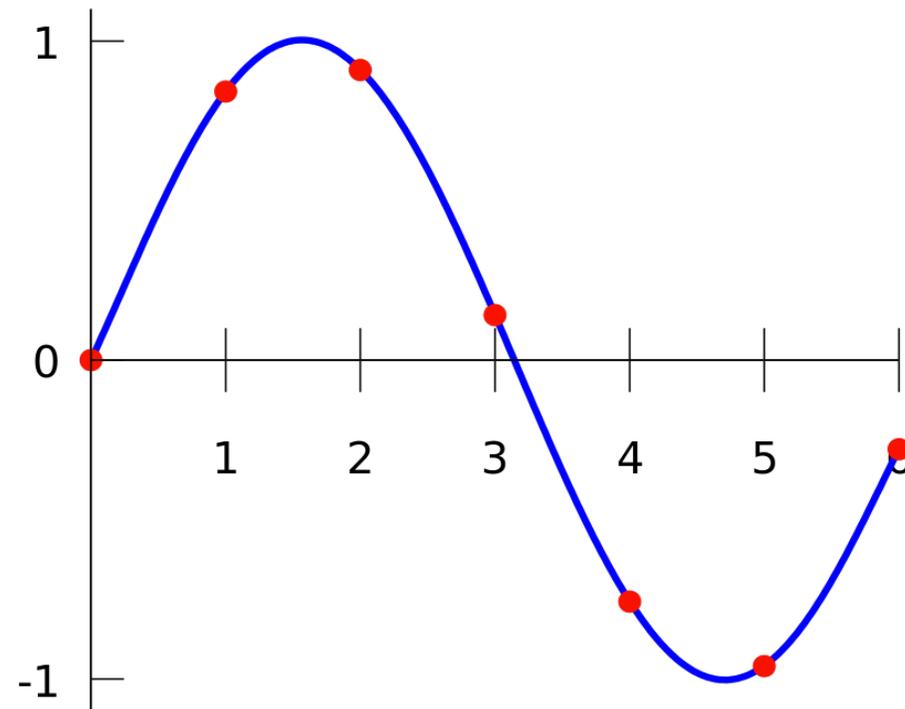


# IFT 3355: INFOGRAPHIE INTERPOLATION

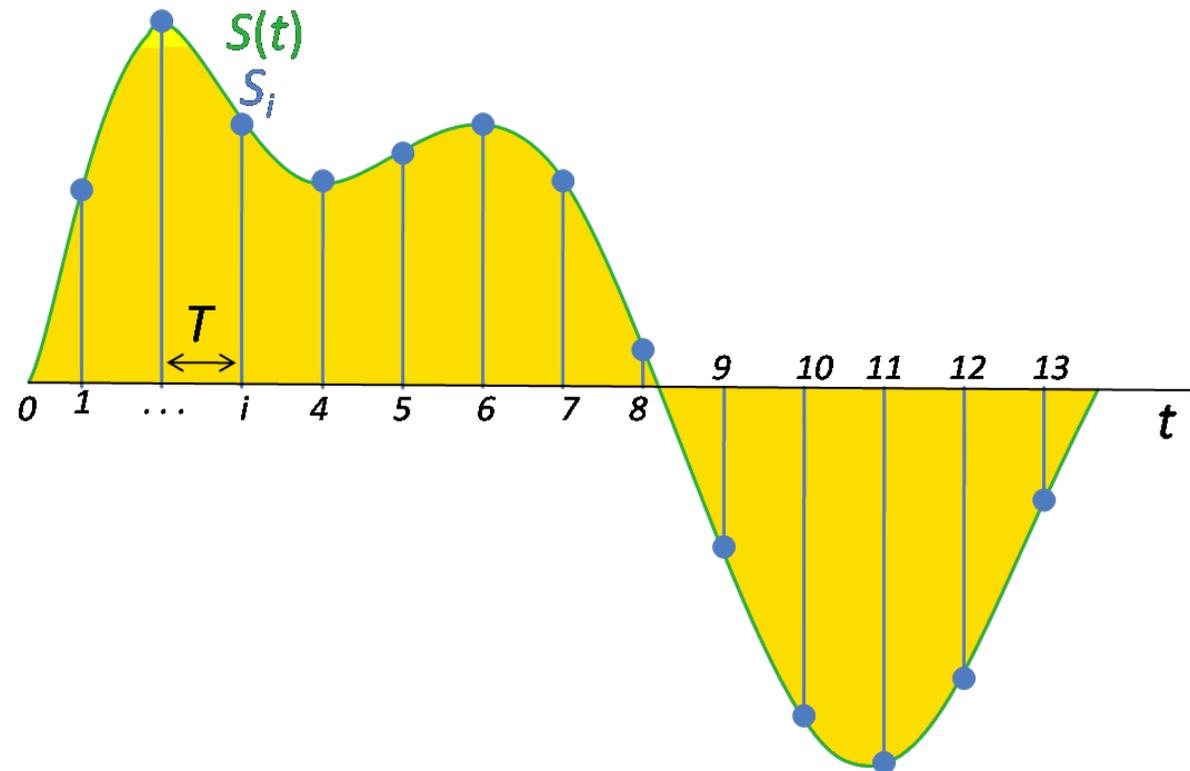
Livre de référence: G: 9



<http://tinyurl.com/ift3355>  
Mikhail Bessmeltsev

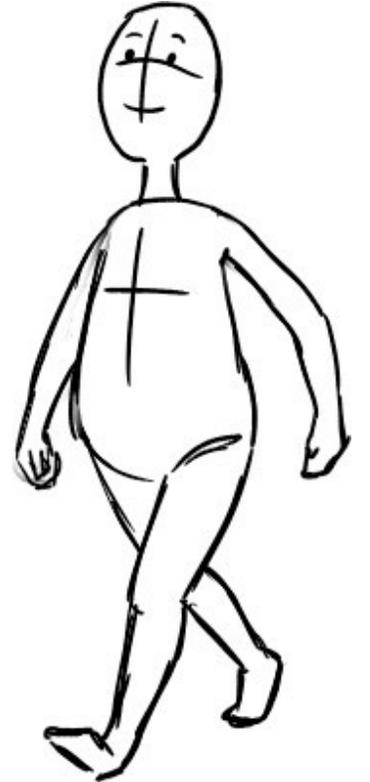
# CONTINU VS DISCRET

- Continu → Discret: **Échantillonnage**
- Discret → Continu: **Reconstruction/Interpolation**



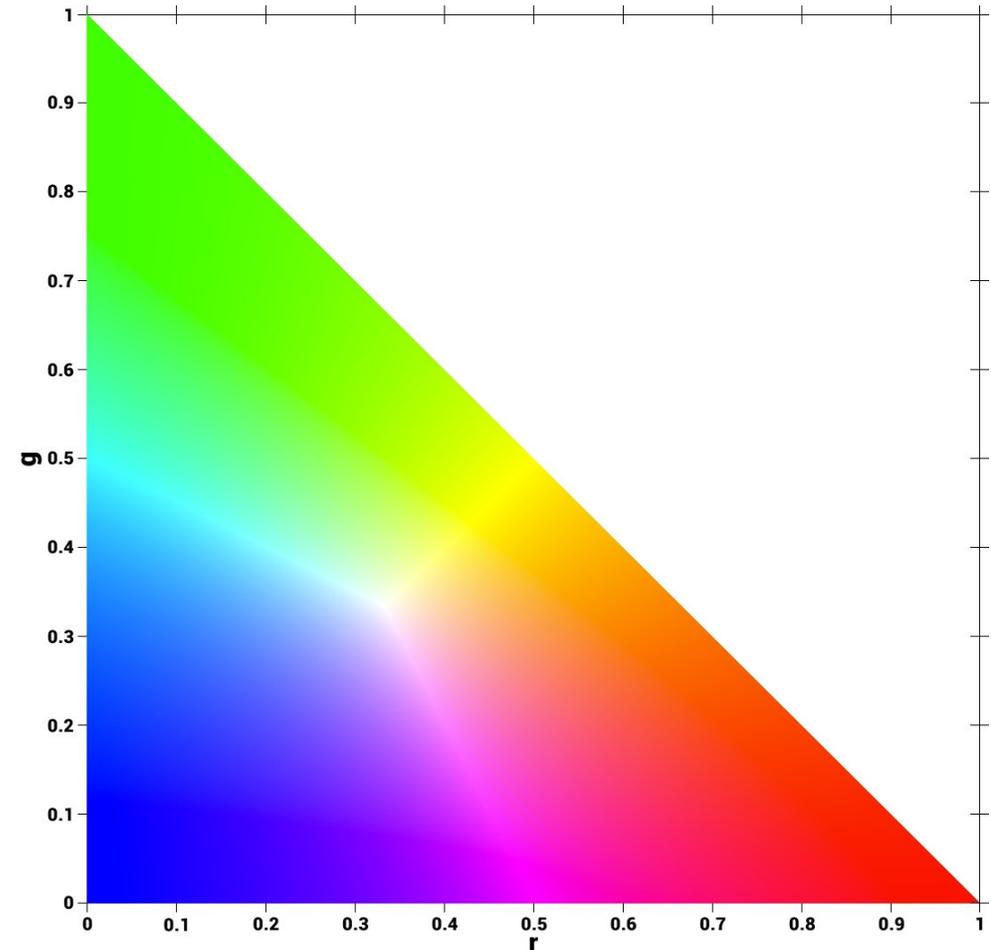
# POURQUOI INTERPOLER?

- L'animation par images clés
  - *Inbetweening*



# POURQUOI INTERPOLER?

- L'animation par images clés
  - *Inbetweening*
- Mélanger les couleurs



# POURQUOI INTERPOLER?

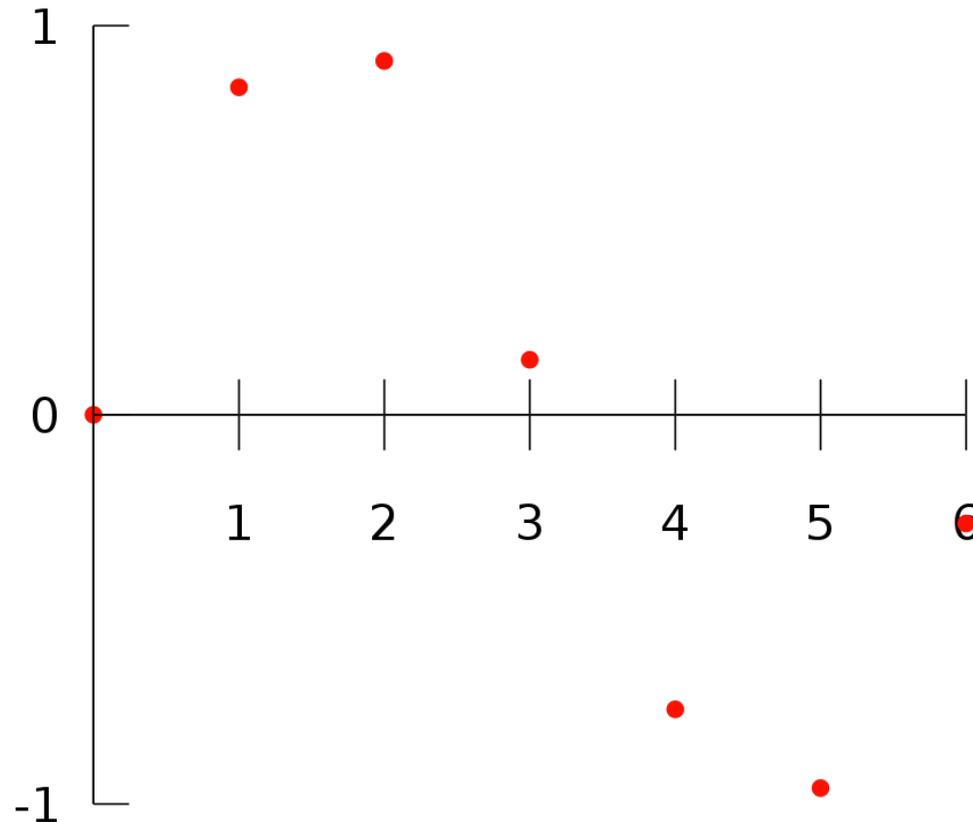
- L'animation par images clés
  - ***Inbetweening***
- Mélanger les couleurs
- Agrandir les images

# POURQUOI INTERPOLER?

- L'animation par images clés
  - *Inbetweening*
- Mélanger les couleurs
- Agrandir les images
- Etc.

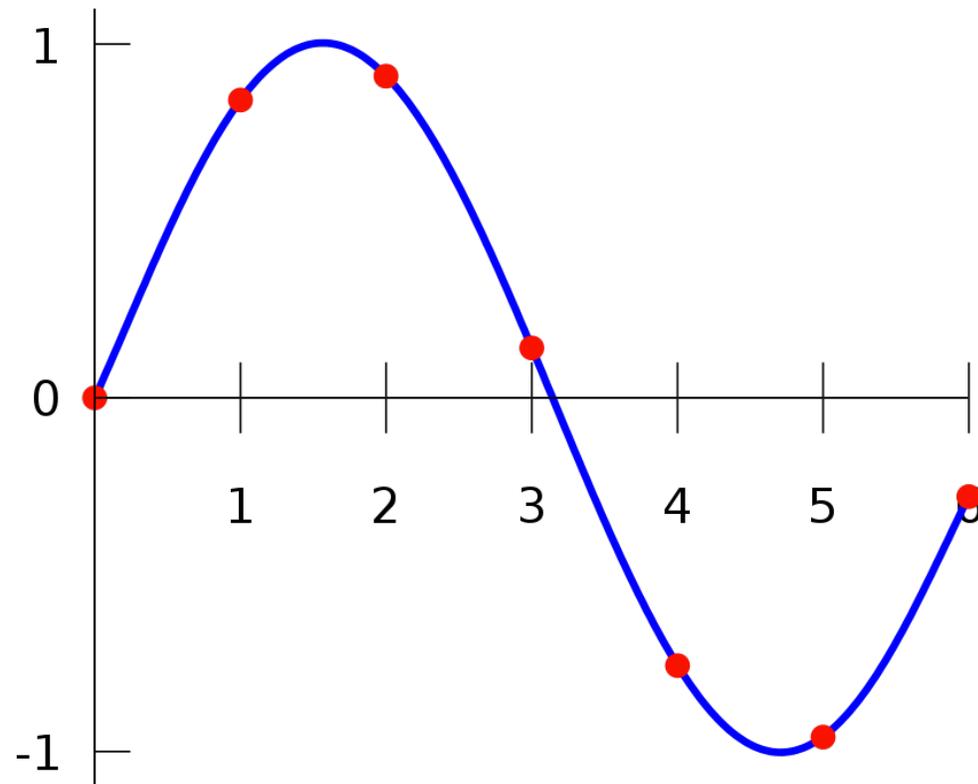
# QU'EST-CE QUE L'INTERPOLATION?

- Intuitivement: remplir les valeurs entre celles qu'on connaît



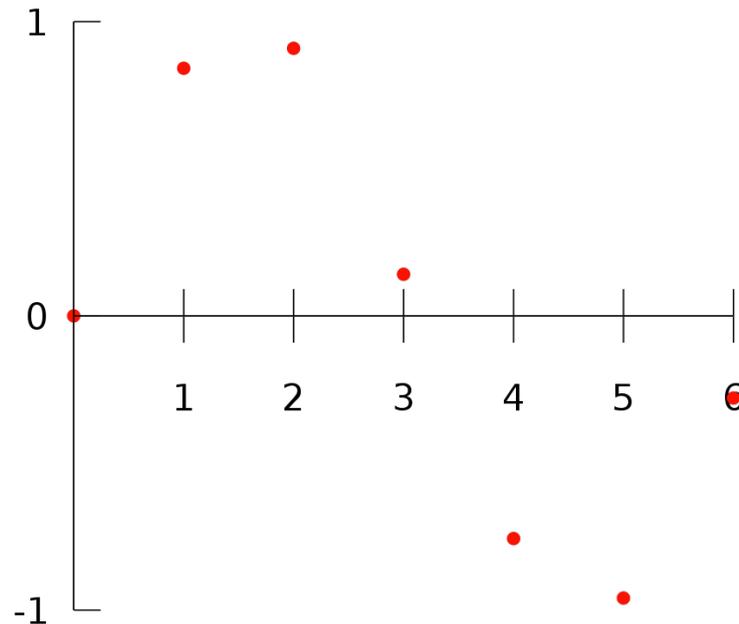
# QU'EST-CE QUE L'INTERPOLATION?

- Intuitivement: remplir les valeurs entre celles qu'on connaît



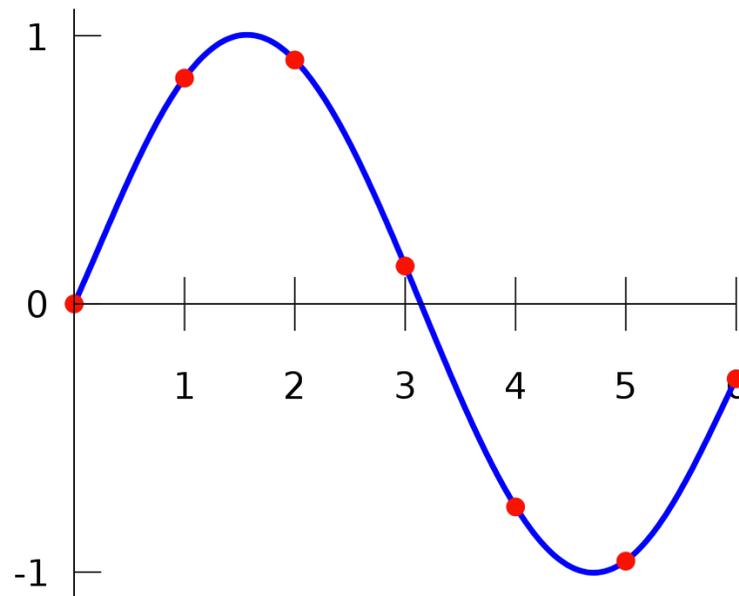
# QU'EST-CE QUE L'INTERPOLATION?

- Intuitivement: remplir les valeurs entre celles qu'on connaît
- Plus formellement:
  - Soit  $\{x_i, y_i\}, i = 1 \dots N$
  - Trouver une fonction  $f(x)$ , telle que  $f(x_i) = y_i, i = 1 \dots N$



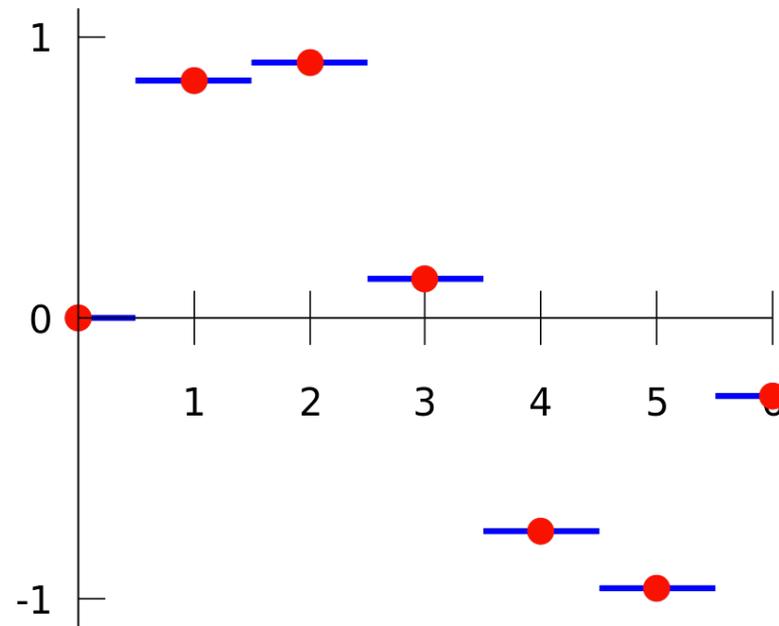
# QU'EST-CE QUE L'INTERPOLATION?

- Intuitivement: remplir les valeurs entres celles qu'on connait
- Plus formellement:
  - Soit  $\{x_i, y_i\}, i = 1 \dots N$
  - Trouver une fonction  $f(x)$ , telle que  $f(x_i) = y_i, i = 1 \dots N$



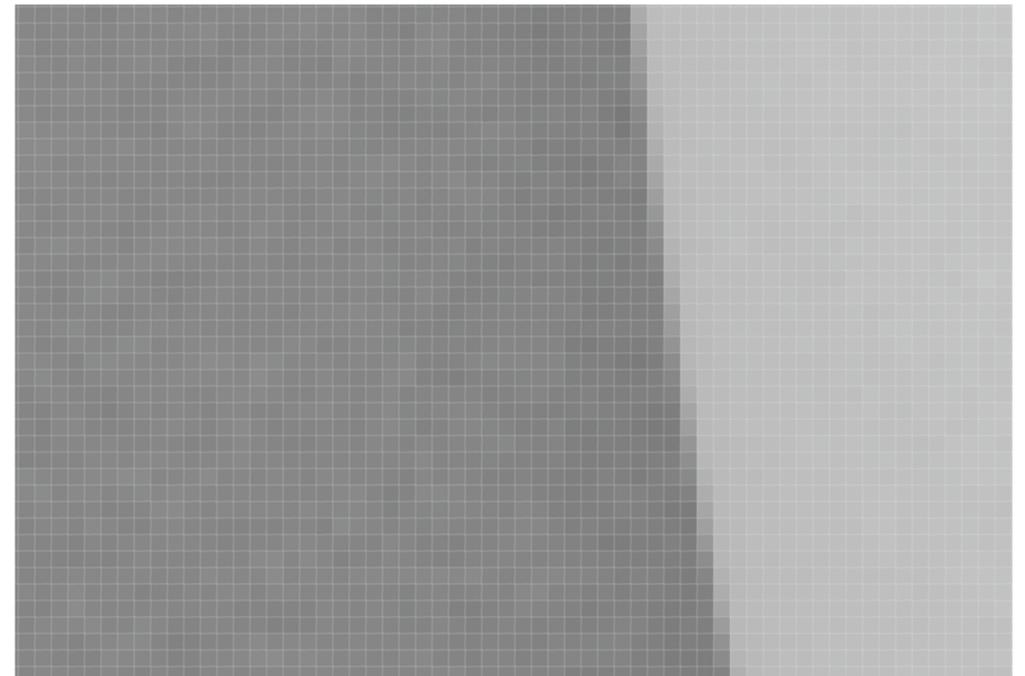
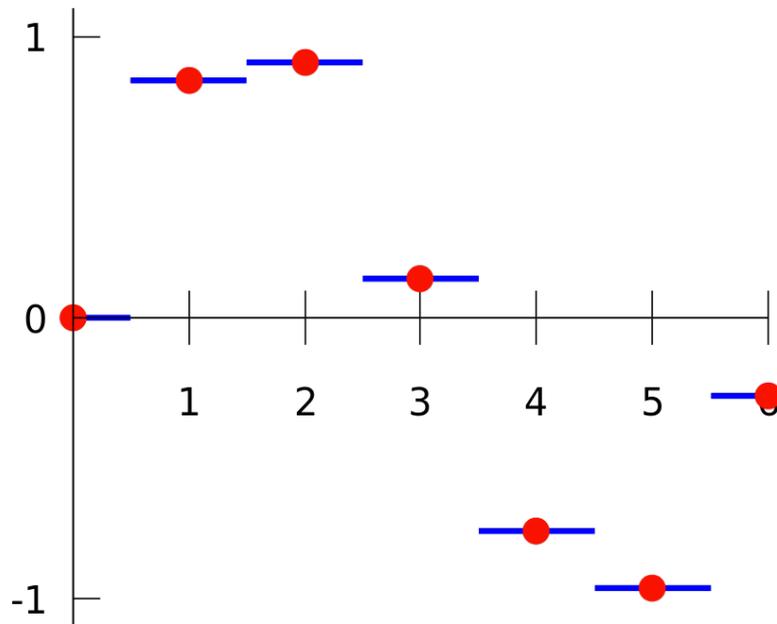
# L'INTERPOLATION CONSTANTE

- Aussi appelée « le plus proche voisin »



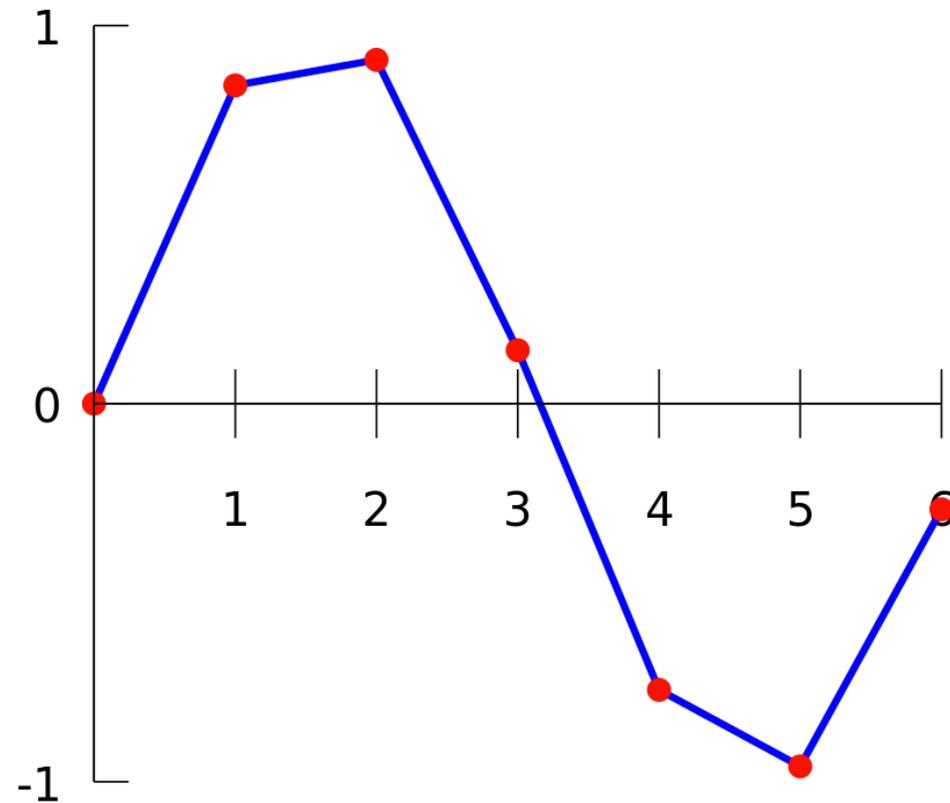
# L'INTERPOLATION CONSTANTE

- Aussi appelée « le plus proche voisin»
- Très simple
- Mais discontinue



# L'INTERPOLATION LINÉAIRE

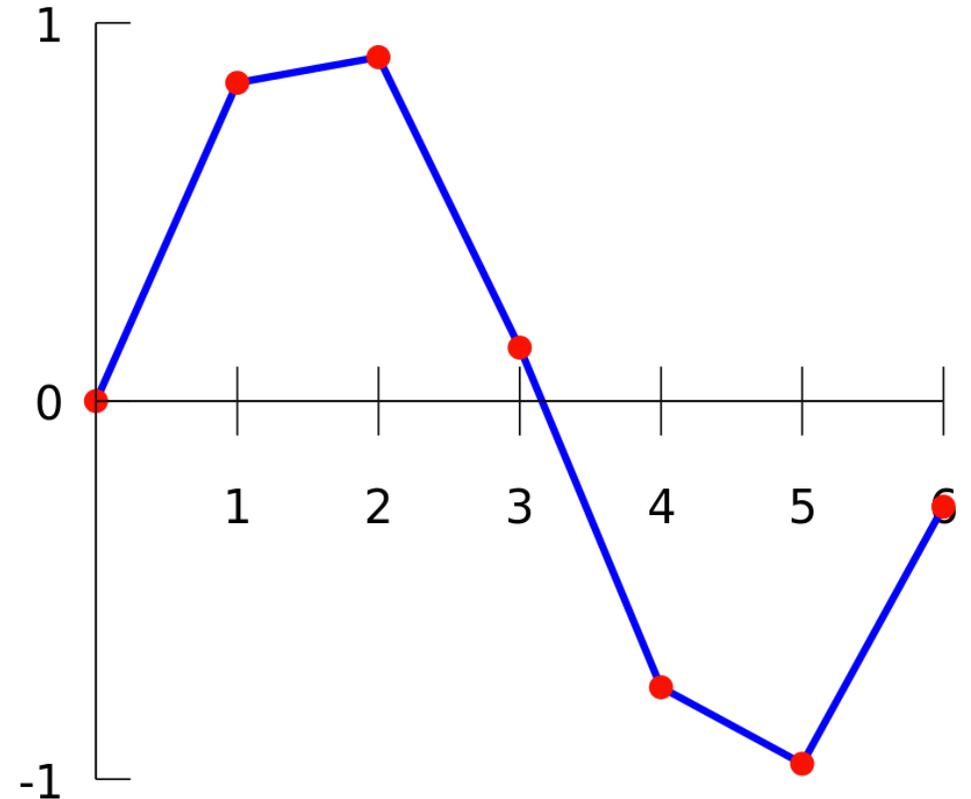
- Dessiner une ligne entre chaque paire de points consécutifs



# L'INTERPOLATION LINÉAIRE

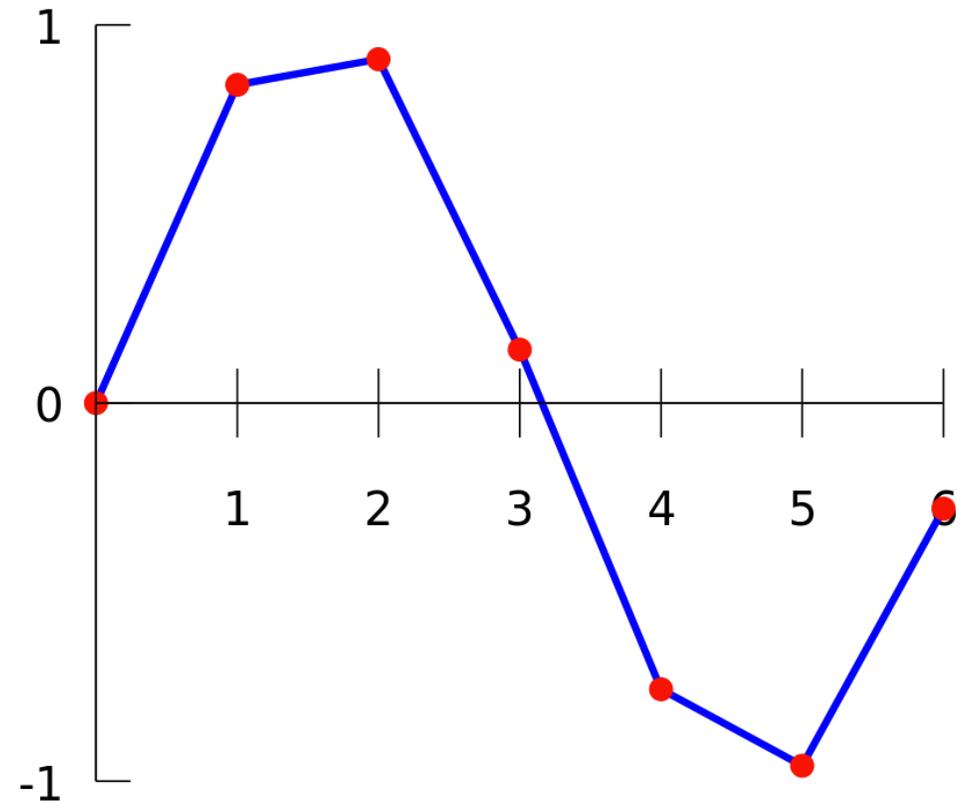
- Dessiner une ligne entre chaque paire de points consécutifs

$$\bullet f(x) = \begin{cases} a_1x + b_1, & \text{if } x_0 \leq x < x_1 \\ a_2x + b_2, & \text{if } x_1 \leq x < x_2 \\ a_3x + b_3, & \text{if } x_2 \leq x < x_3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$



# L'INTERPOLATION LINÉAIRE

- Dessiner une ligne entre chaque paire de points consécutifs
- Continue
- Mais pas lisse!
- Puis, l'animation ou couleur/etc. ne sera également pas lisse



# L'INTERPOLATION POLYNOMIALE

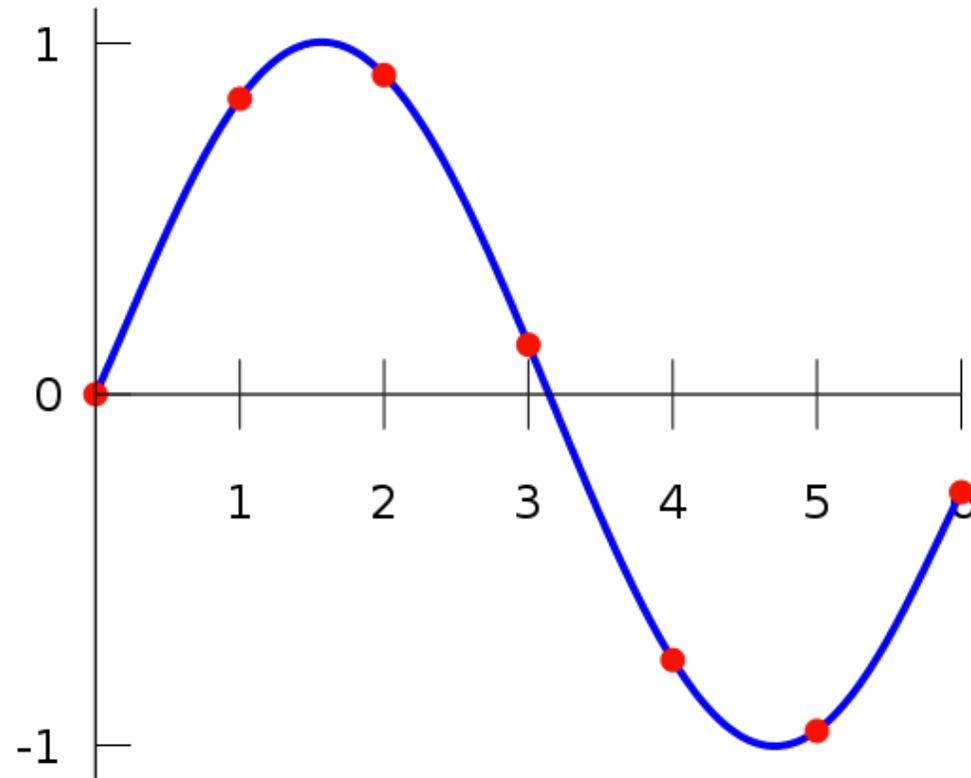
- Peut-on trouver une seule fonction qui passe par ces points?

# L'INTERPOLATION POLYNOMIALE

- Peut-on trouver une seule fonction qui passe par ces points?
- Oui:
- Pour  $n+1$  points:
  - $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
- Comment trouver  $a_i$ ?
  - $f(x_i) = y_i$
  - $n + 1$  points,  $n + 1$  inconnues

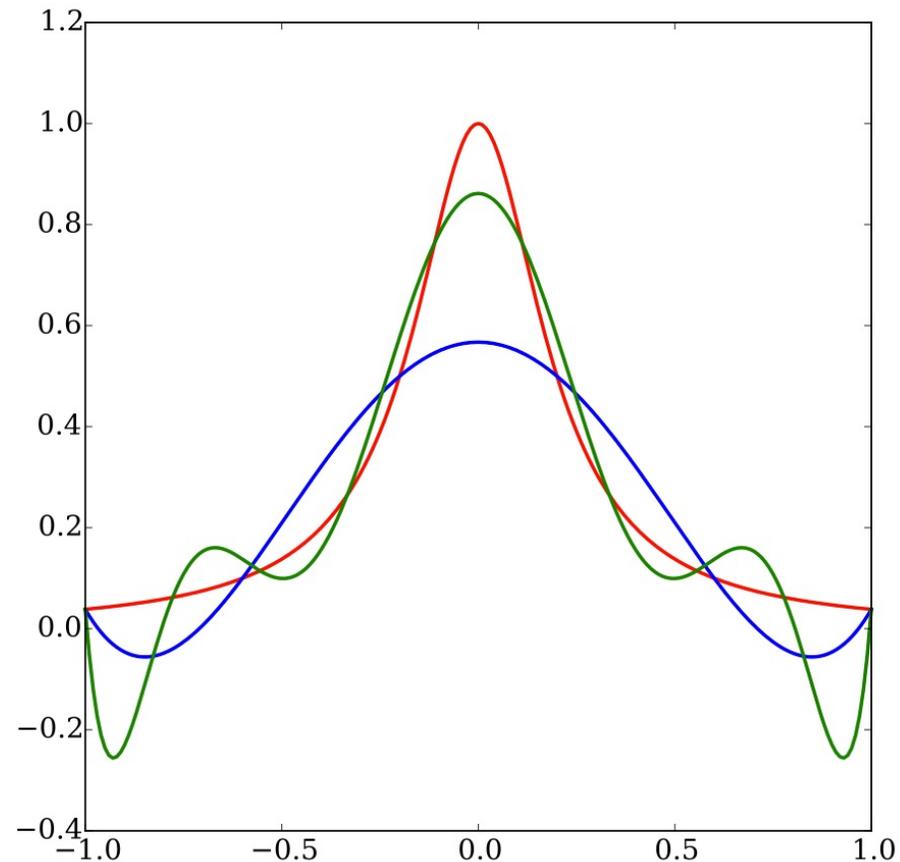
# L'INTERPOLATION POLYNOMIALE

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$



# PHÉNOMÈNE DE RUNGE

Si le degré du polynôme est plus élevé, la fonction devient ondulée



La fonction qu'on interpole

Le polynôme de degré 5

Le polynôme de degré 9

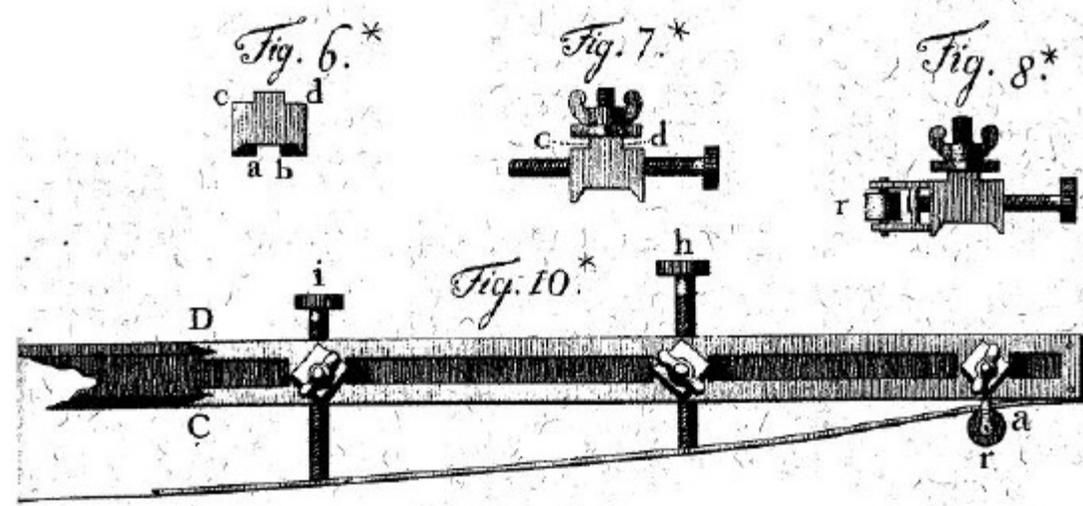
# LES SPLINES

- On limite le degré du polynôme à quelque chose petit, e.g. 3
- Utiliser les fonctions par morceaux
- On peut rendre la fonction lisse

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{1}{4}(3|x|^3 - 6x^2 + 4) & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

# LES SPLINES

- Le sens géométrique des coefficients (la base)



- On verra un exemple

# LES SPLINES

- Souvent paramétriques
  - $C(t)=[x(t),y(t)]$  or  $C(t)=[x(t),y(t),z(t)]$
- La description = fonctions de base + coefficients

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i(t) = (x(t), y(t))$$
$$x(t) = \sum_{i=0}^n P_i^x B_i(t)$$
$$y(t) = \sum_{i=0}^n P_i^y B_i(t)$$

- Les mêmes fonctions de base pour toutes les coordonnées

# LA BASE CUBIQUE HERMITE

- Les coefficients ont une signification géométrique
  - 2 positions + 2 tangentes
- Les exigences:  $C(0) = P_0, C(1) = P_1, C'(0) = T_0, C'(1) = T_1$
  
- Définir une fonction de base par contrainte:

$$C(t) = P_0 h_{00}(t) + P_1 h_{01}(t) + T_0 h_{10}(t) + T_1 h_{11}(t)$$

# LA BASE CUBIQUE HERMITE

$$C(t) = P_0 h_{00}(t) + P_1 h_{01}(t) + T_0 h_{10}(t) + T_1 h_{11}(t)$$

- Pour avoir  $C(0) = P_0, C(1) = P_1, C'(0) = T_0, C'(1) = T_1$

$$h_{ij}(t): i, j = 0, 1, t \in [0, 1]$$

curve	$C(0)$	$C(1)$	$C'(0)$	$C'(1)$
$h_{00}(t)$	1	0	0	0
$h_{01}(t)$	0	1	0	0
$h_{10}(t)$	0	0	1	0
$h_{11}(t)$	0	0	0	1

# LA BASE CUBIQUE HERMITE

- On peut satisfaire les contraintes avec

$$h_{ij}(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

- 4 équations linéaires, 4 inconnues

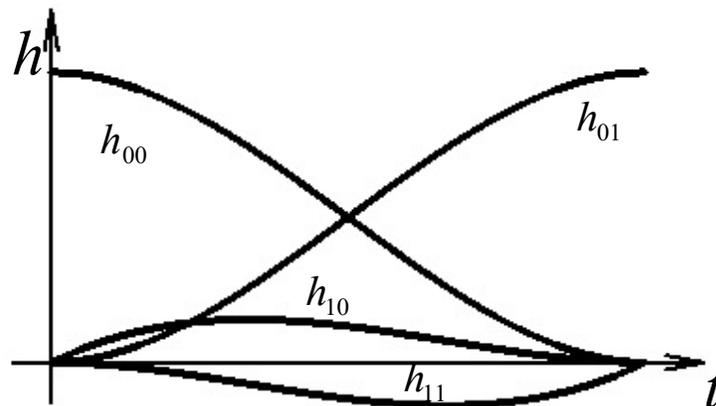
$$h_{ij}(t): i, j = 0, 1, t \in [0, 1]$$

curve	$C(0)$	$C(1)$	$C'(0)$	$C'(1)$
$h_{00}(t)$	1	0	0	0
$h_{01}(t)$	0	1	0	0
$h_{10}(t)$	0	0	1	0
$h_{11}(t)$	0	0	0	1

# LA BASE CUBIQUE HERMITE

Les quatre polynômes qui satisfont les contraintes

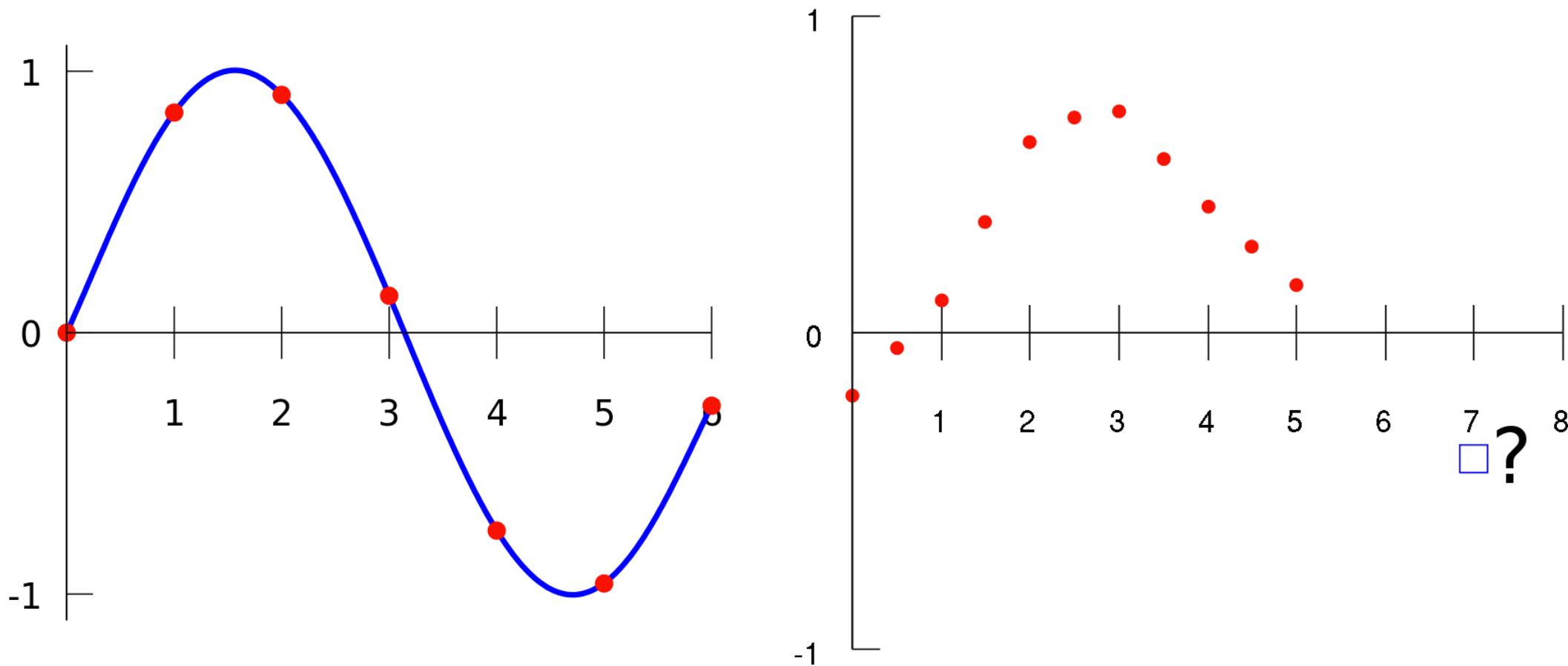
$$\begin{aligned} h_{00}(t) &= t^2(2t - 3) + 1 & h_{01}(t) &= -t^2(2t - 3) \\ h_{10}(t) &= t(t - 1)^2 & h_{11}(t) &= t^2(t - 1) \end{aligned}$$



# INTERPOLATION VS EXTRAPOLATION

L'interpolation – deviner les valeur entre celles qu'on connait

L'extrapolation – prédire le comportement d'une fonction en dehors des limites des données



# EXTRAPOLATION

MY HOBBY: EXTRAPOLATING

