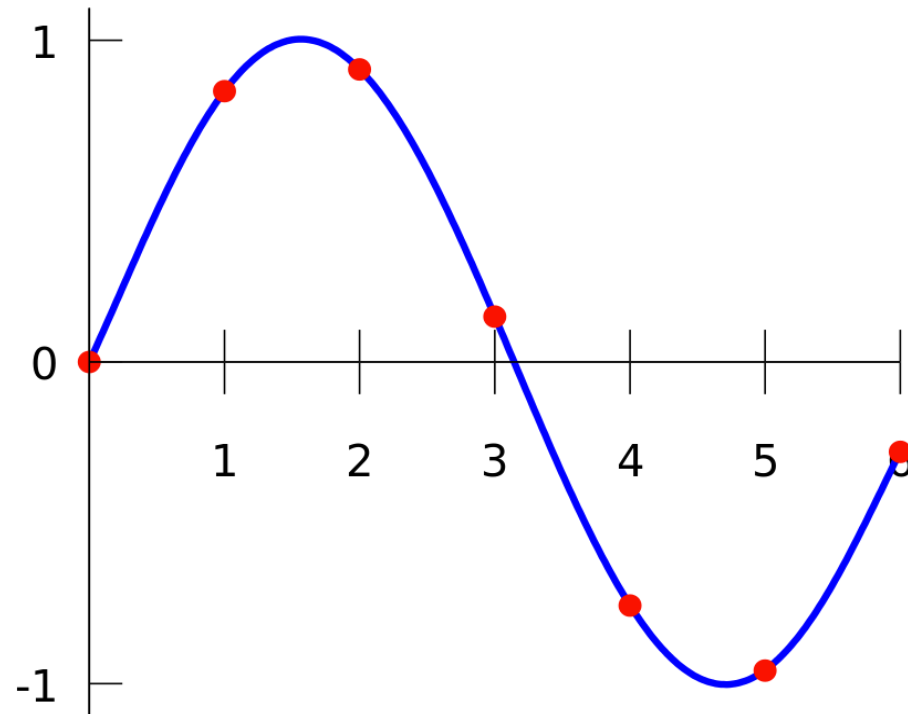


IFT 3355: INFOGRAPHIE INTERPOLATION

Livre de référence: G: 9

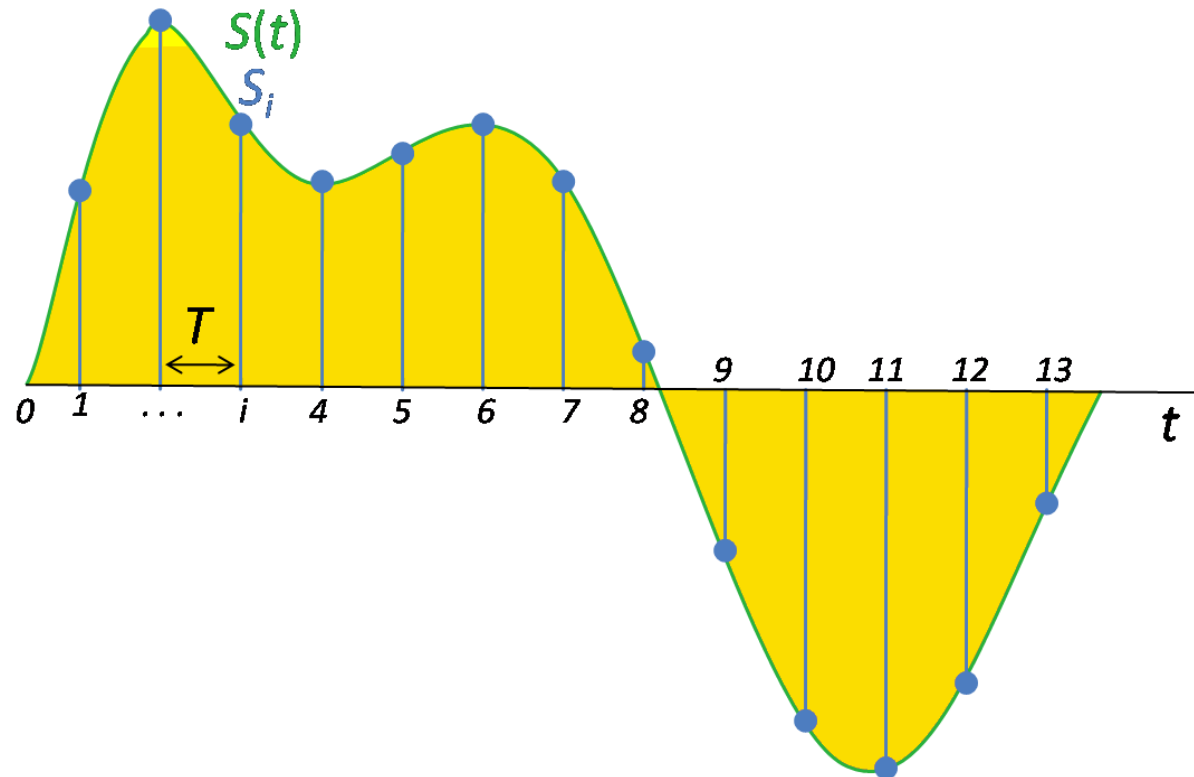


<http://tinyurl.com/ift3355>

Mikhail Bessmeltsev

CONTINU VS DISCRET

- Continu $\rightarrow$ Discret: *Échantillonnage*
- Discret $\rightarrow$ Continu: *Reconstruction/Interpolation*



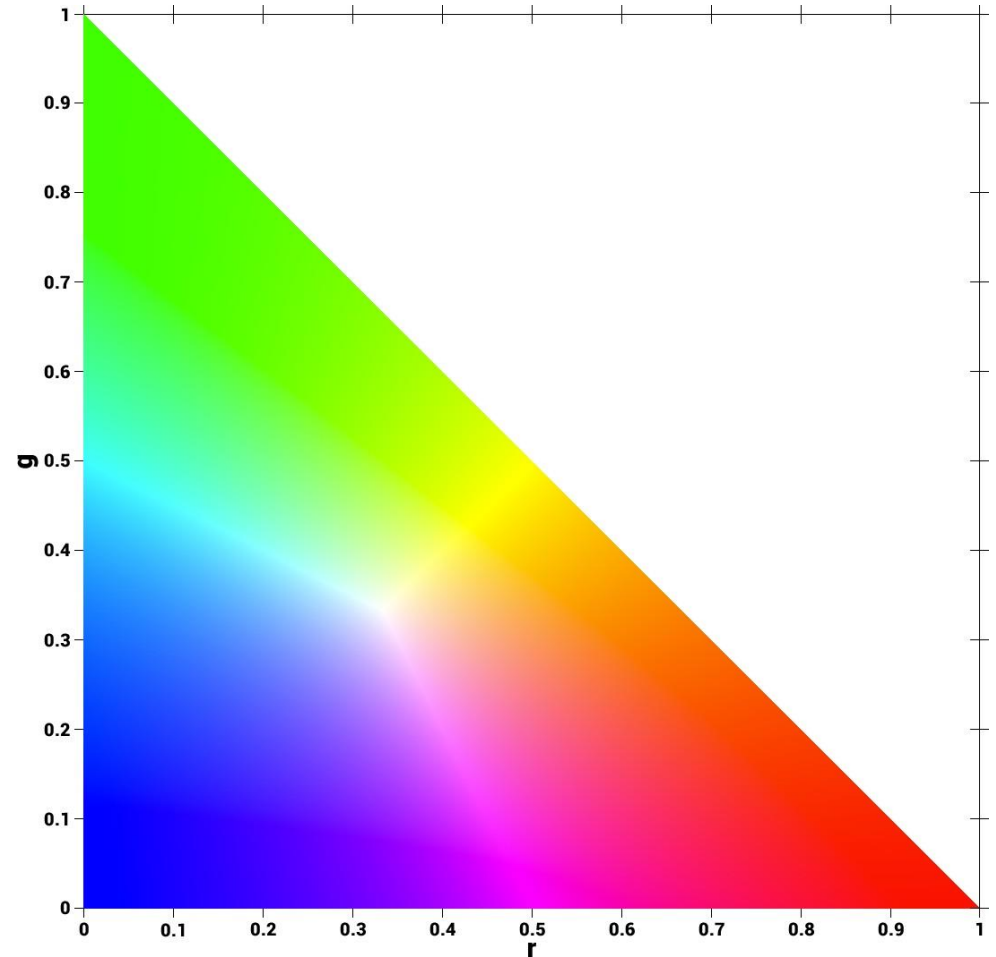
POURQUOI INTERPOLER?

- L'animation par images clés
 - *Inbetweening*



POURQUOI INTERPOLER?

- L'animation par images clés
 - *Inbetweening*
- Mélanger les couleurs



POURQUOI INTERPOLER?

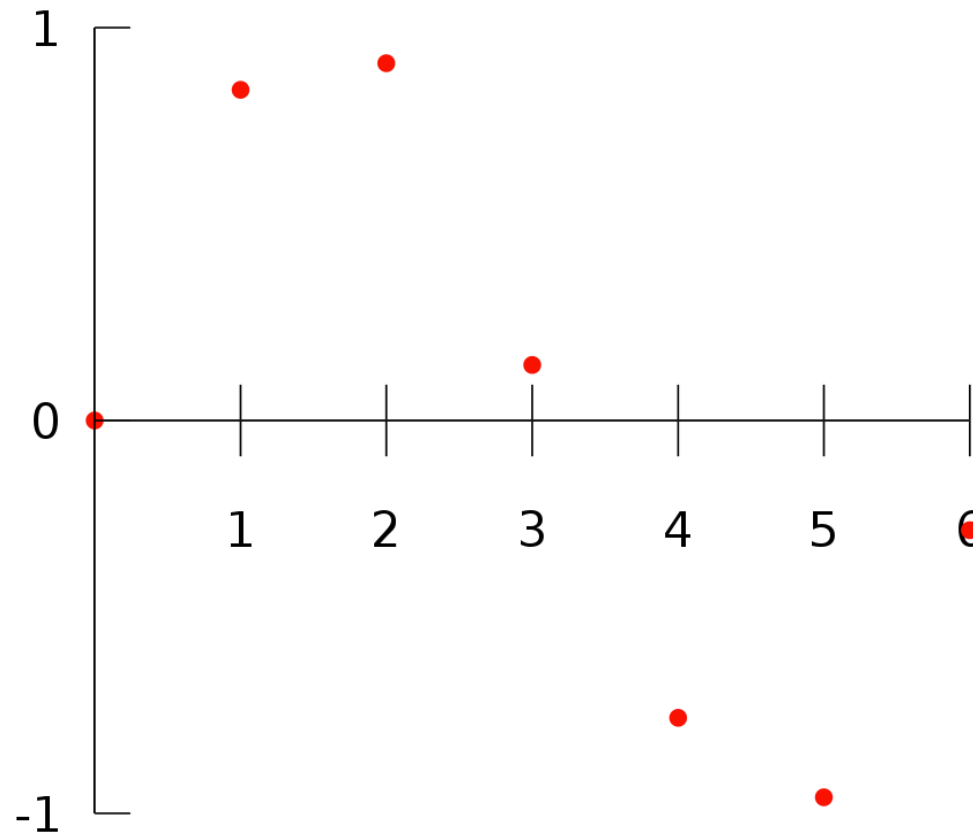
- L'animation par images clés
 - *Inbetweening*
- Mélanger les couleurs
- Agrandir les images

POURQUOI INTERPOLER?

- L'animation par images clés
 - *Inbetweening*
- Mélanger les couleurs
- Agrandir les images
- Etc.

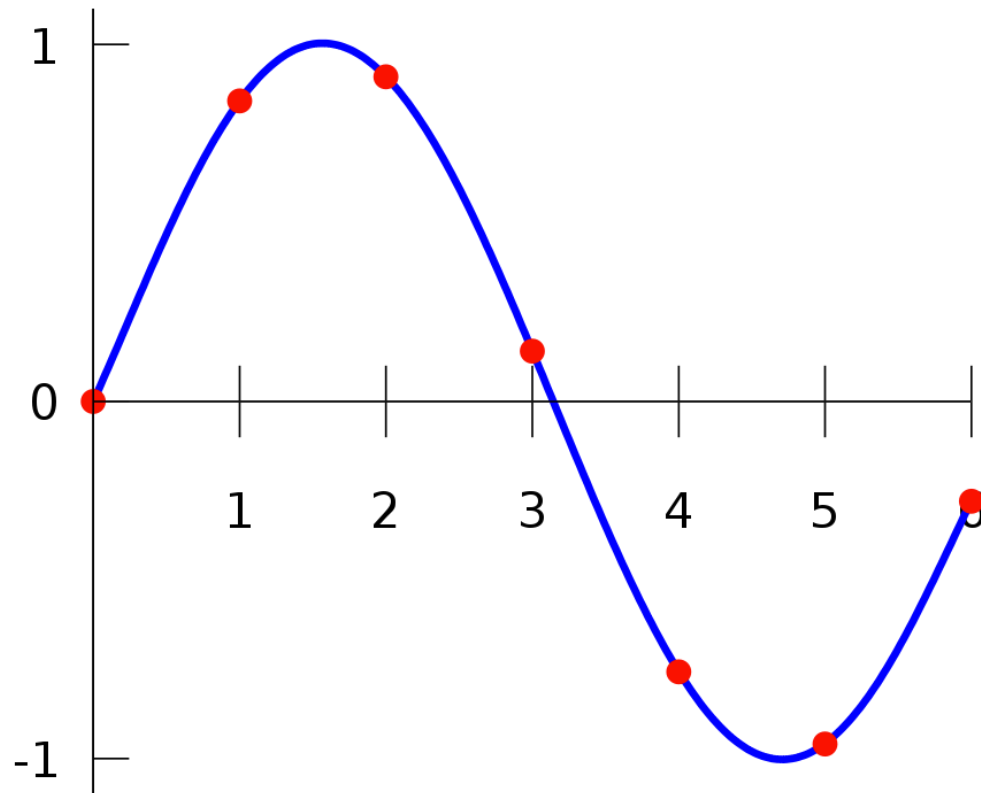
QU'EST-CE QUE L'INTERPOLATION?

- Intuitivement: remplir les valeurs entre celles qu'on connaît



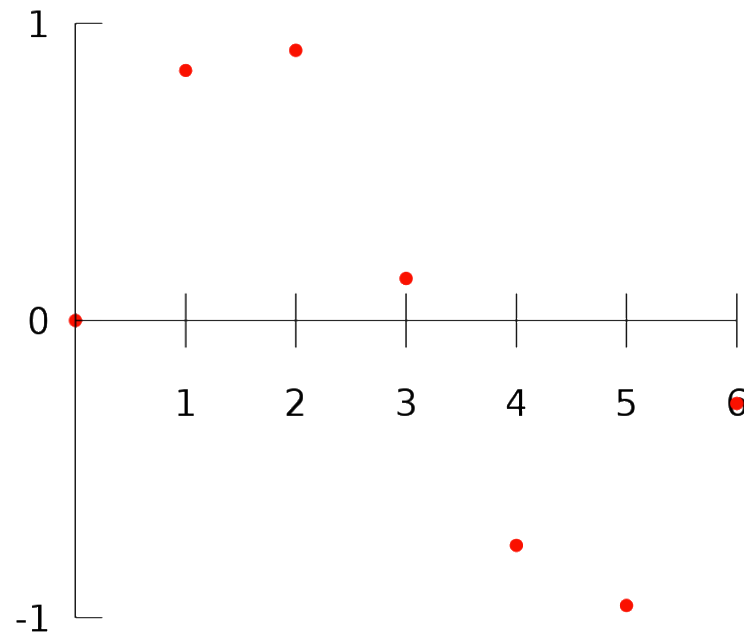
QU'EST-CE QUE L'INTERPOLATION?

- Intuitivement: remplir les valeurs entre celles qu'on connaît



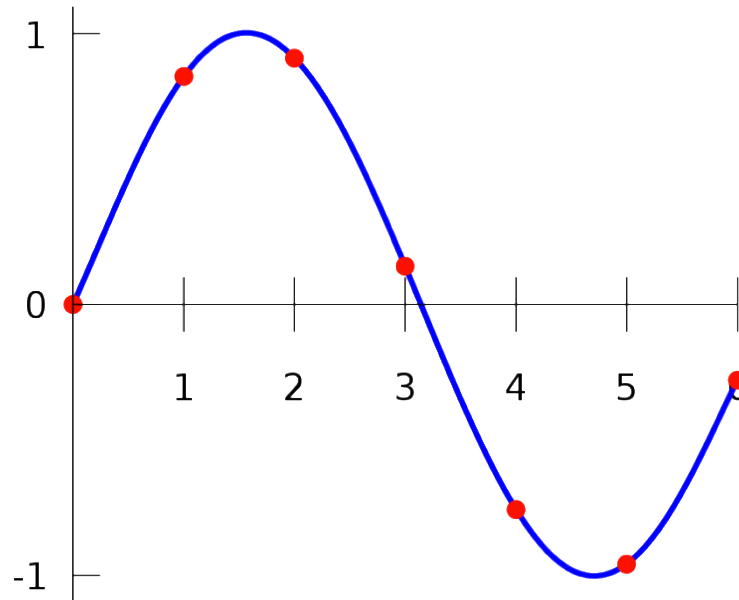
QU'EST-CE QUE L'INTERPOLATION?

- Intuitivement: remplir les valeurs entre celles qu'on connaît
- Plus formellement:
 - Soit $\{x_i, y_i\}, i = 1 \dots N$
 - Trouver une fonction $f(x)$, telle que $f(x_i) = y_i, i = 1 \dots N$



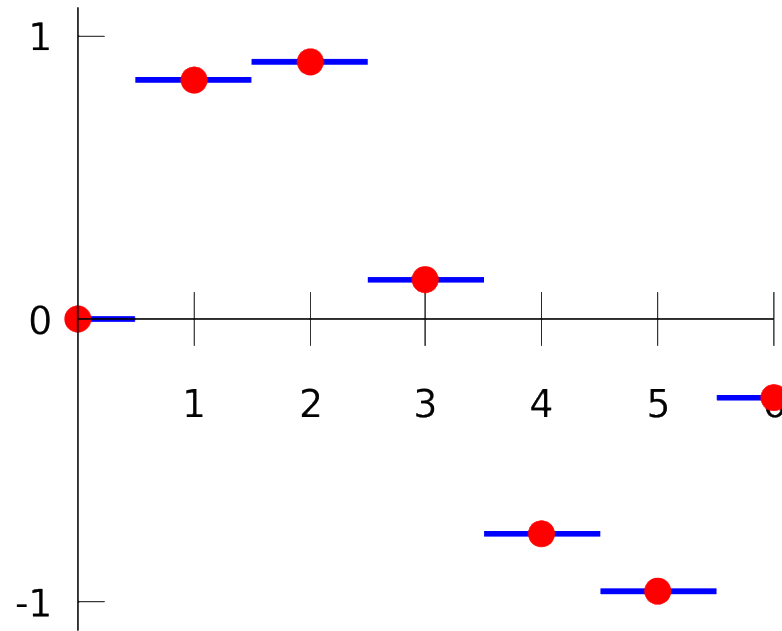
QU'EST-CE QUE L'INTERPOLATION?

- Intuitivement: remplir les valeurs entres celles qu'on connaît
- Plus formellement:
 - Soit $\{x_i, y_i\}, i = 1 \dots N$
 - Trouver une fonction $f(x)$, telle que $f(x_i) = y_i, i = 1 \dots N$



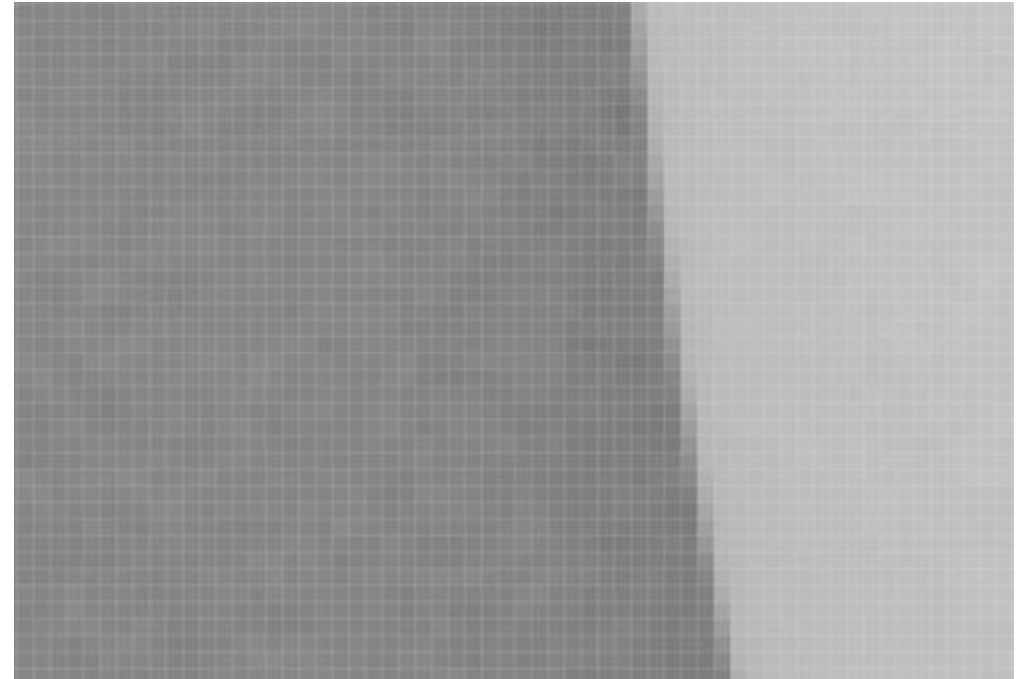
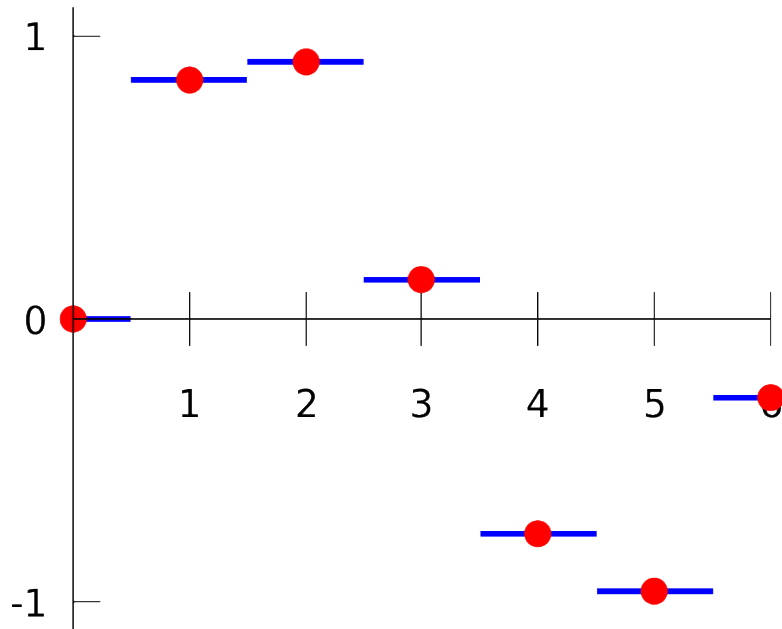
L'INTERPOLATION CONSTANTE

- Aussi appelée « voisin le plus proche »



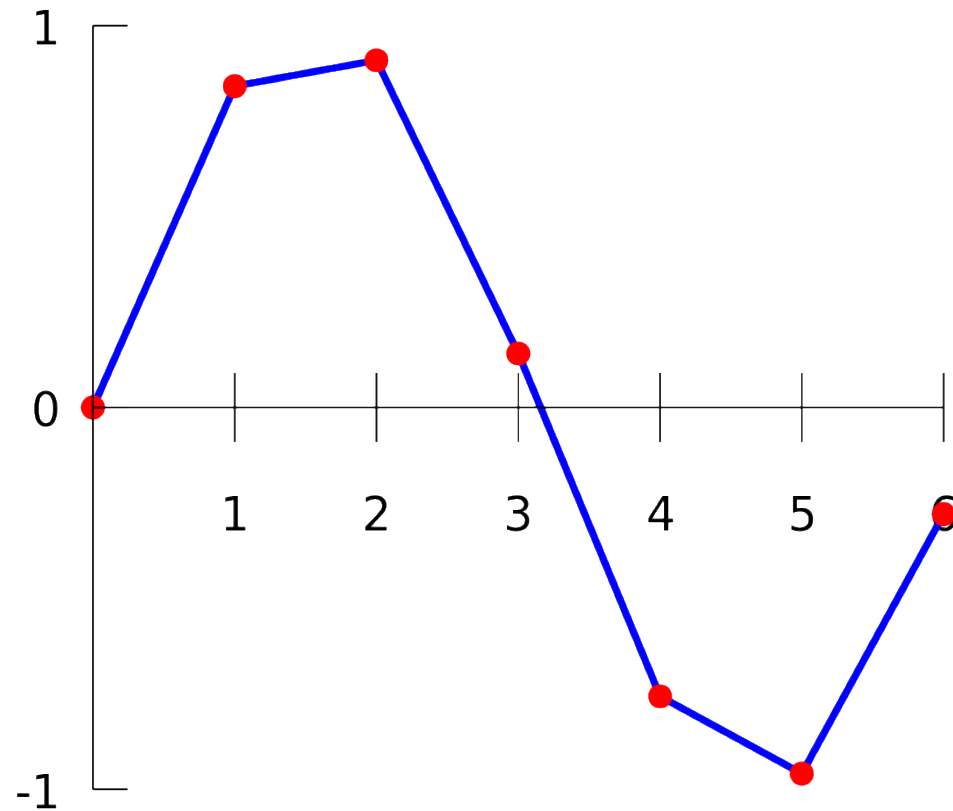
L'INTERPOLATION CONSTANTE

- Aussi appelée « le plus proche voisin»
- Très simple
- Mais discontinue



L'INTERPOLATION LINÉAIRE

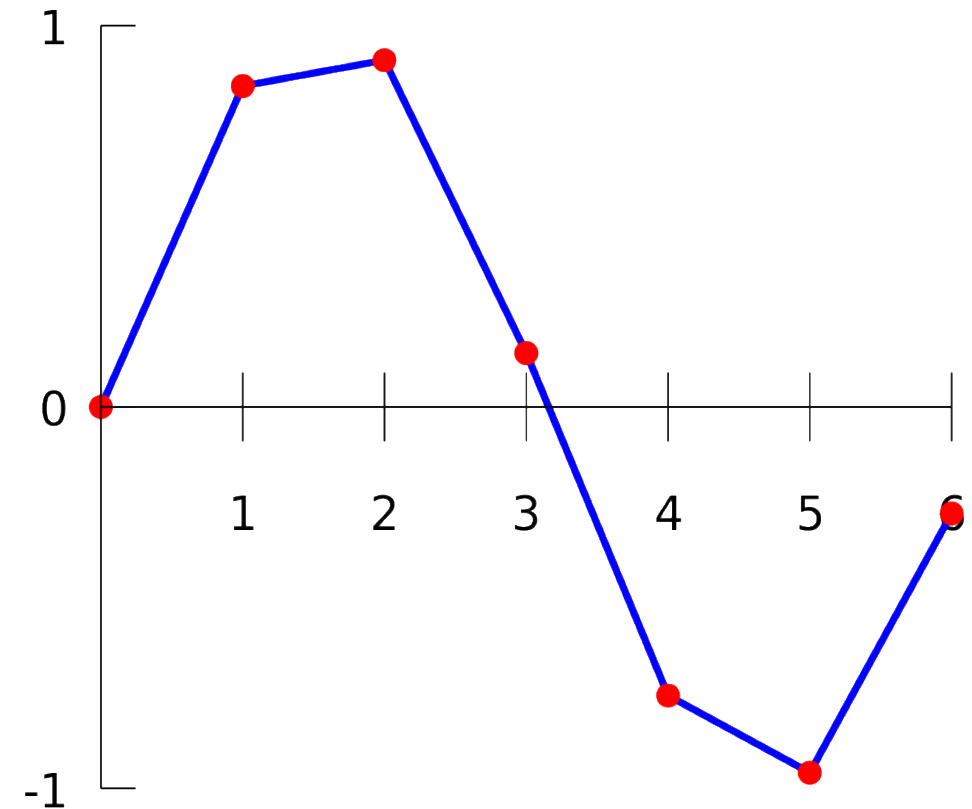
- Dessiner une ligne entre chaque paire de points consécutifs



L'INTERPOLATION LINÉAIRE

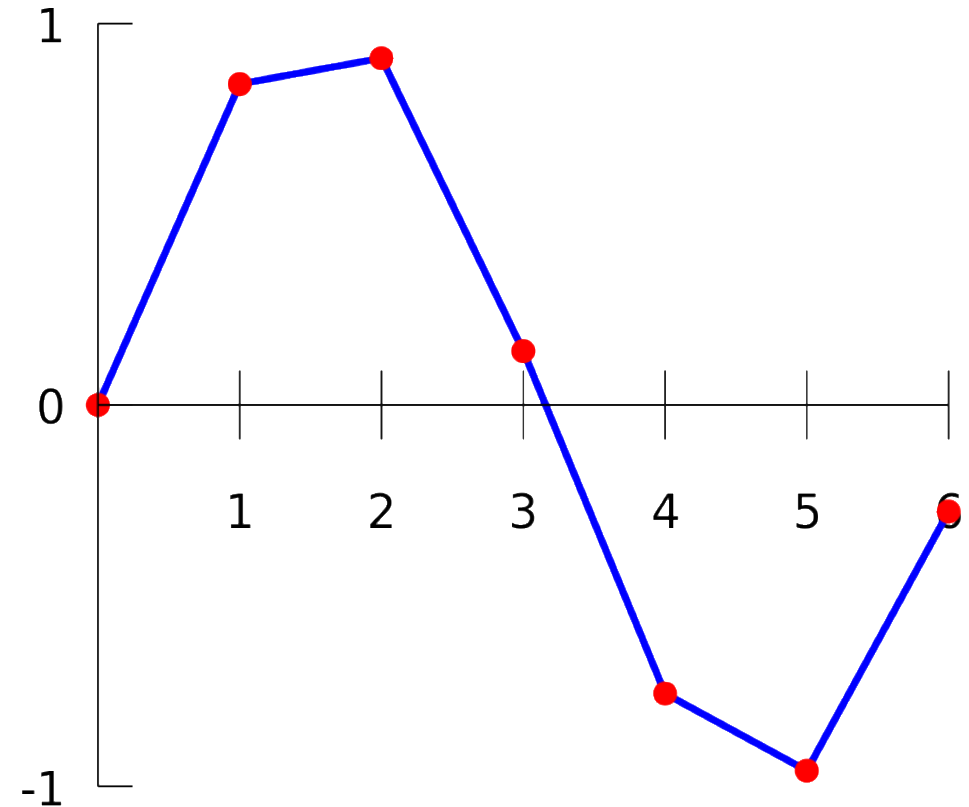
- Dessiner une ligne entre chaque paire de points consécutifs

$$\bullet f(x) = \begin{cases} a_1x + b_1, & \text{si } x_0 \leq x < x_1 \\ a_2x + b_2, & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ a_3x + b_3, & \text{si } x_2 \leq x < x_3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$



L'INTERPOLATION LINÉAIRE

- Dessiner une ligne entre chaque paire de points consécutifs
- Continue
- Mais pas lisse!
- Puis, l'animation ou couleur/etc.
ne sera également pas lisse

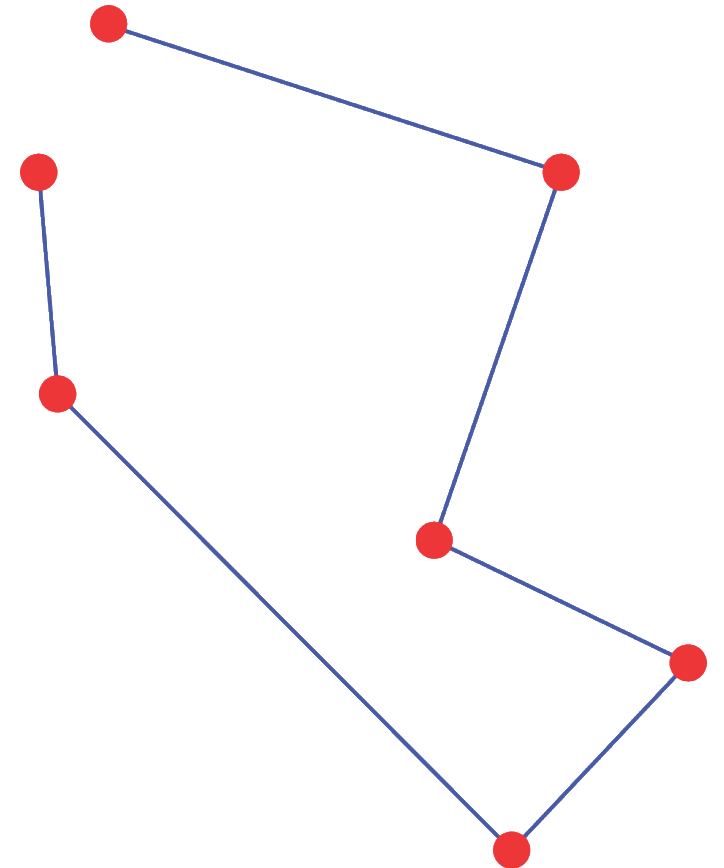


L'INTERPOLATION LINÉAIRE

- Dessiner une ligne entre chaque paire de points consécutifs

$$\bullet f(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \text{ si } t_0 \leq t < t_1 \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}, \text{ si } t_1 \leq t < t_2 \\ \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}, \text{ si } t_2 \leq t < t_3 \\ \dots \end{cases}$$

Continue?



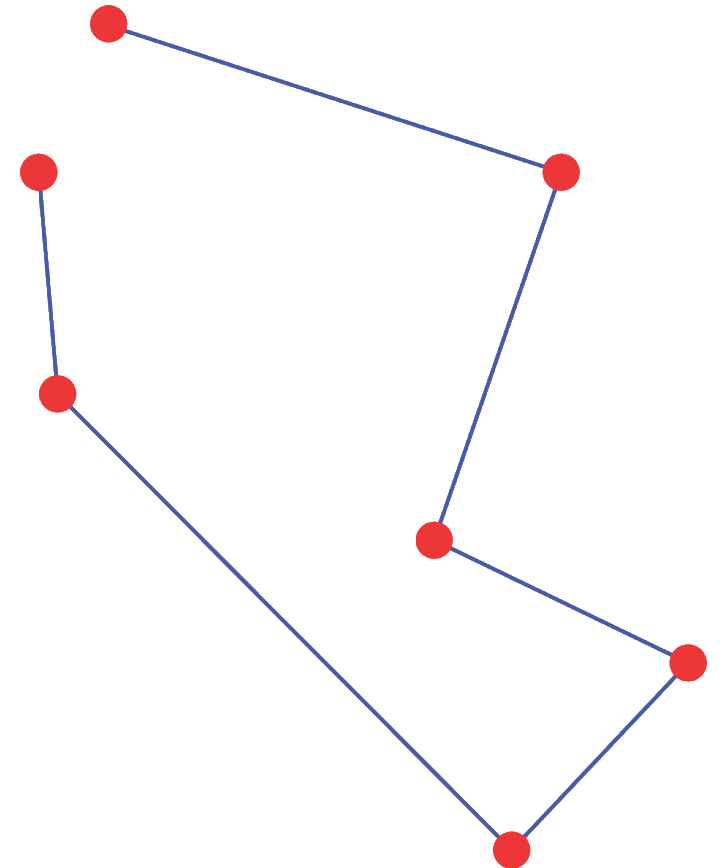
L'INTERPOLATION LINÉAIRE

- Dessiner une ligne entre chaque paire de points consécutifs

$$f(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, & \text{si } t_0 \leq t < t_1 \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}, & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}, & \text{si } t_2 \leq t < t_3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

$$f(t_1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$f(t_2) = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} t_3 + \begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$$



L'INTERPOLATION POLYNOMIALE

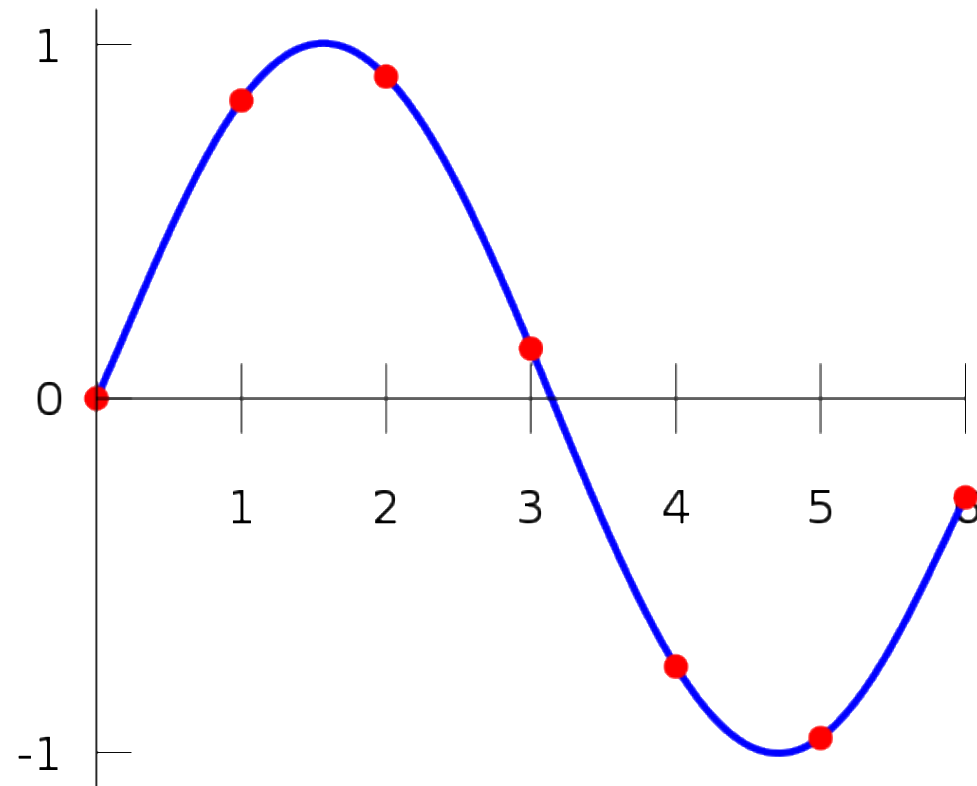
- Peut-on trouver une seule fonction qui passe par ces points?

L'INTERPOLATION POLYNOMIALE

- Peut-on trouver une seule fonction qui passe par ces points?
- Oui:
- Pour $n+1$ points:
 - $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$
- Comment trouver a_i ?
 - $f(x_i) = y_i$
 - $n + 1$ points, $n + 1$ inconnues

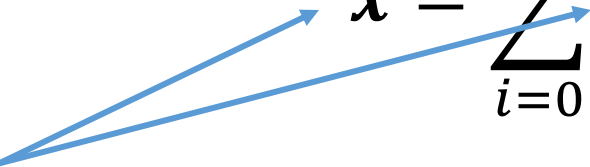
L'INTERPOLATION POLYNOMIALE

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$



LES COURBES POLYNOMIALES

les vecteurs

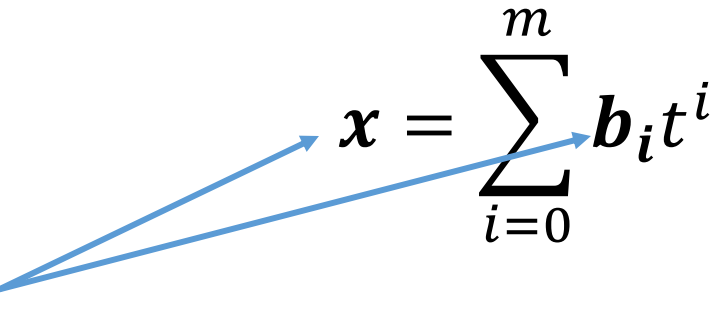
$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^m \mathbf{b} t^i$$


2D:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^m \begin{pmatrix} b_{x,i} \\ b_{y,i} \end{pmatrix} t^i$$

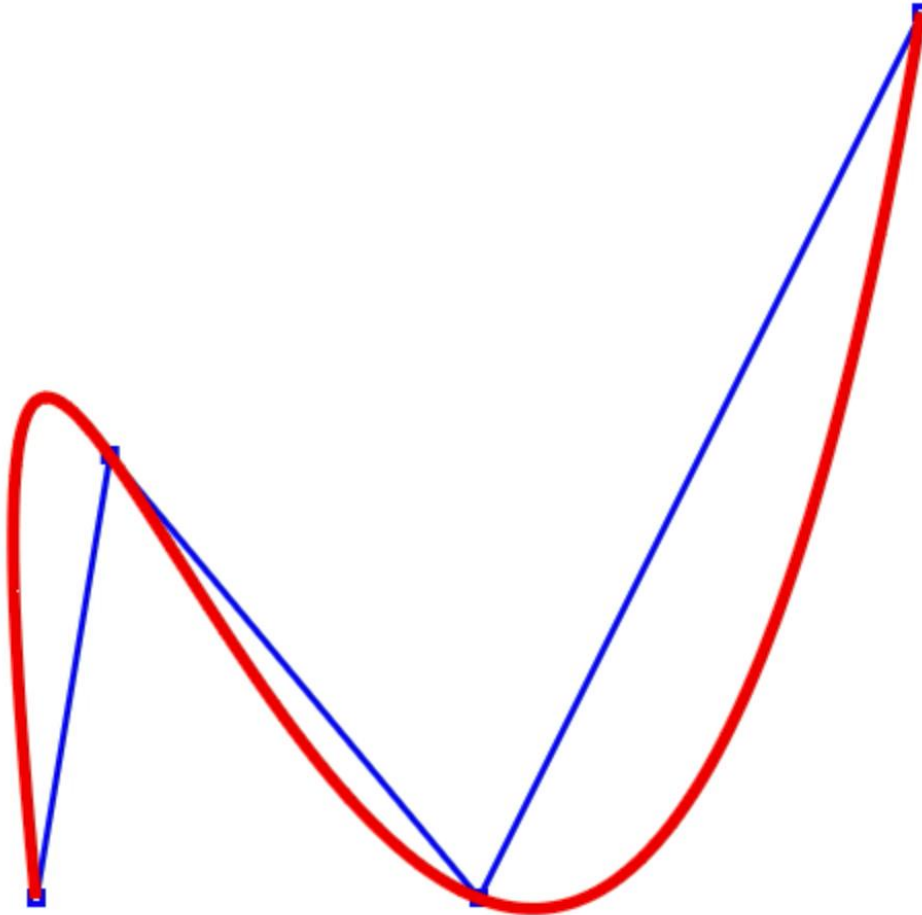
LES COURBES POLYNOMIALES

les vecteurs $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i t^i$

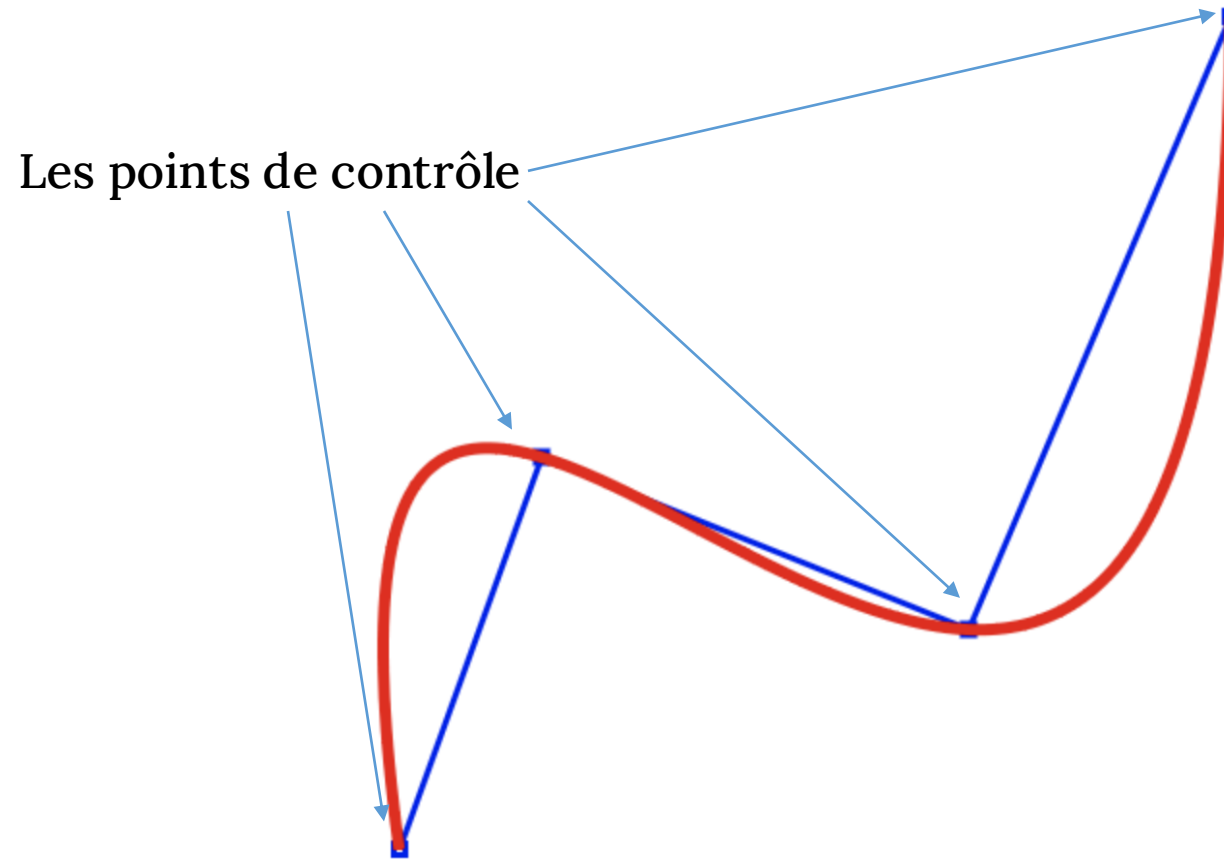


- + Facile à calculer pour chaque t
- + Les coefficients $\mathbf{b}_i$ décrivent la courbe uniquement
- Les coefficients ne sont pas intuitifs
 - Phénomène de Runge

PLUS INTUITIF?

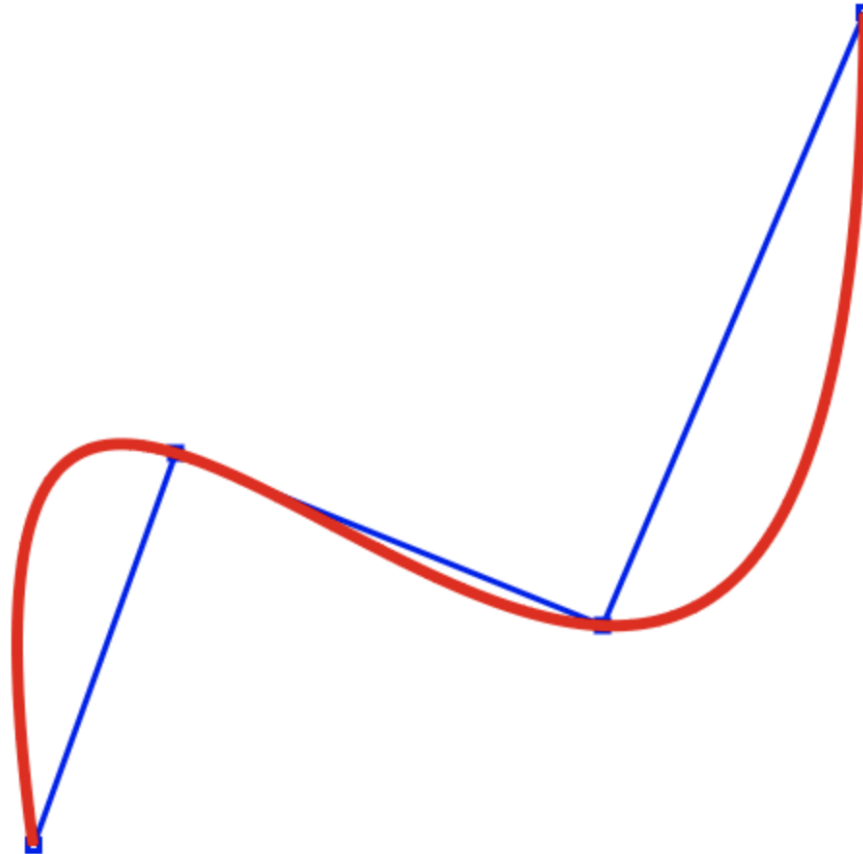


PLUS INTUITIF?



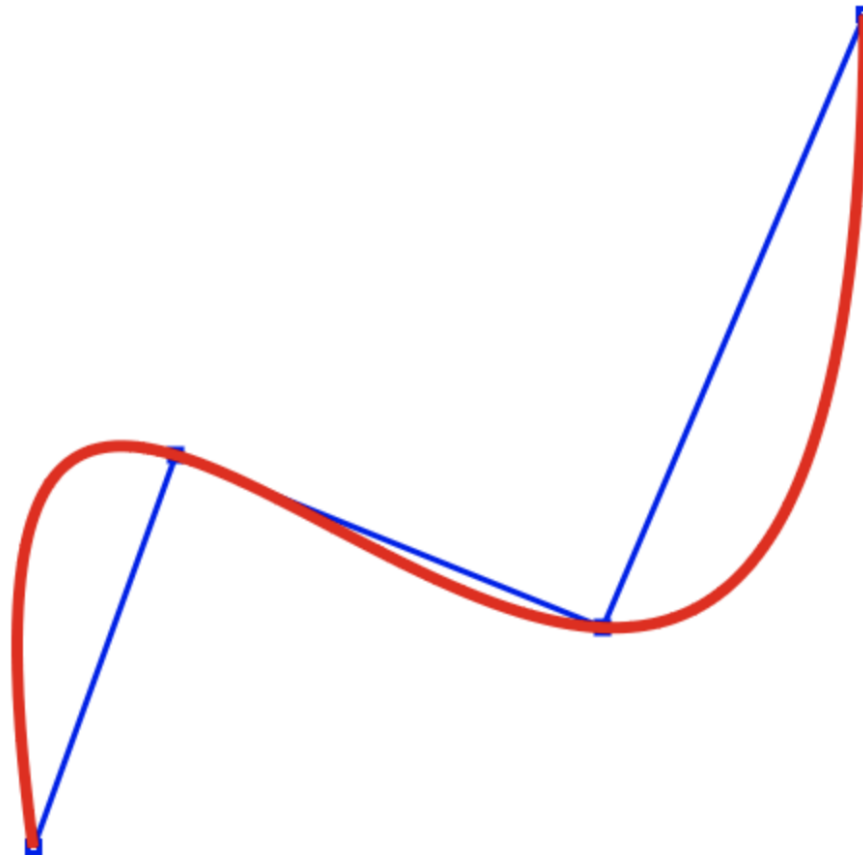
INTERPOLER LES POINTS DE CONTRÔLE

degré du polynôme = nombre de points d'entrée - 1



INTERPOLER LES POINTS DE CONTRÔLE

degré du polynôme = nombre de points d'entrée - 1



Interpolation:

$$x(t_i) = P_i$$

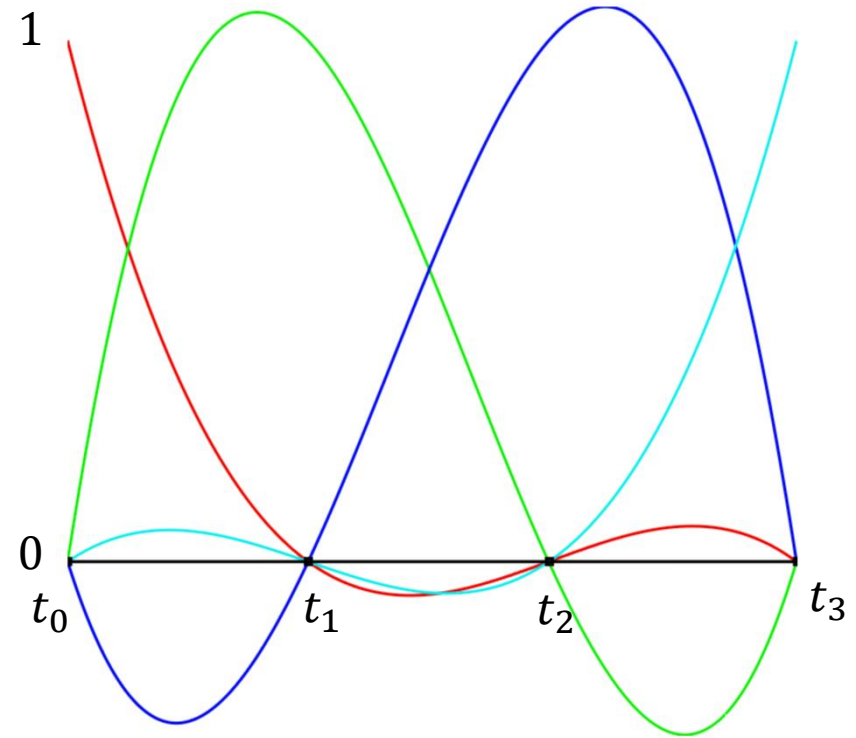
$$i = 0, \dots, m$$

FONCTIONS DE BASE : POLYNÔMES DE LAGRANGE

- Pour les valeurs $t_0, \dots, t_m$ on peut trouver les polynômes $L_i^m(t_k) = \begin{cases} 1, \text{ si } i = k \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$

Donc

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^m L_i^m(t) \mathbf{P}_i$$



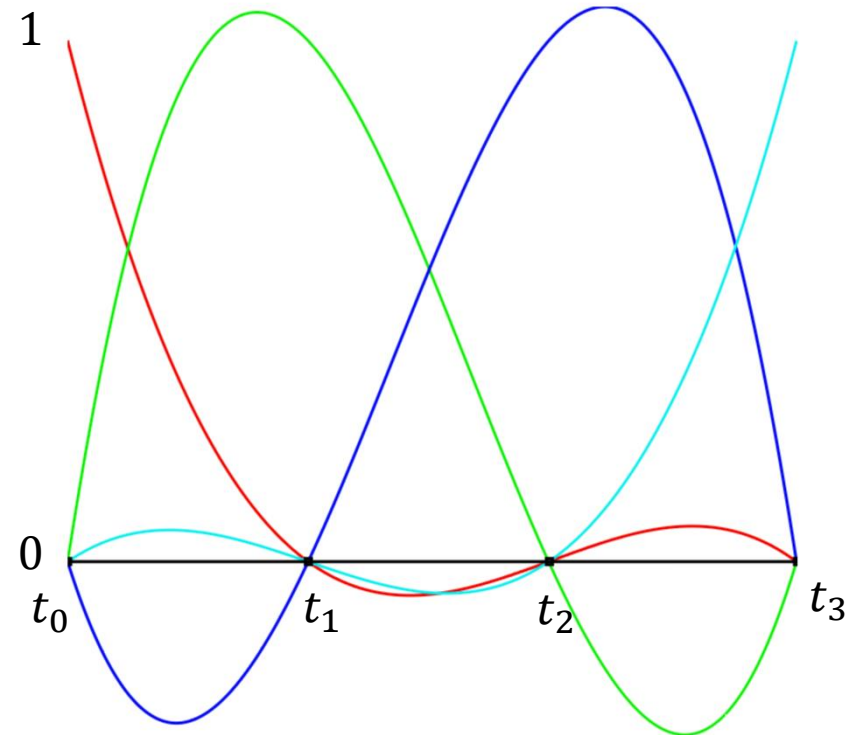
FONCTIONS DE BASE : POLYNÔMES DE LAGRANGE

- Pour les valeurs $t_0, \dots, t_m$ on peut trouver les polynômes $L_i^m(t_k) = \begin{cases} 1, \text{ si } i = k \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$

Donc

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^m L_i^m(t) \mathbf{P}_i$$

Les points de contrôle
sont les coefficients!



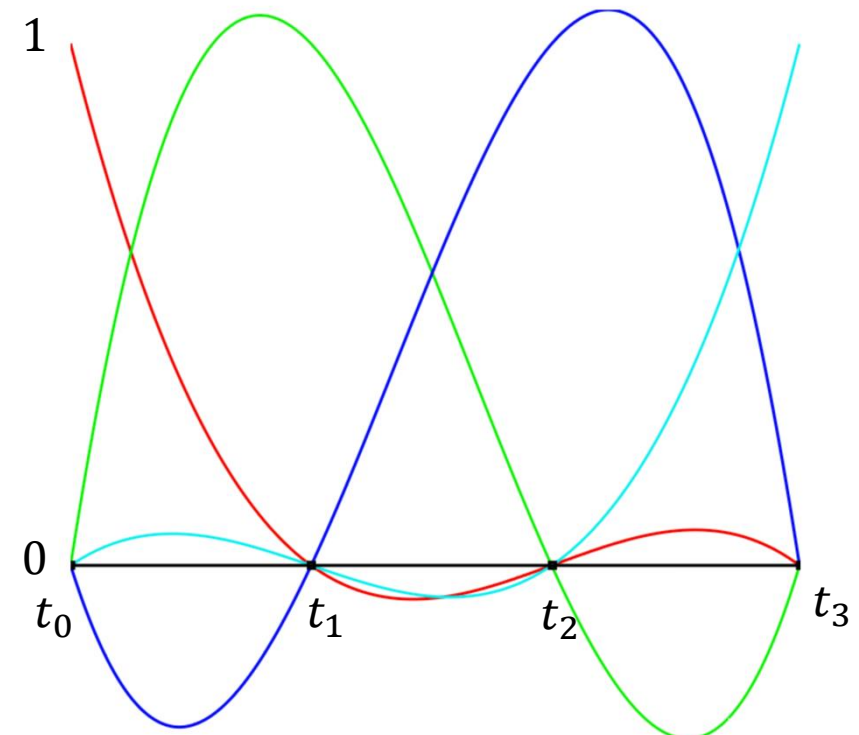
FONCTIONS DE BASE : POLYNÔMES DE LAGRANGE

$$L_i^m(t) = \prod_{j=0, \dots, m; j \neq i} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

Donc

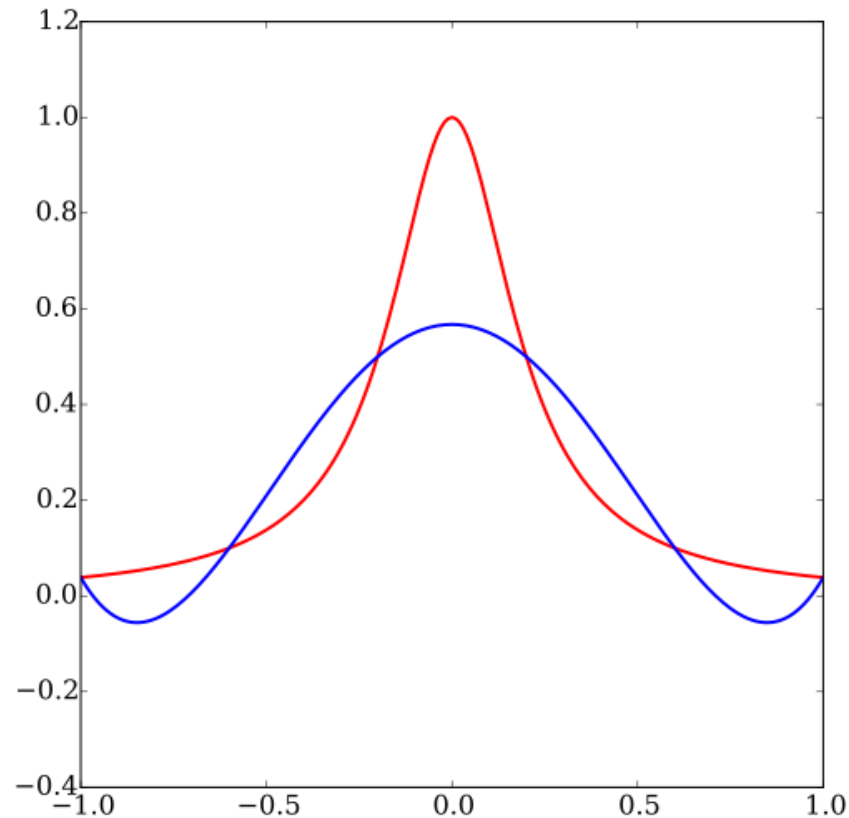
$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^m L_i^m(t) \mathbf{P}_i$$

Les points de contrôle
sont les coefficients!



PHÉNOMÈNE DE RUNGE

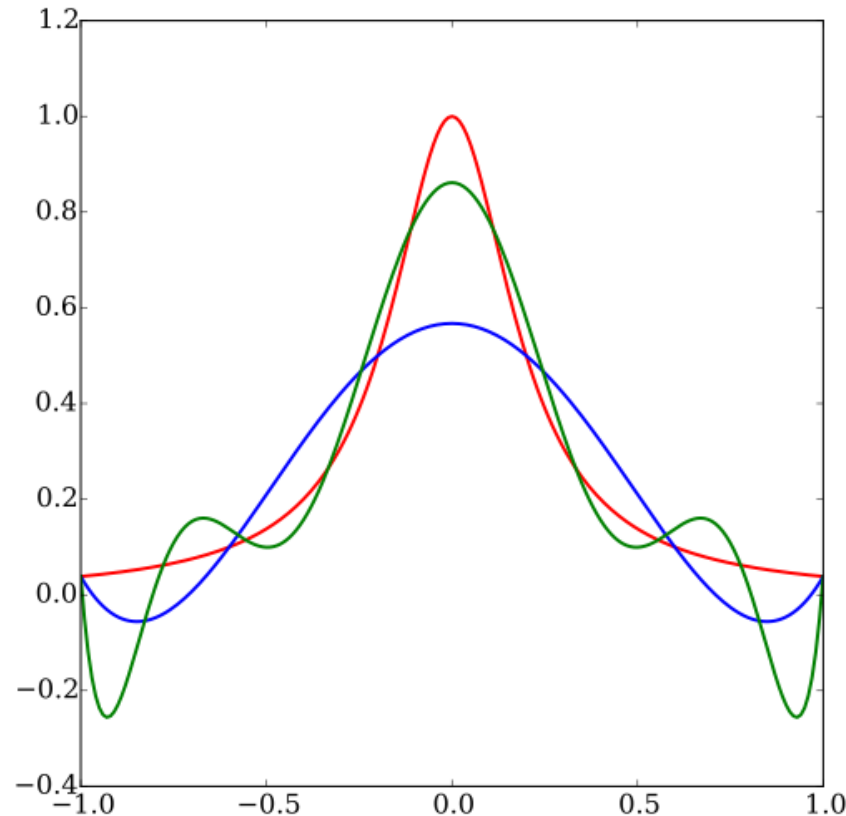
On veut être plus proche de **la fonction qu'on interpole?**



Le polynôme de degré 5

PHÉNOMÈNE DE RUNGE

Si le degré du polynôme est plus élevé, la fonction devient ondulée



La fonction qu'on interpole

Le polynôme de degré 5

Le polynôme de degré 9

LES SPLINES

- On limite le degré du polynôme à quelque chose petit, e.g. 3
- Utiliser les fonctions par morceaux
- On peut rendre la fonction lisse

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{1}{4}(3|x|^3 - 6x^2 + 4) & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

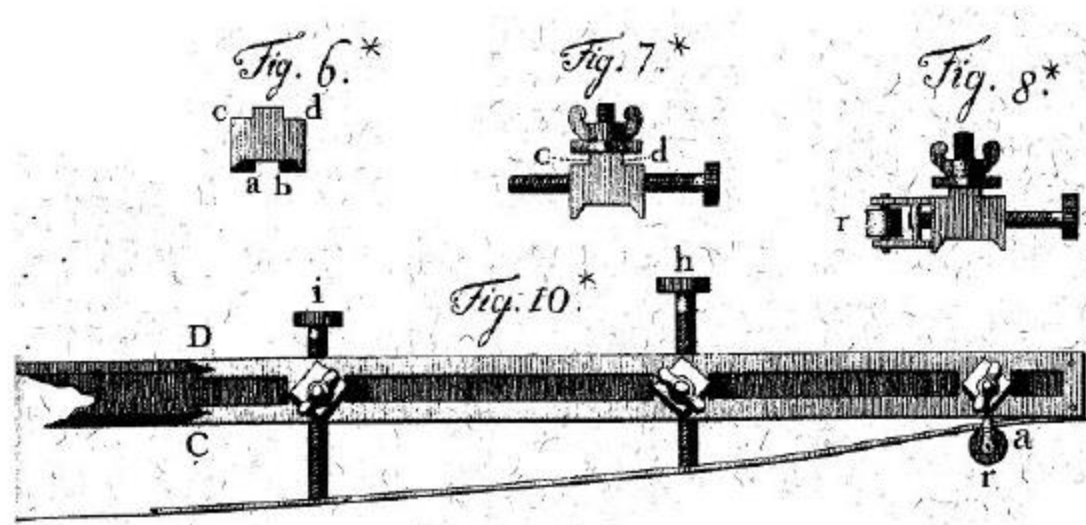
LES SPLINES

- On limite le degré du polynôme à quelque chose petit, e.g. 2 ou 3
- Utiliser les fonctions par morceaux
- On peut rendre la fonction lisse

$$x(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, si\ t_0 \leq t < t_1 \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix}, si\ t_1 \leq t < t_2 \\ \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} e_3 \\ f_3 \end{pmatrix}, si\ t_2 \leq t < t_3 \\ \dots \end{cases}$$

LES SPLINES

- Le sens géométrique des coefficients (la base)



- On verra un exemple

LES SPLINES

Paramétriques: $\mathbf{x}(t) = [x(t), y(t)]$ or $\mathbf{x}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$

La description = fonctions de base + vecteur coefficients

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i(t)$$

LA BASE CUBIQUE HERMITE

- Les coefficients ont une signification géométrique

- 2 positions + 2 tangentes

- Les exigences:
$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) = P_0 \\ \mathbf{x}(1) = P_1 \\ \mathbf{x}'(0) = T_0 \\ \mathbf{x}'(1) = T_1 \end{cases}$$

- Définir une fonction de base par contrainte:

$$\mathbf{x}(t) = P_0 h_{00}(t) + P_1 h_{01}(t) + T_0 h_{10}(t) + T_1 h_{11}(t)$$

LA BASE CUBIQUE HERMITE

$$C(t) = P_0 h_{00}(t) + P_1 h_{01}(t) + T_0 h_{10}(t) + T_1 h_{11}(t)$$

- Pour avoir $C(0) = P_0, C(1) = P_1, C'(0) = T_0, C'(1) = T_1$

$$h_{ij}(t): i, j = 0, 1, t \in [0, 1]$$

curve	$C(0)$	$C(1)$	$C'(0)$	$C'(1)$
$h_{00}(t)$	1	0	0	0
$h_{01}(t)$	0	1	0	0
$h_{10}(t)$	0	0	1	0
$h_{11}(t)$	0	0	0	1

LA BASE CUBIQUE HERMITE

- On peut satisfaire les contraintes avec

$$h_{ij}(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

- 4 équations linéaires, 4 inconnues

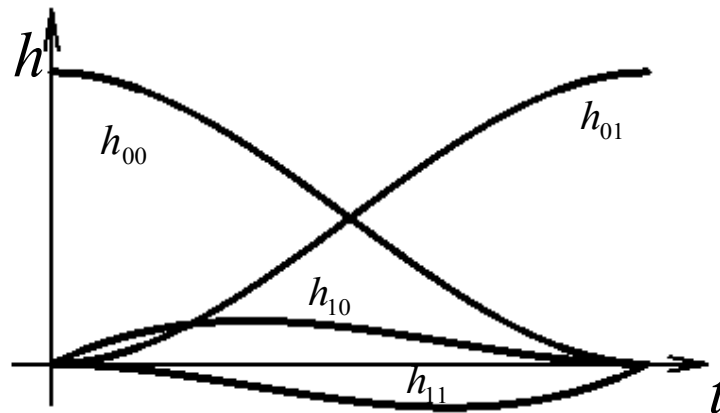
$$h_{ij}(t): i, j = 0, 1, t \in [0, 1]$$

curve	$C(0)$	$C(1)$	$C'(0)$	$C'(1)$
$h_{00}(t)$	1	0	0	0
$h_{01}(t)$	0	1	0	0
$h_{10}(t)$	0	0	1	0
$h_{11}(t)$	0	0	0	1

LA BASE CUBIQUE HERMITE

Les quatre polynômes qui satisfont les contraintes

$$\begin{aligned} h_{00}(t) &= t^2(2t - 3) + 1 & h_{01}(t) &= -t^2(2t - 3) \\ h_{10}(t) &= t(t - 1)^2 & h_{11}(t) &= t^2(t - 1) \end{aligned}$$



COURBES DE BÉZIER

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i(t)$$

La même forme qu'avant, mais

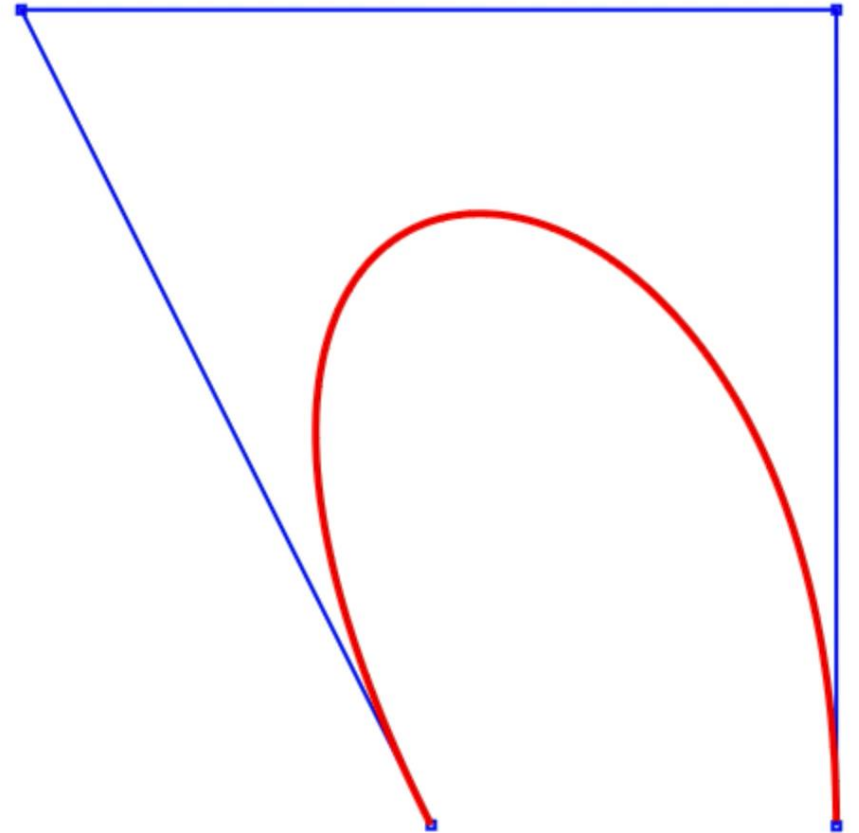
- $B_i(t)$ sont les polynômes de Bernstein
- $\mathbf{P}_i$ ne sont pas sur la courbe

COURBES DE BÉZIER

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i(t)$$

La même forme qu'avant, mais

- $B_i(t)$ sont les polynômes de Bernstein
- $\mathbf{P}_i$ ne sont pas sur la courbe

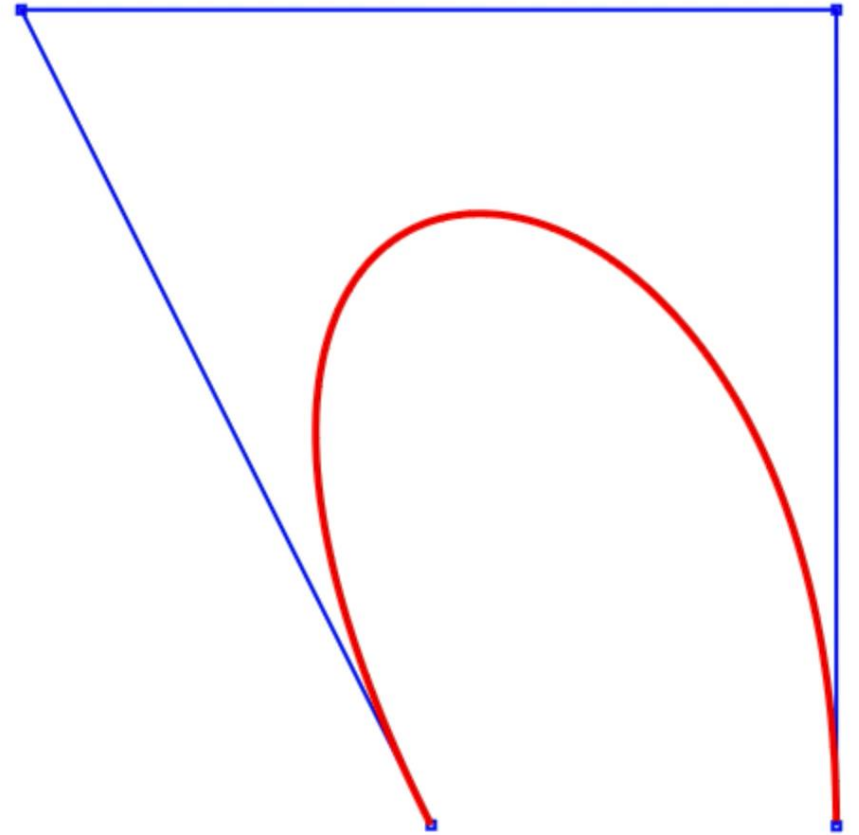


COURBES DE BÉZIER

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i(t)$$

$B_i(t)$ sont les polynômes de Bernstein

$$B_i(t) = \binom{m}{i} t^i (1-t)^{m-i}$$
$$\binom{m}{i} = \frac{m!}{(m-i)! i!}$$

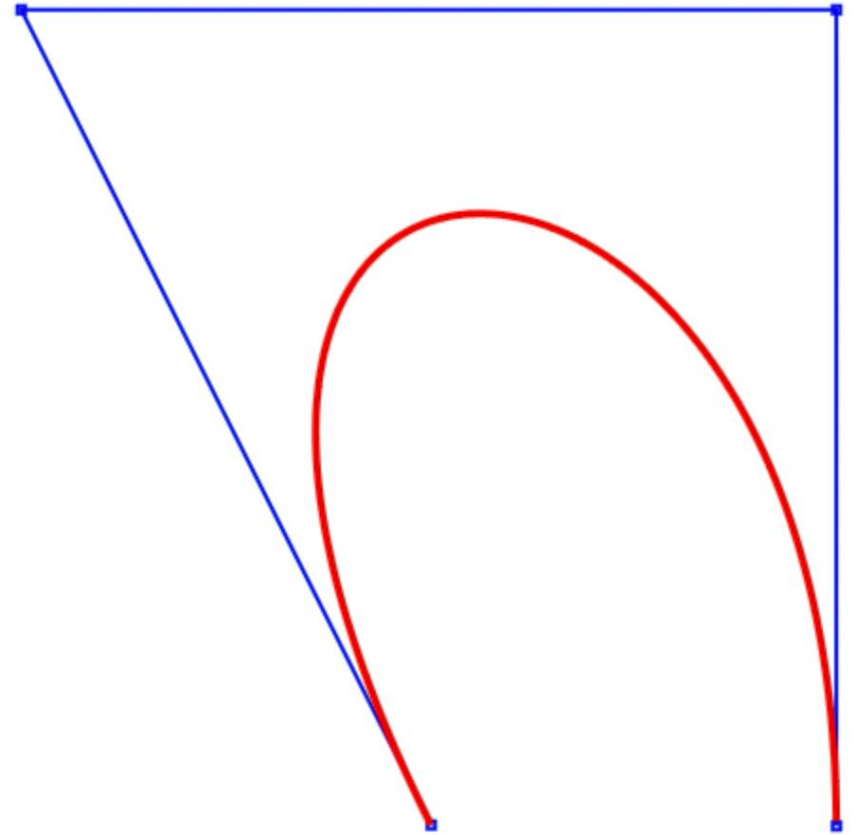


COURBES DE BÉZIER

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i(t)$$

$B_i(t)$ sont les polynômes de Bernstein

$$B_i(t) = \binom{m}{i} t^i (1-t)^{m-i}$$
$$\binom{m}{i} = \frac{m!}{(m-i)! i!}$$

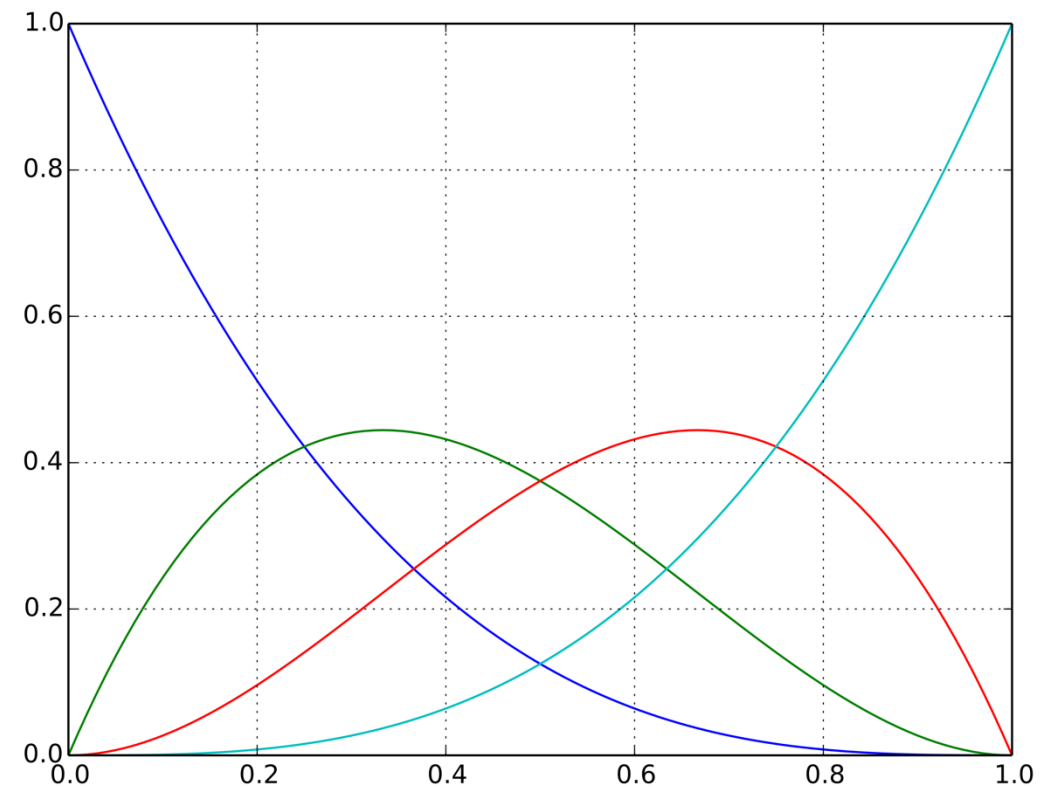


COURBES DE BÉZIER

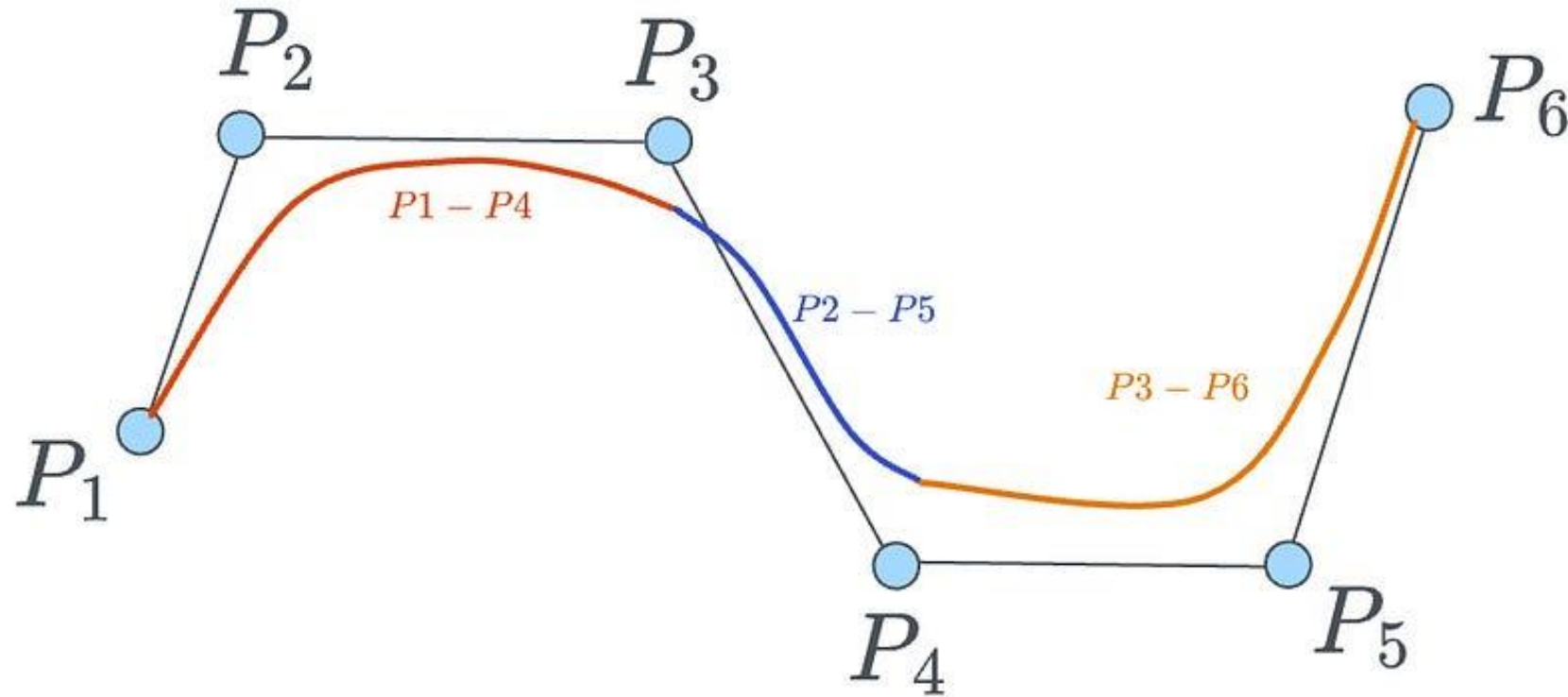
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i(t)$$

$B_i(t)$ sont les polynômes de Bernstein

$$B_i(t) = \binom{m}{i} t^i (1-t)^{m-i}$$
$$\binom{m}{i} = \frac{m!}{(m-i)! i!}$$



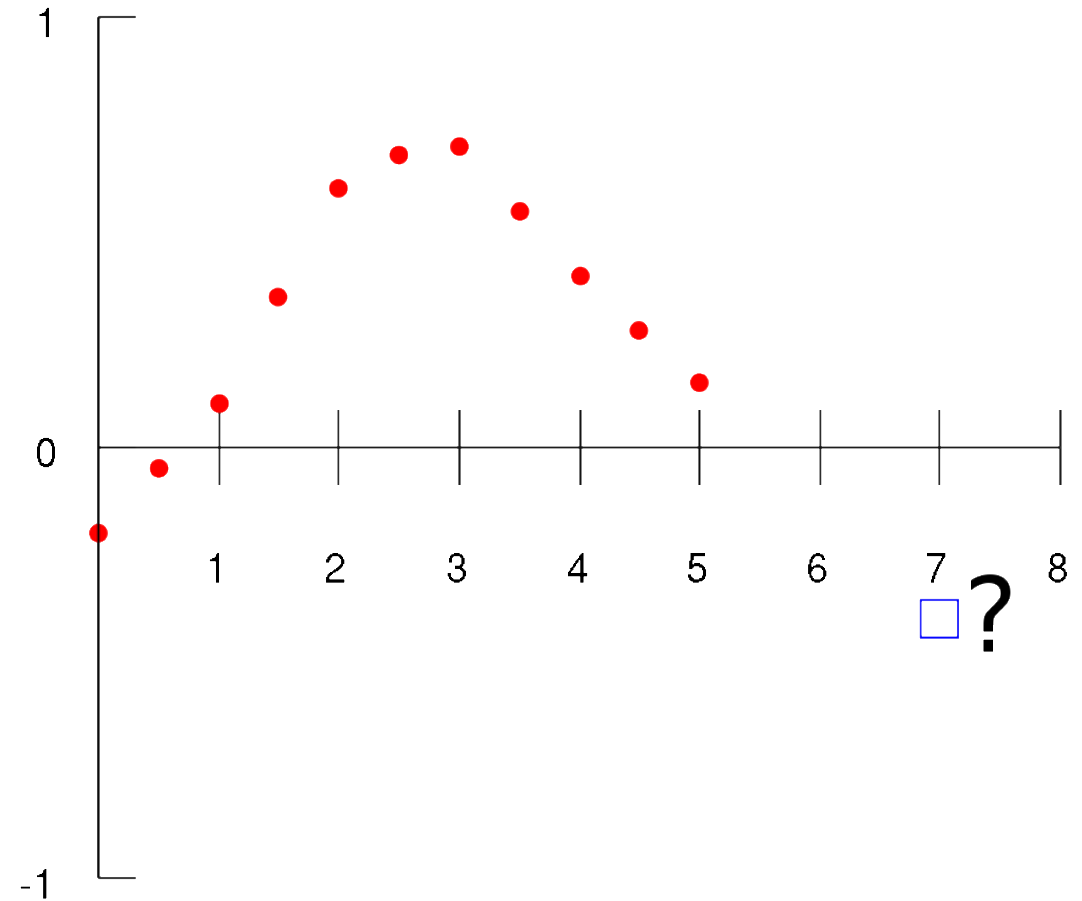
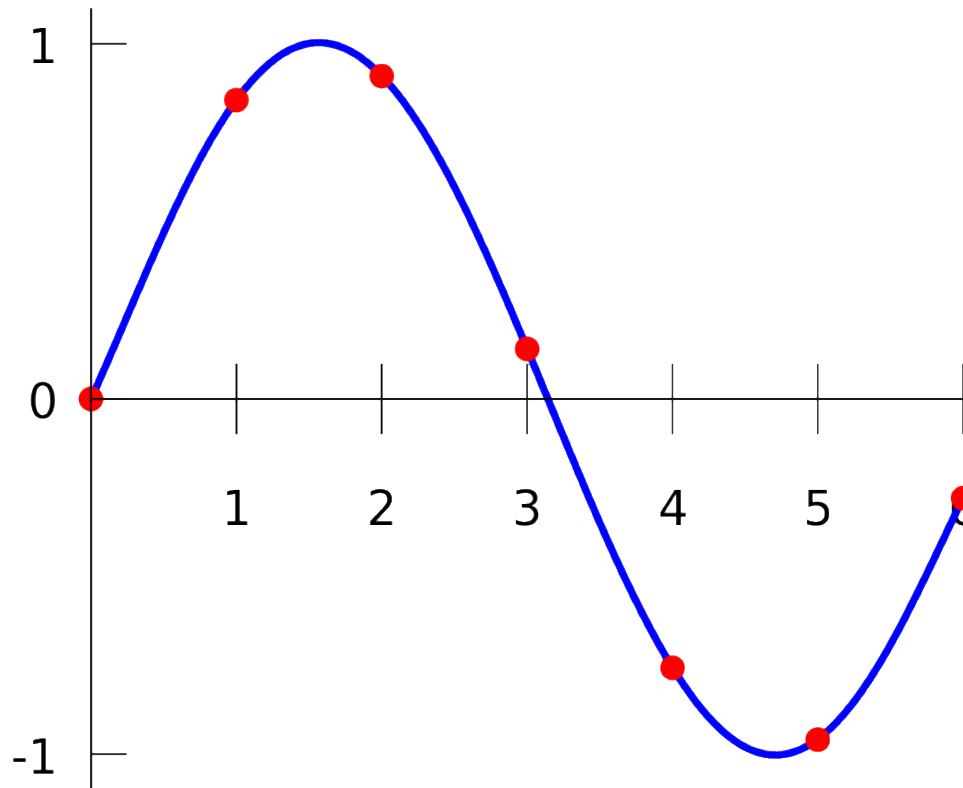
CONNECTER COURBES DE BÉZIER



INTERPOLATION VS EXTRAPOLATION

L'interpolation – deviner les valeurs entre celles qu'on connaît

L'extrapolation – prédire le comportement d'une fonction en dehors des limites des données



EXTRAPOLATION

MY HOBBY: EXTRAPOLATING

