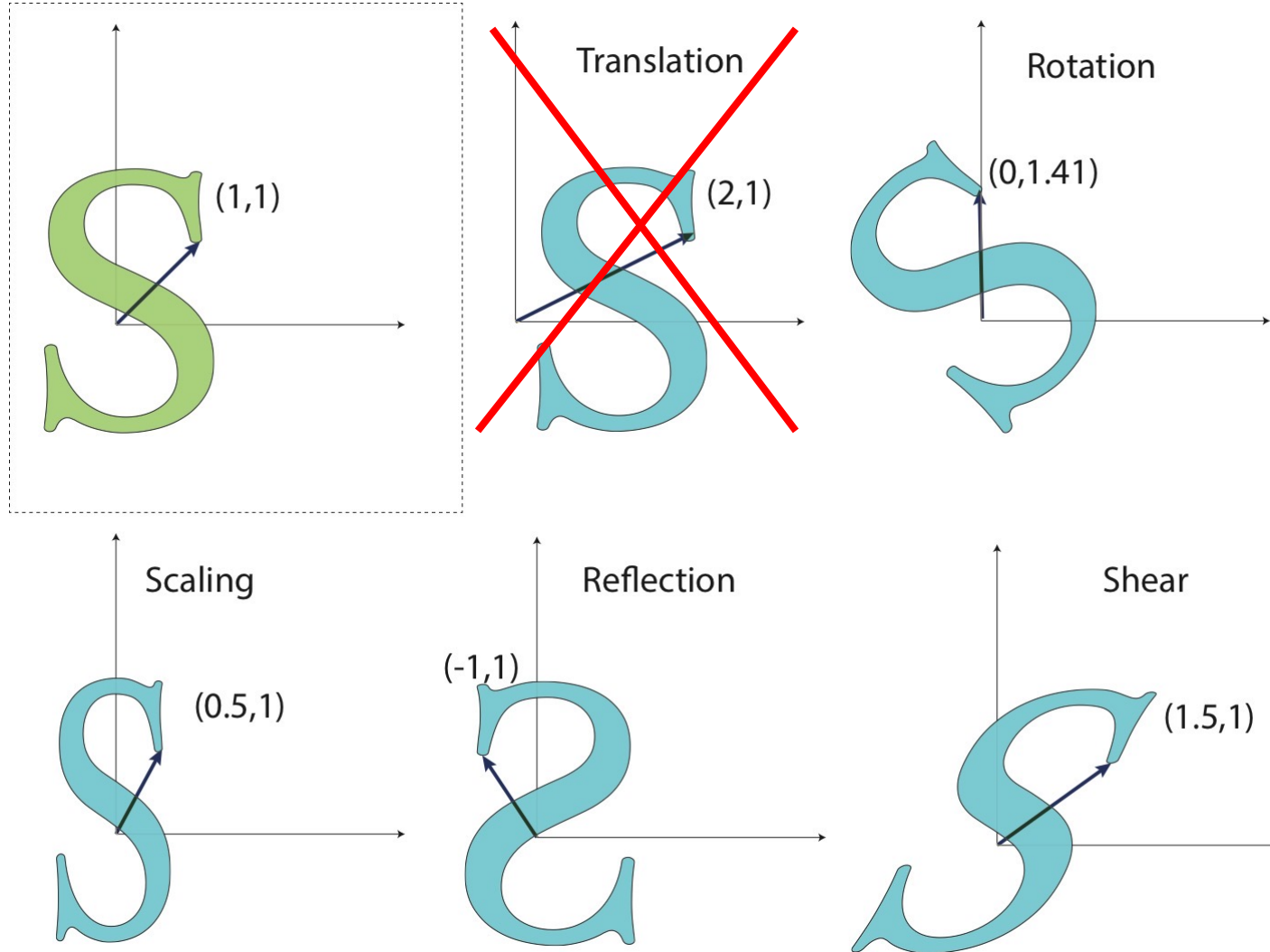


Mikhail Bessmeltsev

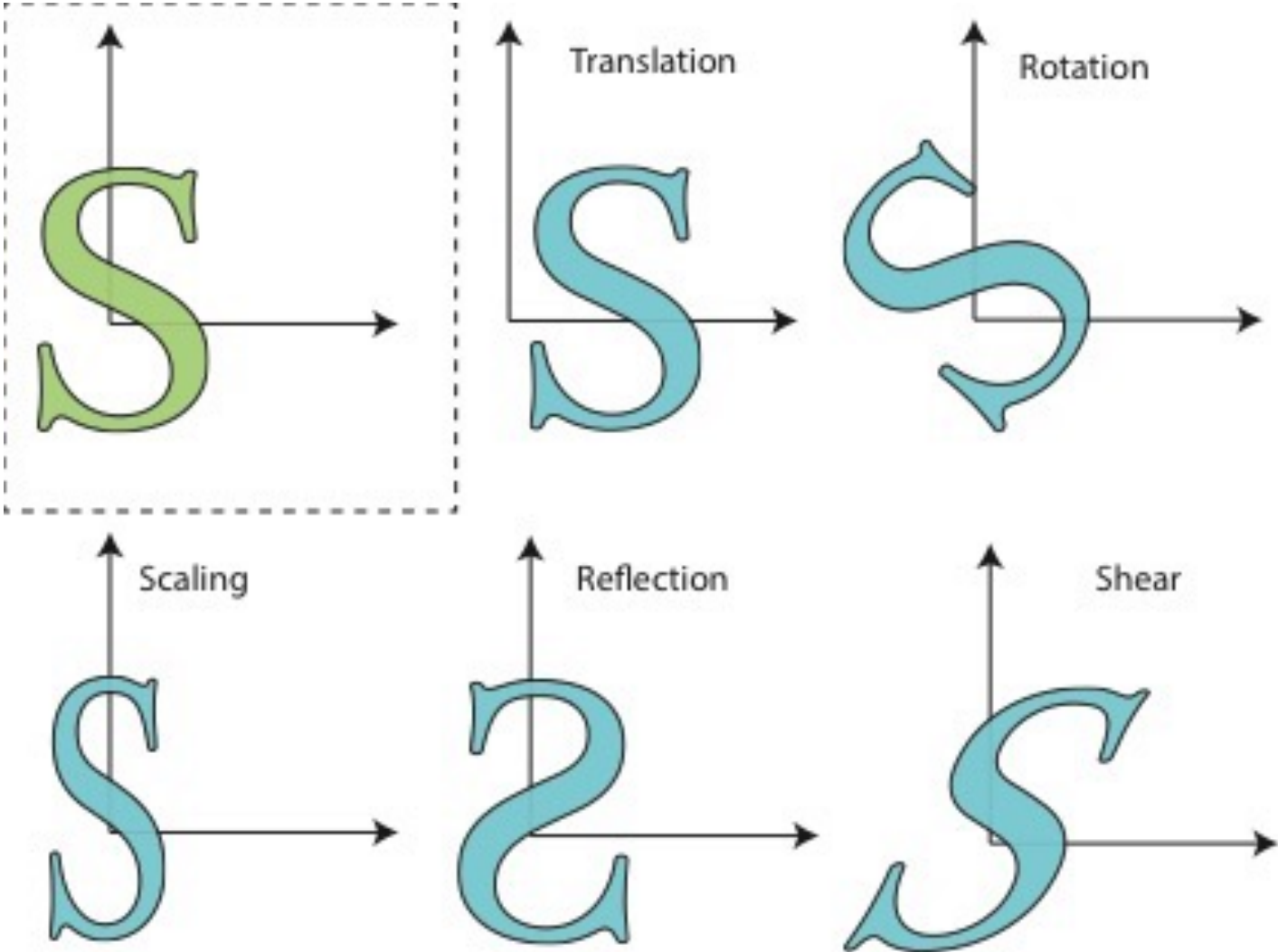
# PIPELINE: PLUS DE DÉTAILS



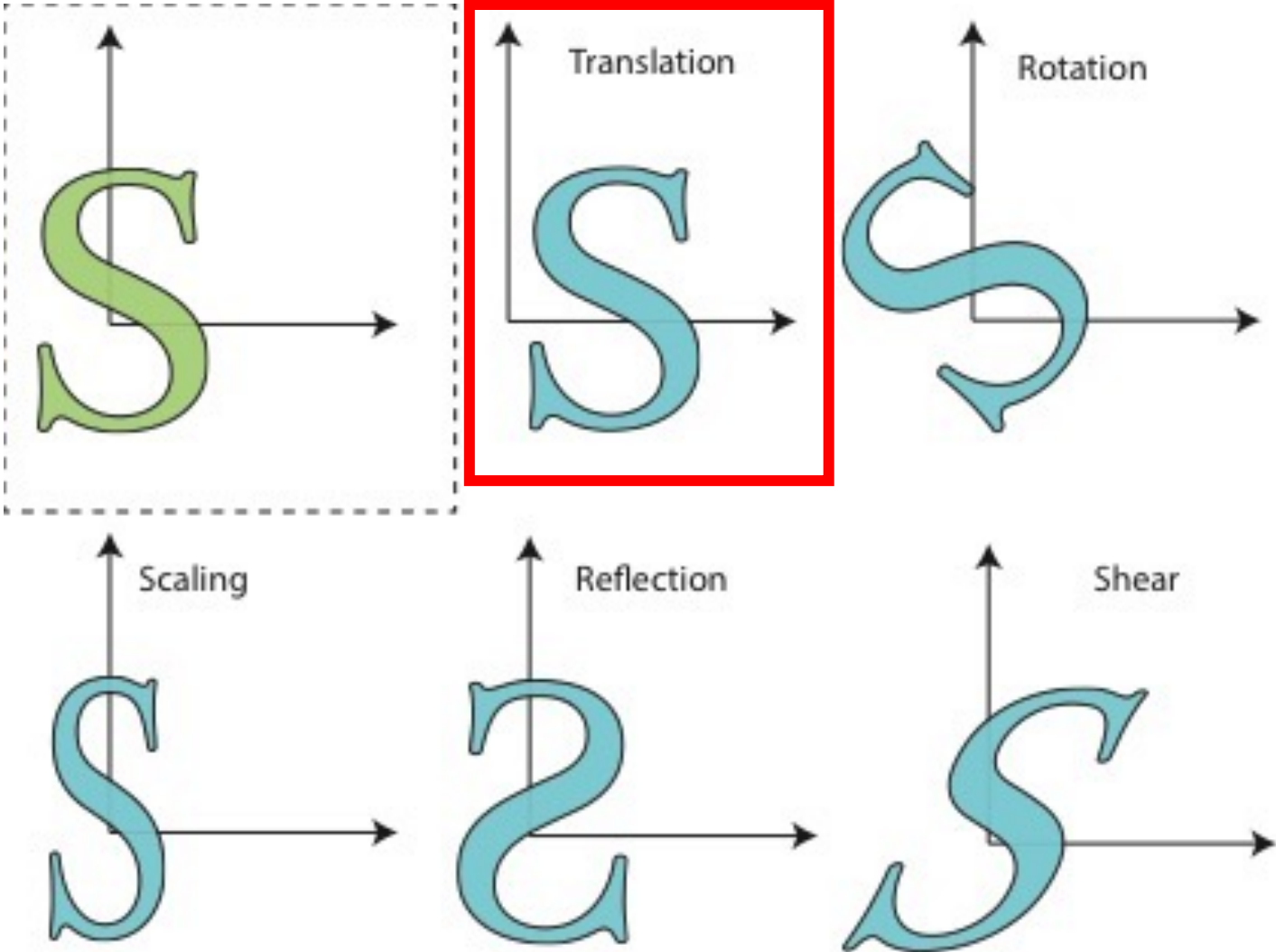
# LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES: VECTEUR POSITION



# LES TRANSFORMATIONS AFFINES



# LES TRANSFORMATIONS AFFINES



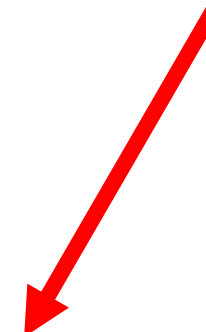
# UNE IDÉE

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# LA MATRICE AUGMENTÉE

$$M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Translation

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + b_x \\ y' + b_y \\ z' + b_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{b}$$


# LA MATRICE AUGMENTÉE

La transformation linéaire

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# LA MATRICE AUGMENTÉE

La transformation linéaire

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translation

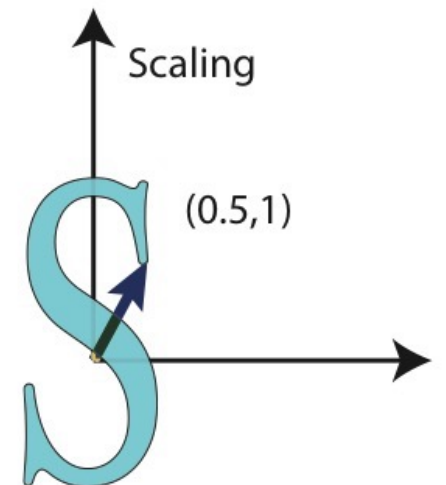
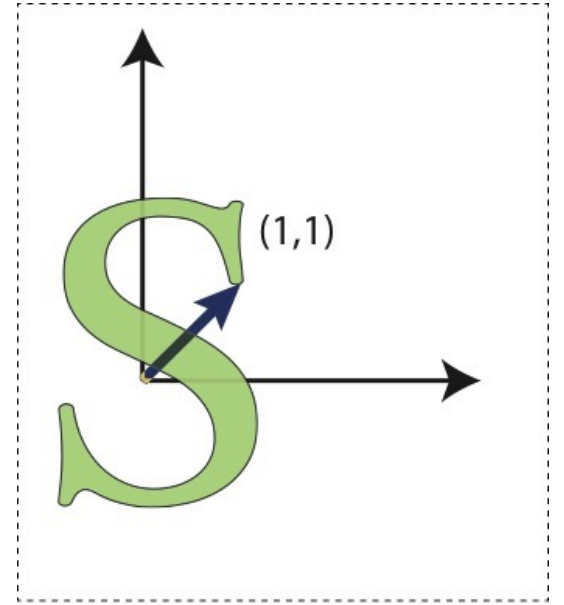


Rappel

# LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Changement d'échelle:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

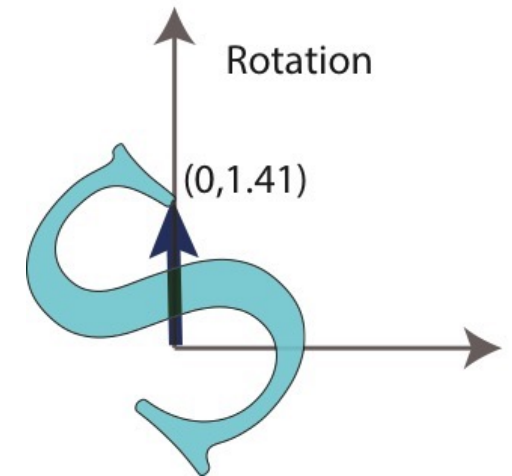
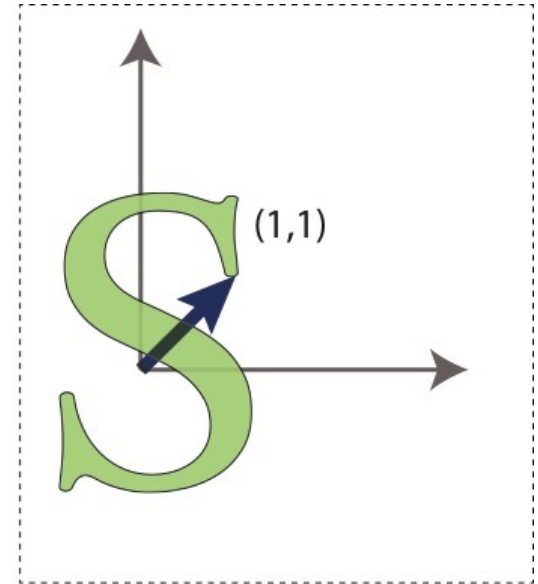


Rappel

# LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Rotation (autour de l'axe z)

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

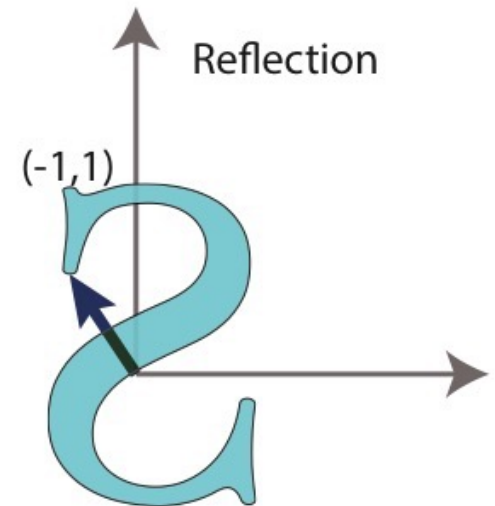
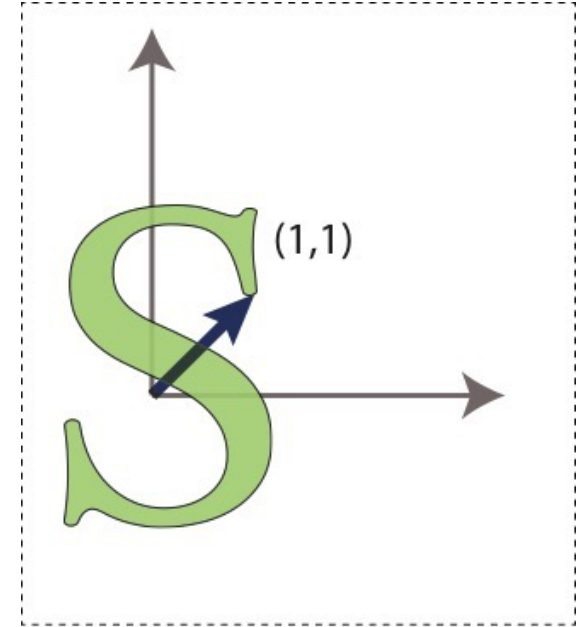


Rappel

# LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Réflexion ( $y$ )

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

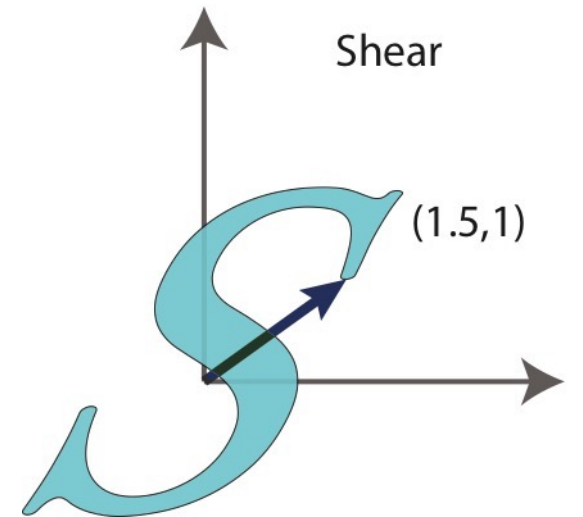
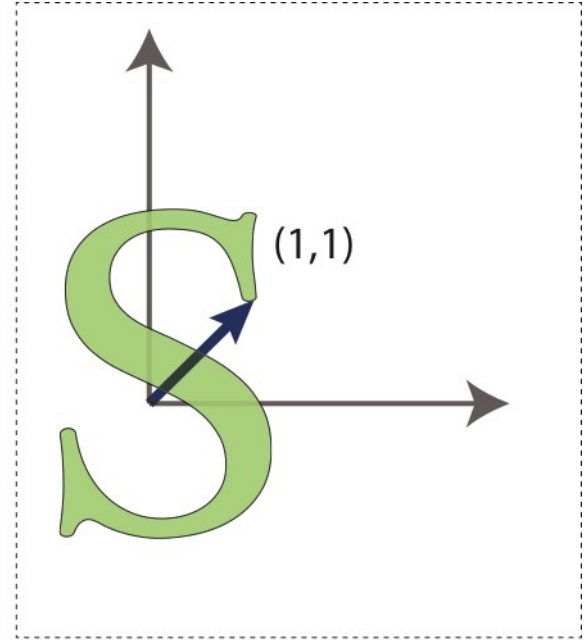


Rappel

# LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Cisaillement (axe  $x$ )

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



*Rappel*

# LES TRANSFORMATIONS AFFINES

- Translation

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & 0 & c_y \\ 0 & 0 & 1 & c_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rappel

# C'EST QUOI, 1?

- Maintenant tous les points sont représentés par  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$  en coordonnées homogènes
- Ce sont des vecteurs d'un **autre espace**

# LES COORDONNÉES HOMOGÈNES

Les coordonnées  
homogènes

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Les coordonnées  
euclidiennes



# LES COORDONNÉES HOMOGÈNES

Les coordonnées  
homogènes

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{bmatrix}$$

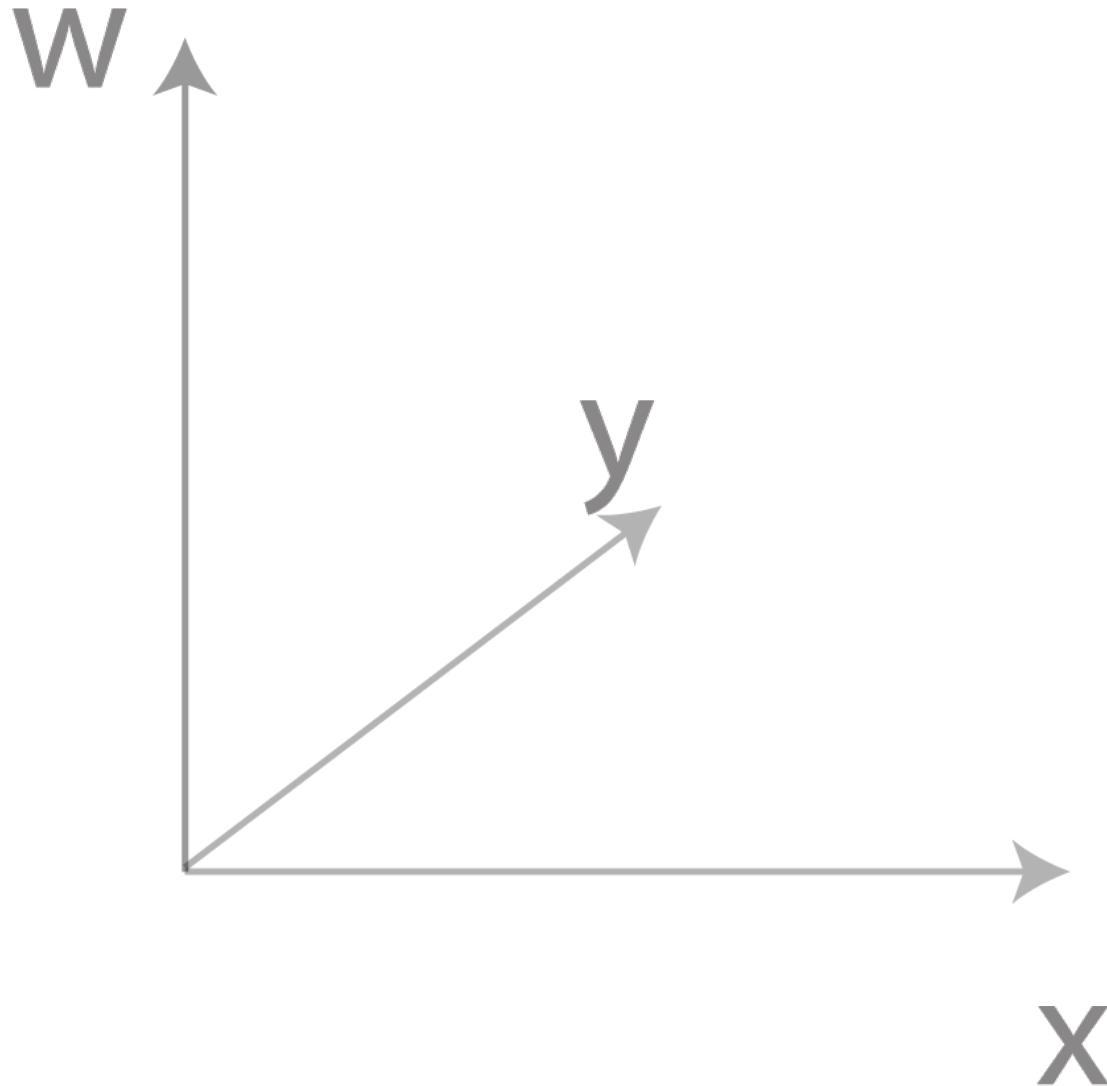
Les coordonnées  
euclidiennes

# LES COORDONNÉES HOMOGÈNES

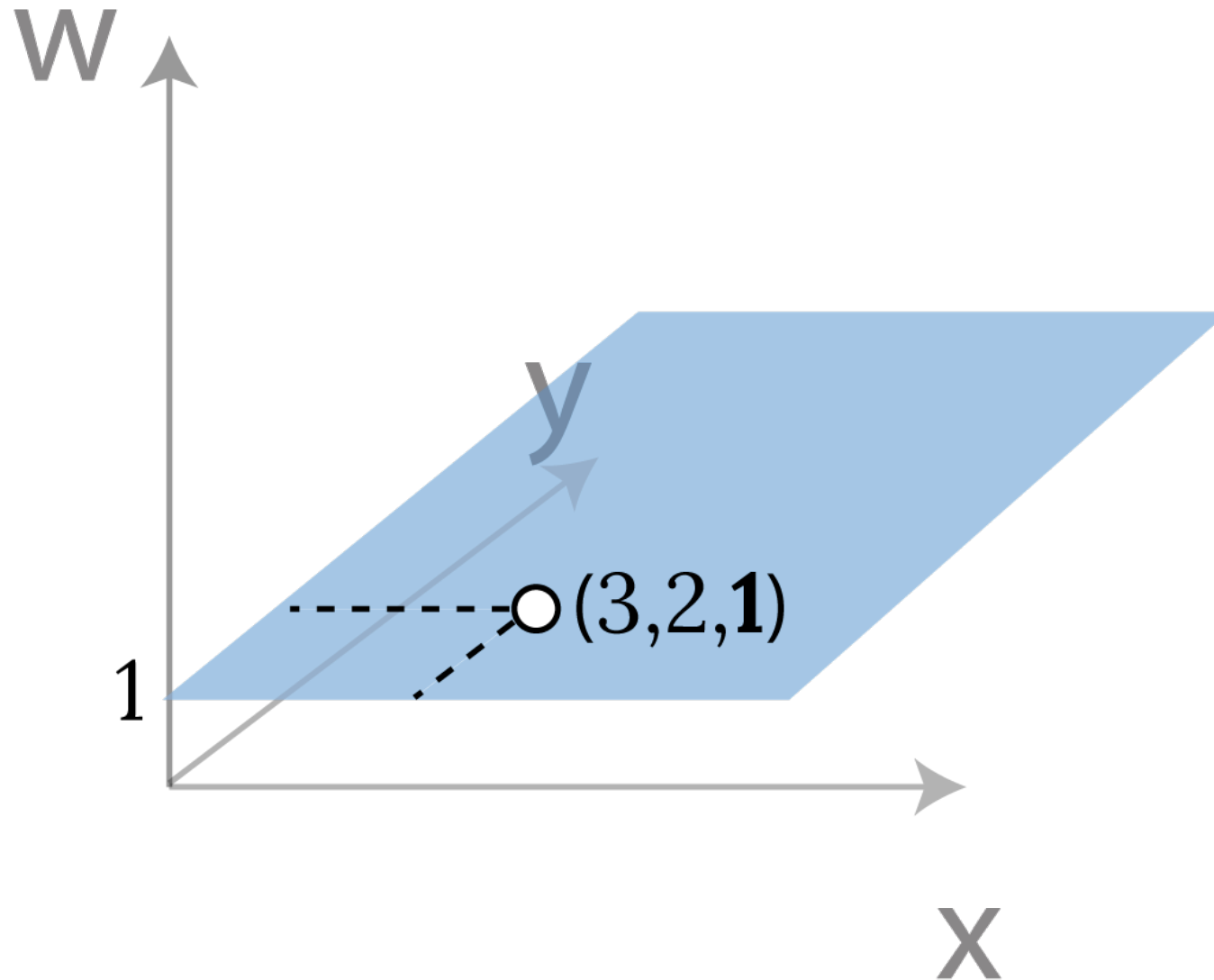
Les coordonnées homogènes  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{bmatrix}$  Les coordonnées euclidiennes

Pas 1-1!

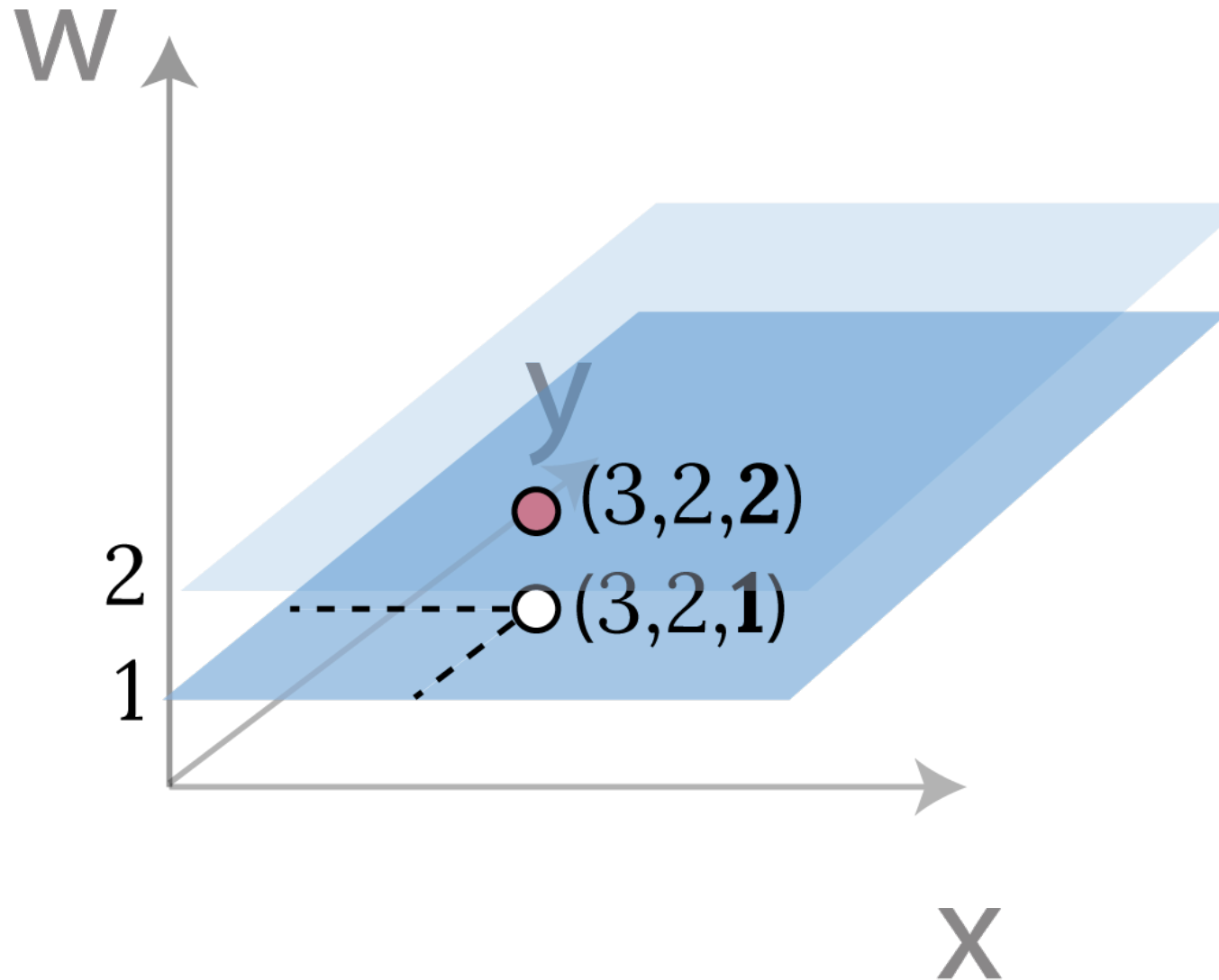
# LES COORDONNÉES HOMOGÈNES



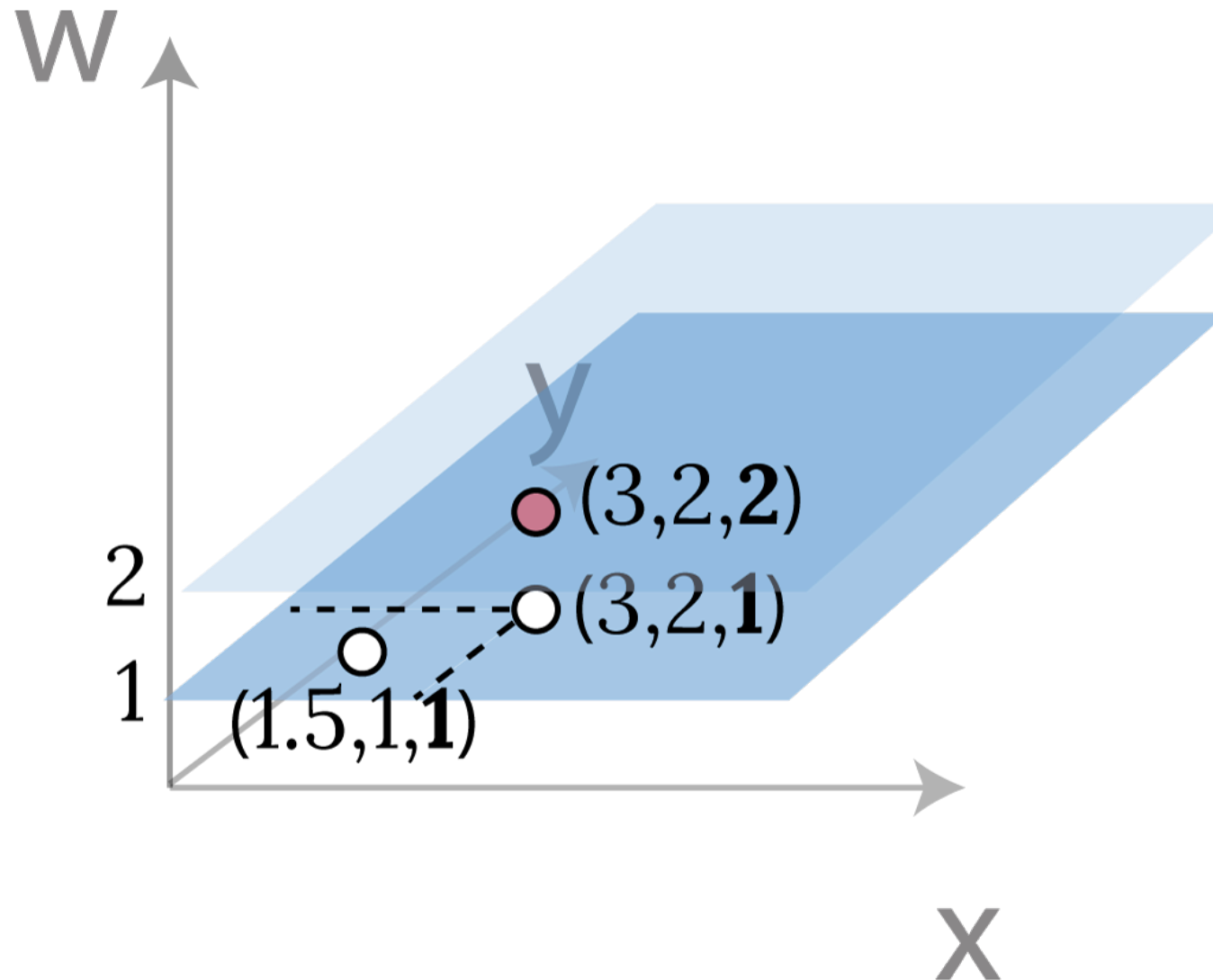
# LES COORDONNÉES HOMOGÈNES



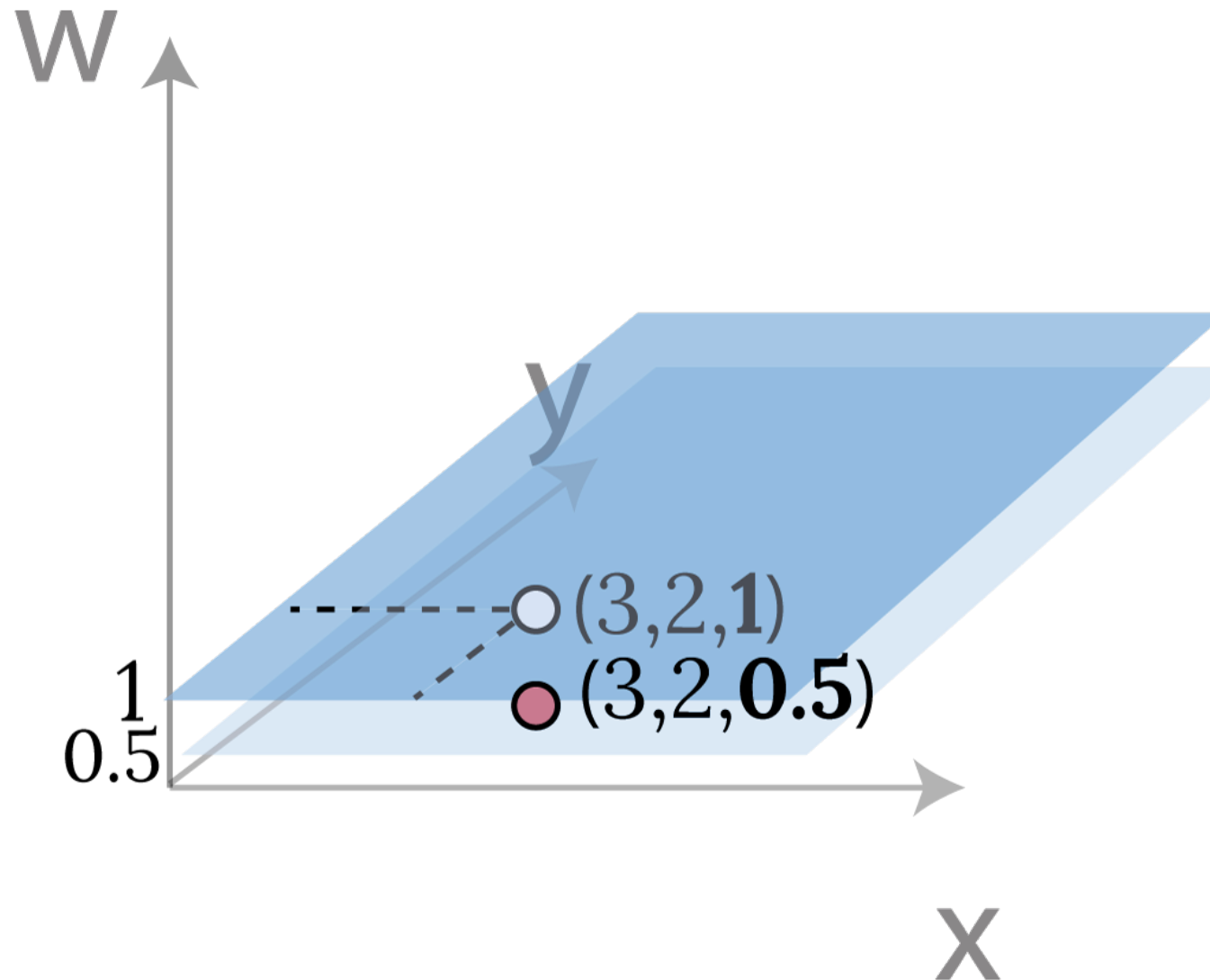
# LES COORDONNÉES HOMOGÈNES



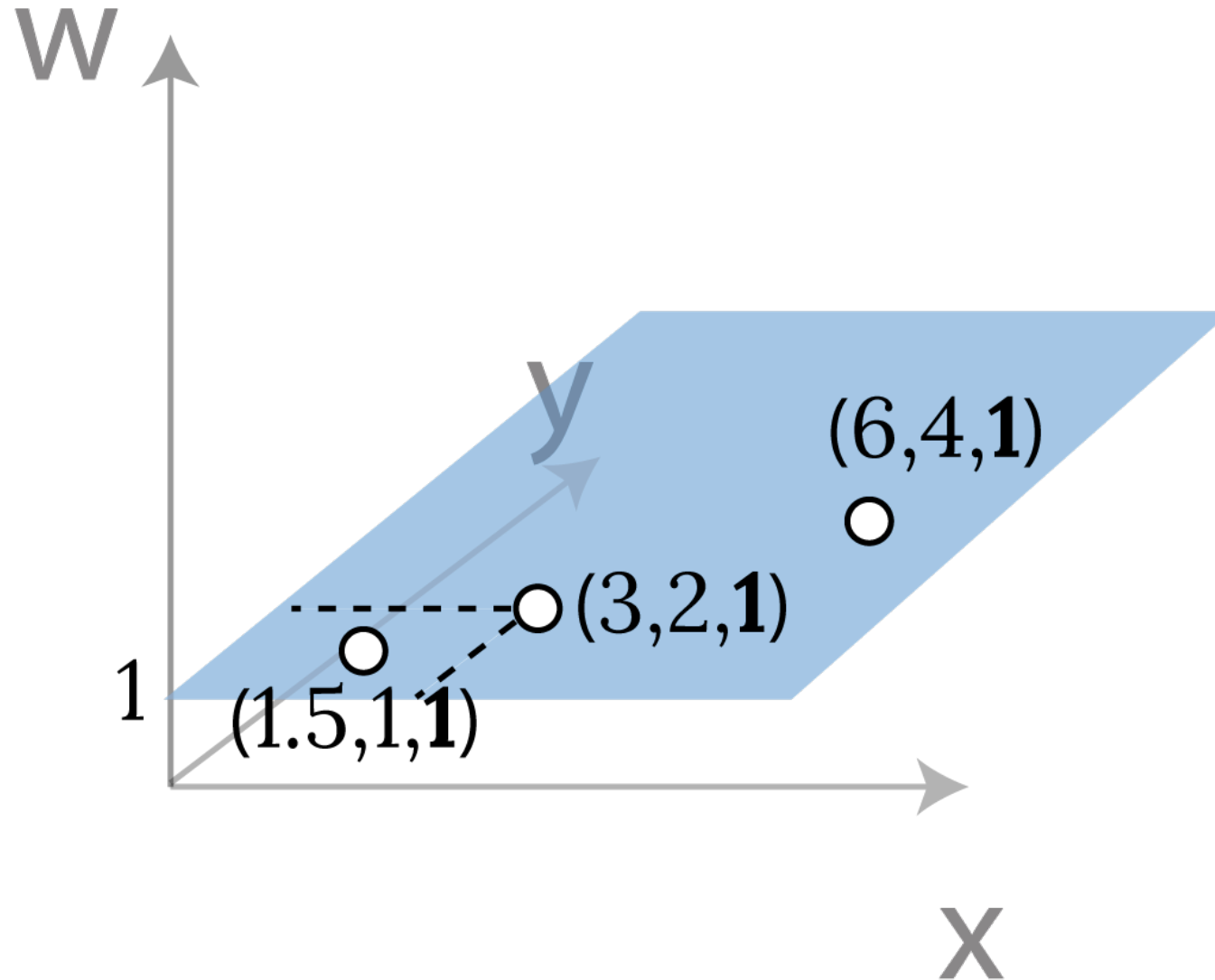
# LES COORDONNÉES HOMOGÈNES



# LES COORDONNÉES HOMOGÈNES

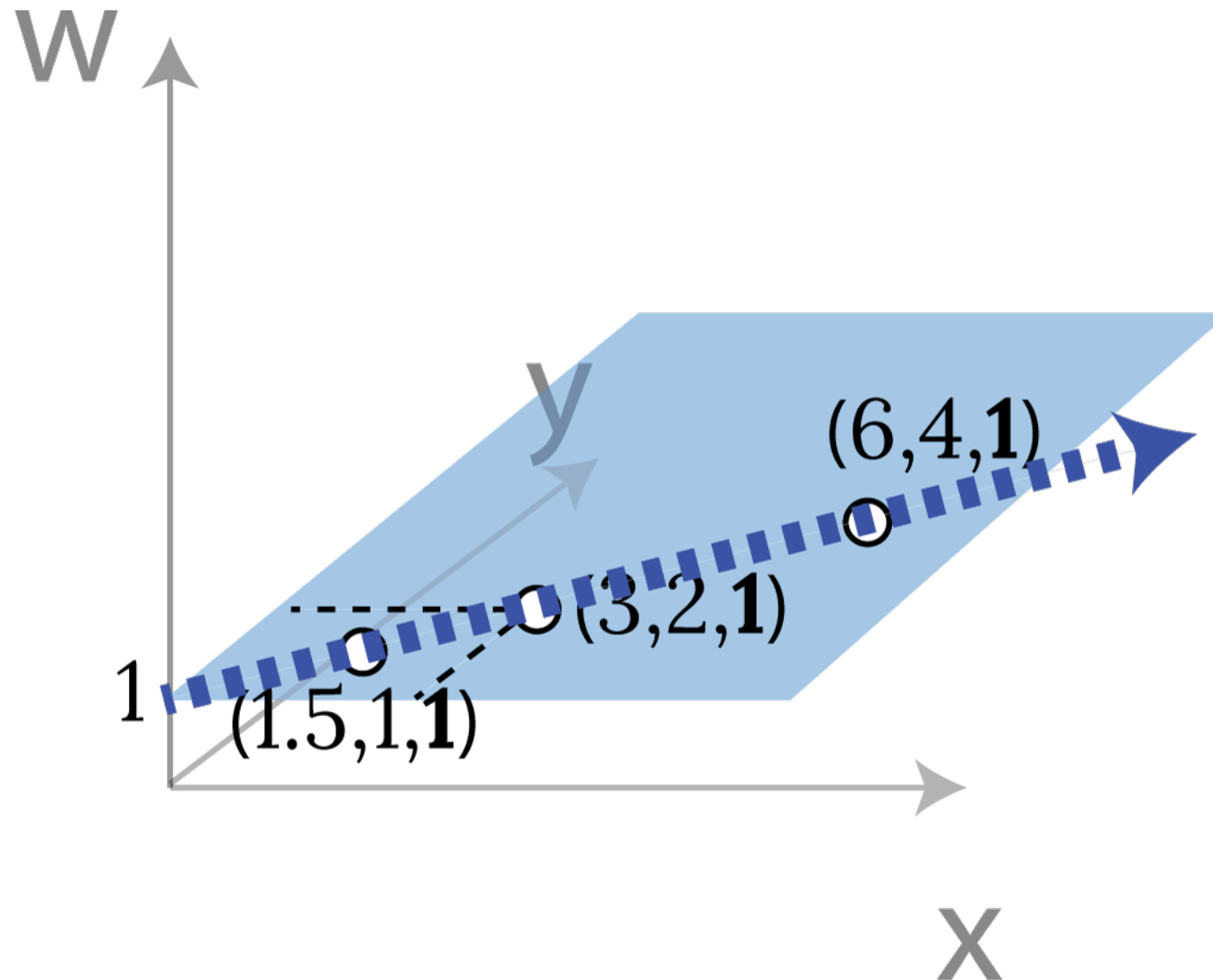


# LES COORDONNÉES HOMOGÈNES





# LES COORDONNÉES HOMOGÈNES

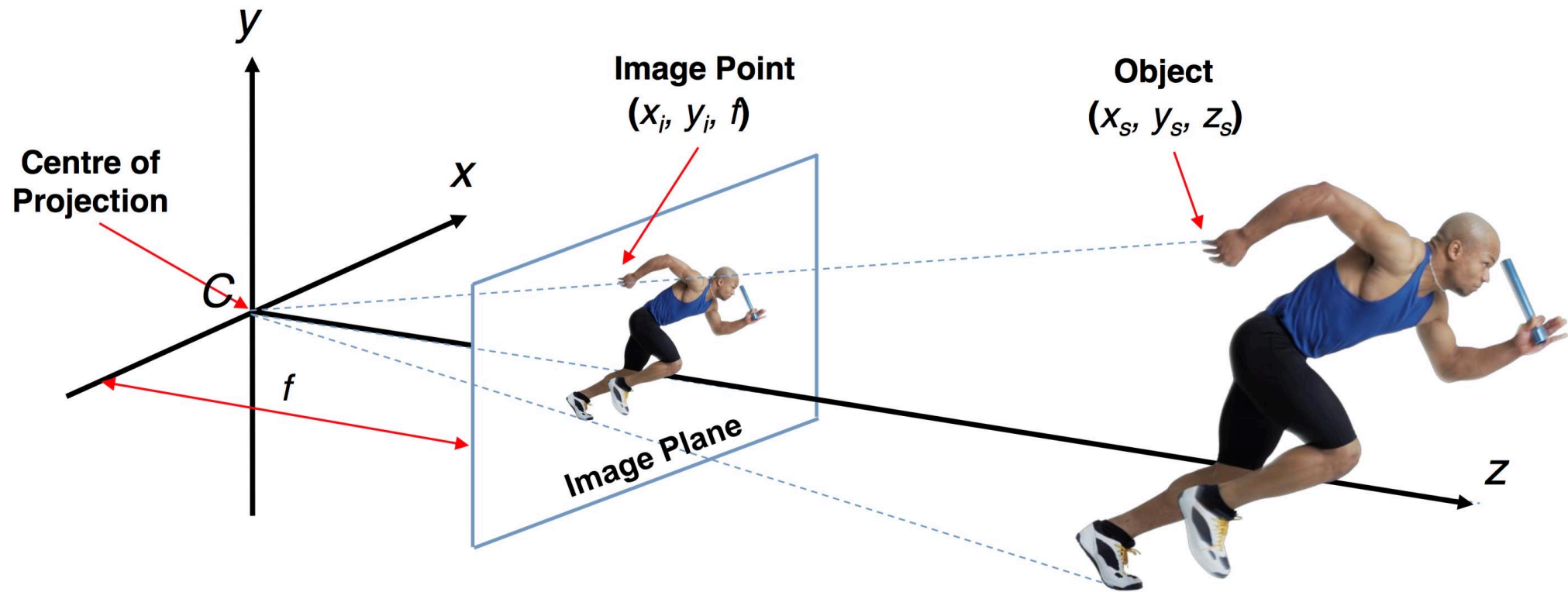


# LES POINTS ET LES VECTEURS

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$  sont des vecteurs!

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, w \neq 0$  sont des points

# APERÇU: PROJECTIONS



$$x_i = f \frac{x_s}{z_s}, \quad y_i = f \frac{y_s}{z_s}$$

# UNE QUESTION

Que font ces transformations affines 2D?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

# QUELLES PAIRES SONT ÉQUIVALENTES?

A.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D. A & B

E. A & C

# TRANSFORMER LES POINTS & VECTEURS

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + b_x \\ y' + b_y \\ z' + b_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \end{bmatrix}$$

# TRANSFORMER POINTS & VECTEURS

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + b_x \\ y' + b_y \\ z' + b_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Point:  
**Transformation**  
linéaire +  
**translation**

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur:  
**Transformation**  
linéaire

# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

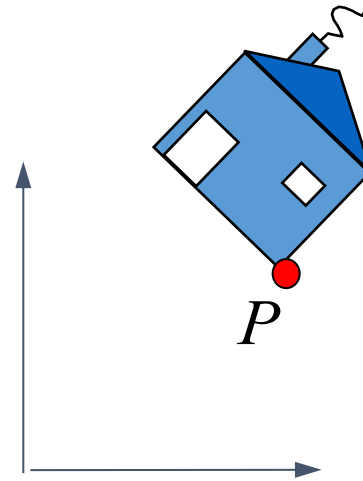
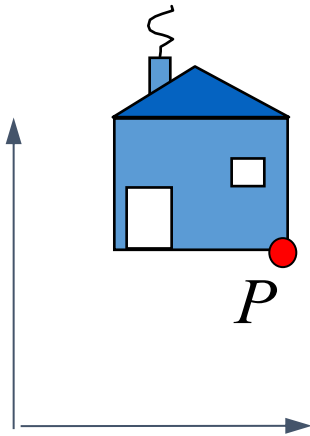


- Composition de transformation A et B:  $AB$

Comme vous le savez,  
la multiplication des matrices n'est pas commutative  
 $AB \neq BA$

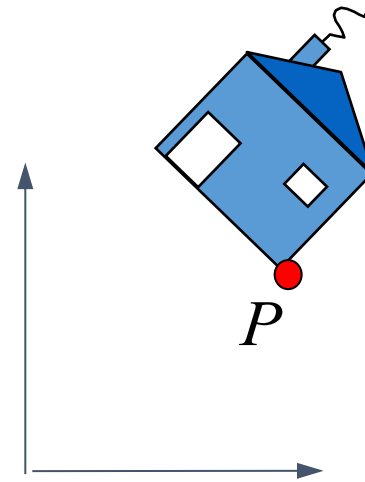
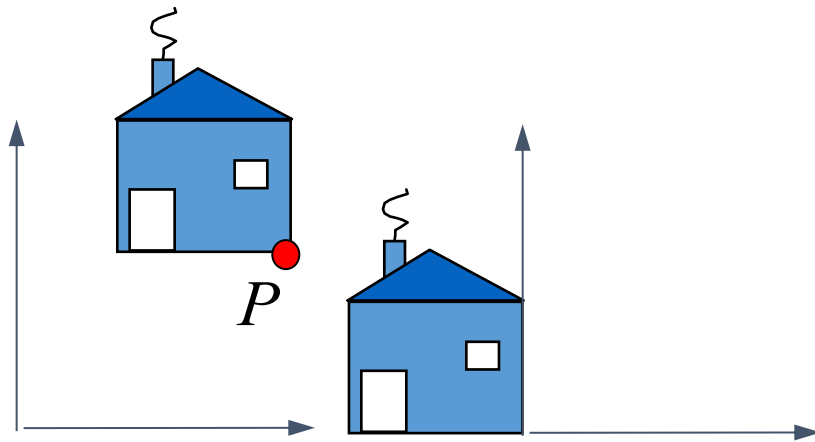
# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Quelle opération tourne  $XY$  par  $\theta$  autour du  $P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ ?



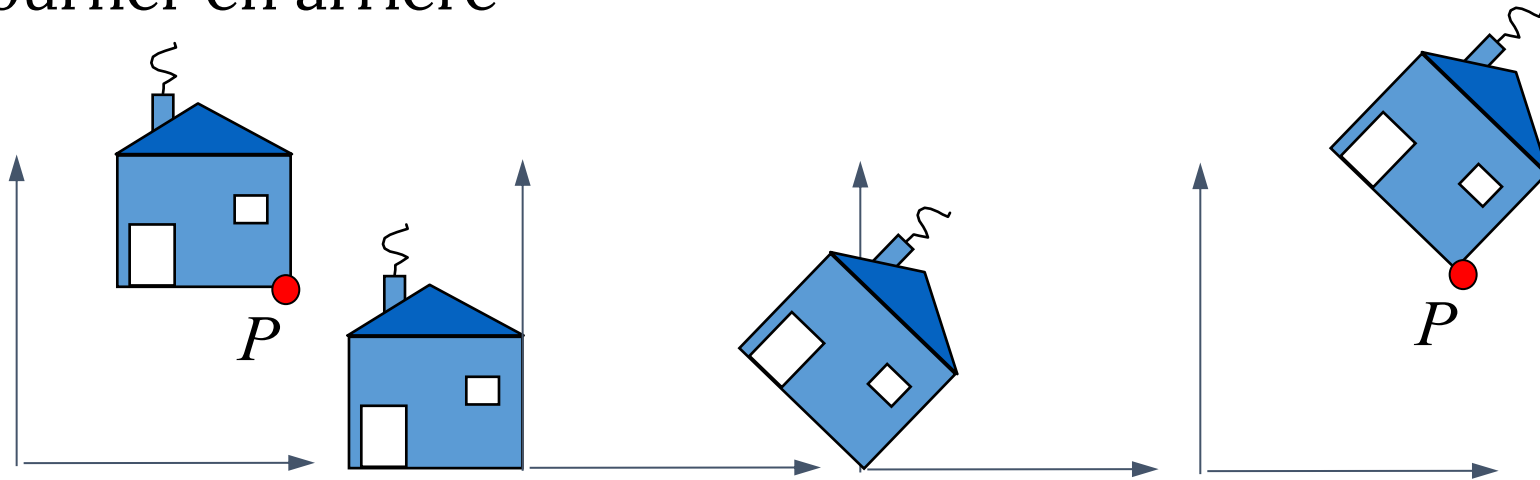
# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Quelle opération tourne  $XY$  par  $\theta$  autour du  $P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ ?
- La réponse:
  - Bouger  $P$  vers l'origine



# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Quelle opération tourne  $XY$  par  $\theta$  autour du  $P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ ?
- La réponse:
  - Bouger  $P$  vers l'origine
  - Tourner de  $\theta$  autour de l'origine
  - Retourner en arrière



# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

$$T^{(p_x, p_y)} R^\theta T^{(-p_x, -p_y)} (V)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

# UNE IDÉE GÉNÉRALE

- Transformer la géométrie en système de coordonnées où l'opération est plus simple
- Effectuer l'opération
- Transformer la géométrie en arrière en système de coordonnées original
  
- NB: la composition des transformations affines est une transformation affine (*fermée sous composition*)

# DEUX INTERPRÉTATIONS DE LA COMPOSITION

1) Lire **de droite à gauche** pour les transformations d'**objet**

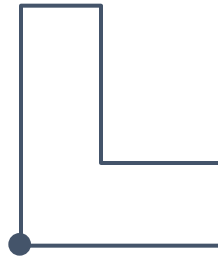
- Déplacer l'objet par  $-t$
- Tourner l'objet de  $\theta$
- Déplacer l'objet par  $t$

2) Lire **de gauche à droite** pour les transformations du **système de coordonnées**

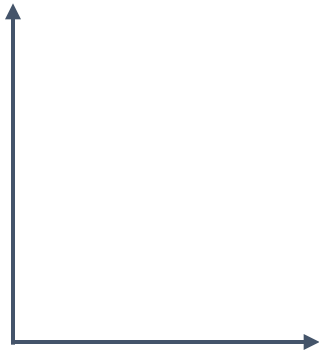
- Déplacer le système par  $t$
- Tourner le système de  $\theta$
- Déplacer le système par  $-t$
- Afficher!

$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS



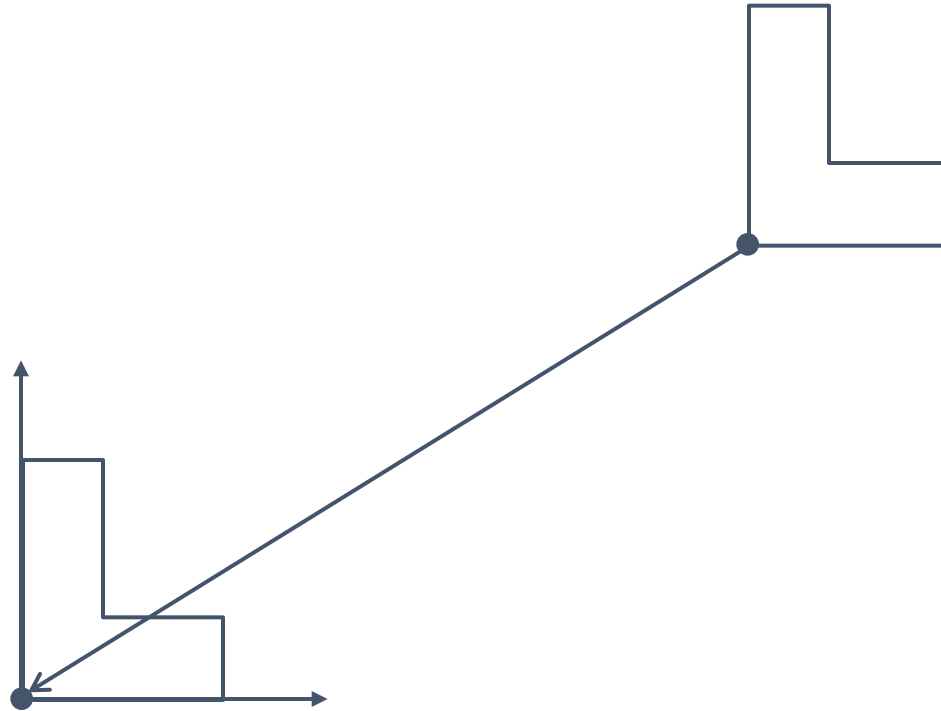
$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$





# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

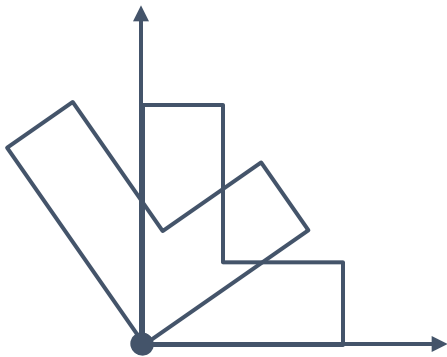
- Première interprétation:
  - Étape 1: déplacer l'objet par  $-t$  (vers l'origine)



$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

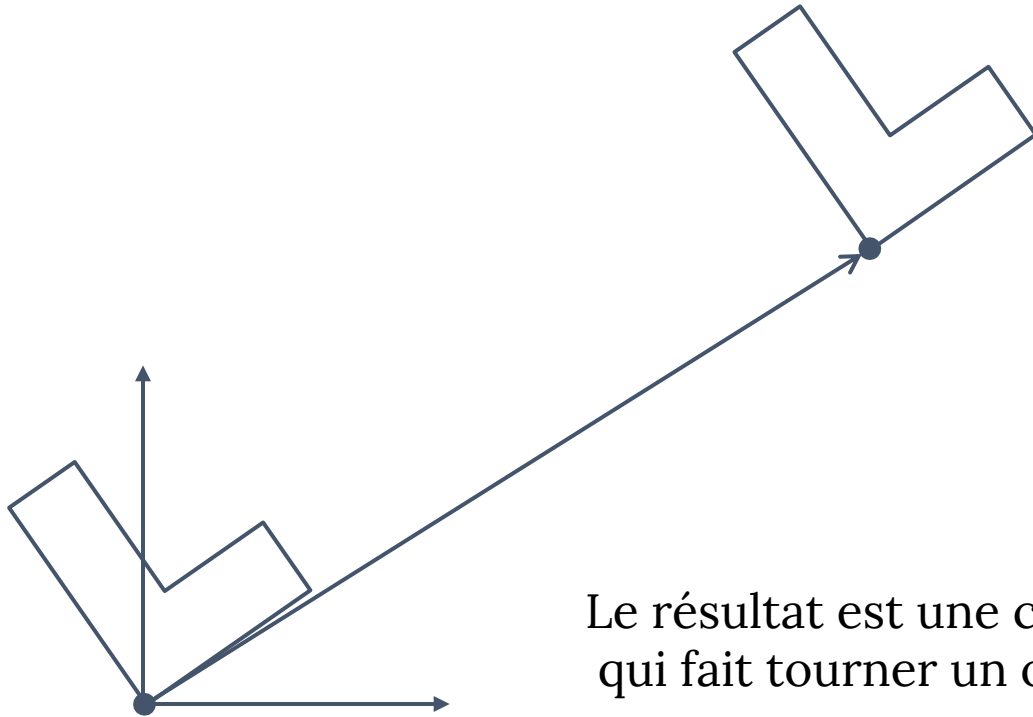
- Première interprétation:
  - Étape 2: tournez l'objet de  $\theta$



$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Première interprétation:
  - Étape 3: déplacer l'objet par  $t$  (en arrière)



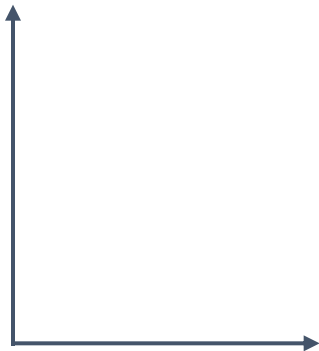
$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

Le résultat est une composition de transformations qui fait tourner un objet autour du point à la position  $t$

# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

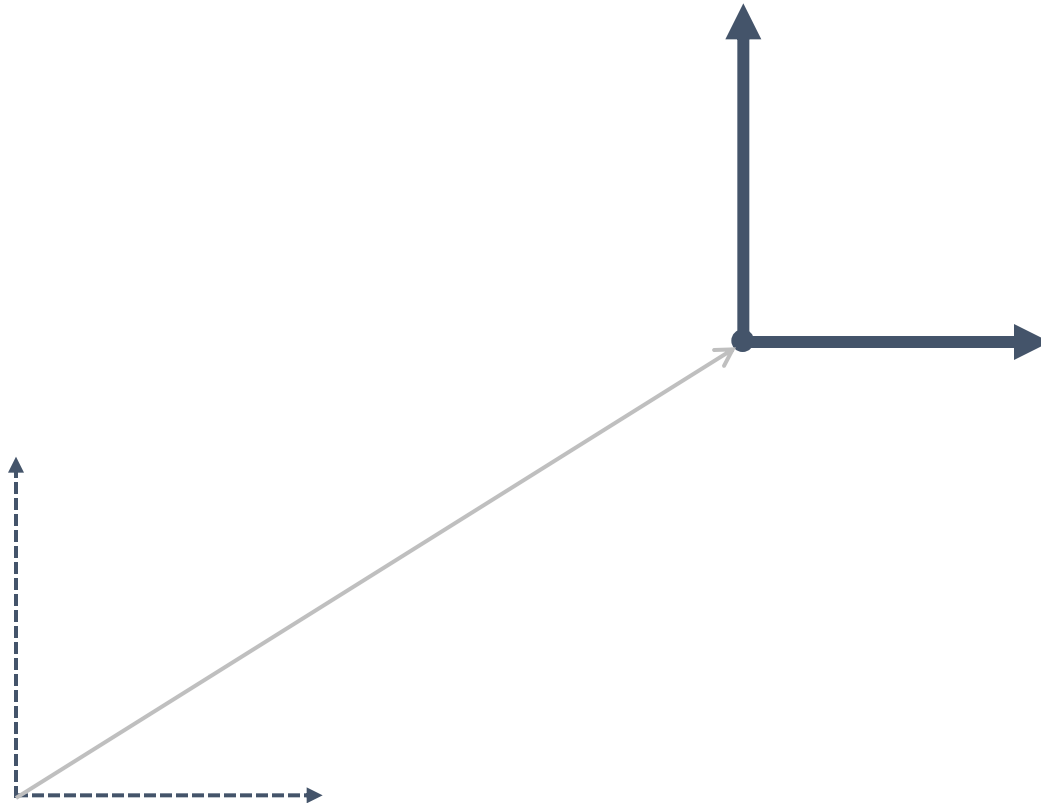
- Deuxième interprétation:

$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$



# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

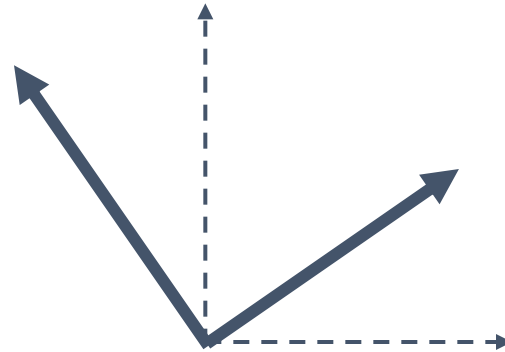
- Deuxième interprétation:
  - Étape 1: Déplacer le système



$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Deuxième interprétation:
  - Étape 2: tournez le système de  $\theta$



$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$

# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

- Deuxième interprétation:
  - Étape 3: déplacer le système à nouveau
    - (vecteur  $-t$  dans le nouveau système de coordonnées!)



$$T^t R^\theta T^{-t}(v)$$