

IFT3355: Infographie

Sujet 6: `shading 5` (illumination *globale 2*)

Derek Nowrouzezahrai
Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Université de Montréal



(quelques photos pris avec la permission de Wojciech Jarosz)

Intégration numérique en haute dimensions

- On vient de voir que les effets de shading complexes peuvent être formulés avec des intégrales d'hautes dimensions

- **ombres étendue**: intégration sur le domaine des lumières
 - Paramétrisation de région, de ligne ou de direction

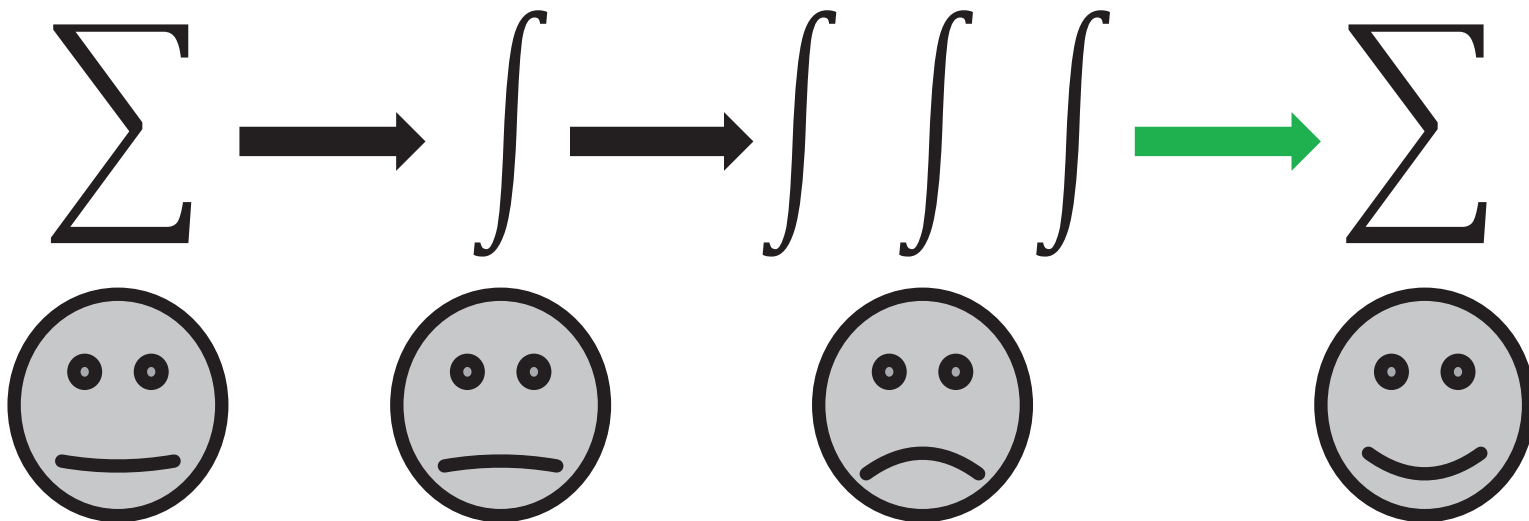
- **illumination globale**: intégration sur le domaine des lumières **et** du shading des autres surfaces
 - On peut aussi utiliser une paramétrisation de direction ici

- **flou de mouvement** (motion blur): intégration sur le domaine de temps
 - On doit exprimer la position/orientation de nos objets en fonction de temps
- **anti-aliassage** de l'image: intégration sur le domaine de chaque pixel
- **profondeur de champs** (depth-of-field): intégration sur le domaine du lentille



Intégration numérique en haute dimensions

- Plus tard nous verrons que ces intégrales ne peuvent pas être résolues de manière **analytique** (sauf dans certains cas pédantes)
- Premièrement nous étudierons comment résoudre ces intégrales en manière **numérique**
- Finalement nous utiliserons des outils *d'intégration Monte Carlo* pour réduire ces intégrales à des sommes



Monte Carlo 101

- Les techniques de Monte Carlo sont fondés sur une base probabiliste, alors nous allons revoir certaines notations et propriétés liées
- Supposons que X est une variable aléatoire
- La fonction de distribution cumulative (CDF) de X est

$$cdf(x) = \Pr[X \leq x]$$

- La fonction de densité de probabilité correspondante est

$$pdf(x) = \frac{d}{dx} cdf(x)$$

- et on voit que la probabilité que X prendra une valeur entre a et b est

$$\Pr[a \leq X \leq b] = \int_a^b pdf(x) dx$$



Monte Carlo 101

- L'espérance mathématique d'un variable aléatoire $Y = f(X)$ sur une domaine Z est

$$E[Y] = \int_Z f(z) pdf(z) dz$$

- et ça variance est

$$\sigma^2[Y] = E[(Y - E[Y])^2] = E[Y^2] - E[Y]^2$$

- Voici quelques propriétés qui nous aiderons d'analyser le comportement de convergence de nos intégrateurs Monte Carlo

$$E[aY] = a E[Y]$$

$$E\left[\sum_i Y_i\right] = \sum_i E[Y_i]$$

$$\sigma^2[aY] = a^2 \sigma^2[Y]$$

$$\sigma^2\left[\sum_i Y_i\right] = \sum_i \sigma^2[Y_i]$$



Intégration Monte Carlo

- On peut maintenant définir et analyser l'efficacité d'un *estimateur Monte Carlo* pour une intégrale (avec une dimensionnalité arbitraire)

$$F = \int_X f(x) dx$$

- L'estimateur Monte Carlo de F est

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(X_i)}{pdf(X_i)} \approx \int_X f(x) dx$$

- et on peut montrer que $E[\bar{F}] = F$



Intégration Monte Carlo

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(X_i)}{pdf(X_i)}$$

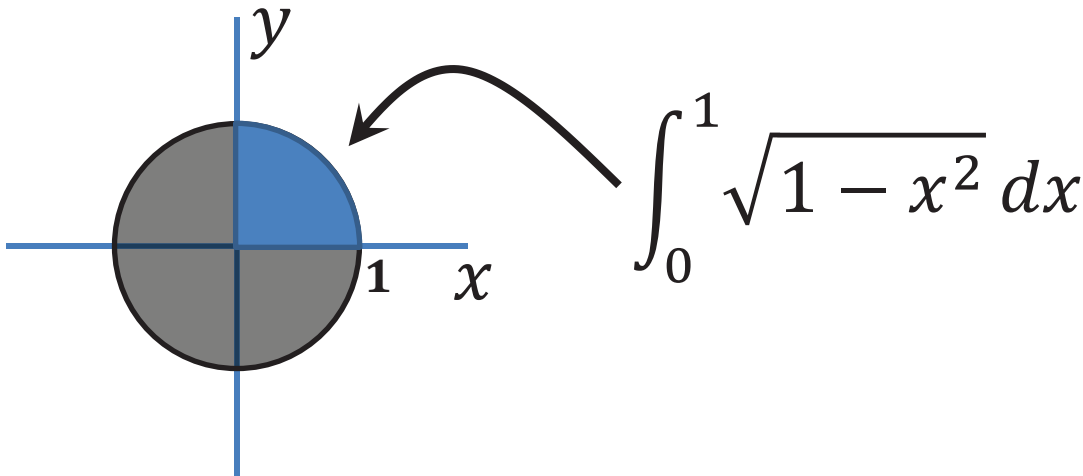
- Alors compte tenu de la définition de l'estimateur Monte Carlo, le processus pour évaluer \bar{F} est divisé en 3 étapes:
 1. Choisir une distribution pdf selon laquelle nous distribuons nos points d'échantillonnage aléatoire
 2. Générer N points aléatoire (les X_i)
 3. Évaluer $\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(X_i)}{pdf(X_i)}$
- Noter que les points X_i peuvent aussi être générés à la volée pendant l'étape 3



Intégration Monte Carlo: Exemple en 1D

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(X_i)}{pdf(X_i)}$$

- Prenons une exemple simple ou on peut vérifier la valeur analytiquement:



```
intégral = 0
for( i = 0 à N-1 )
  X[i] = rand();
  pdf[i] = 1;
  intégral += sqrt(1.-
  X[i]*X[i])/pdf[i]

intégral = intégral / N
```

1. Choisir pdf : on va utiliser une distribution uniforme

$$pdf(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-0} = 1$$

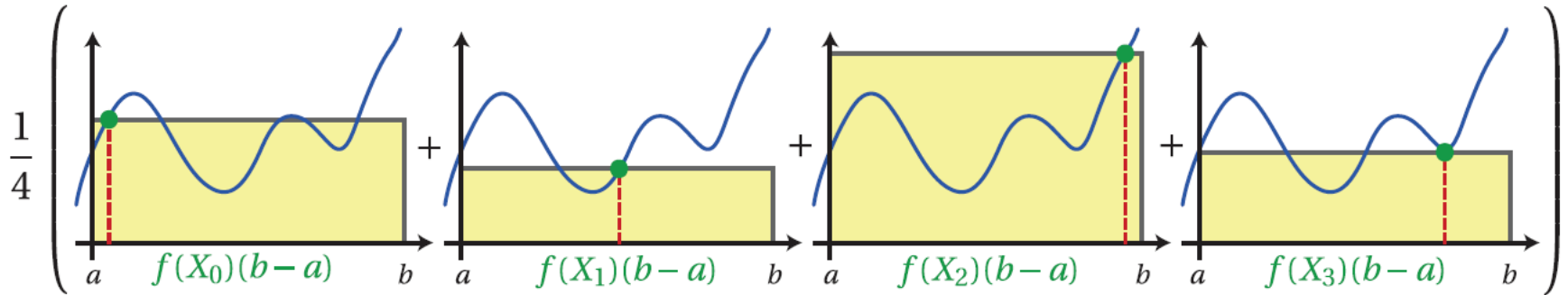
2. Générer les N points X_i
3. Évaluer \bar{F}



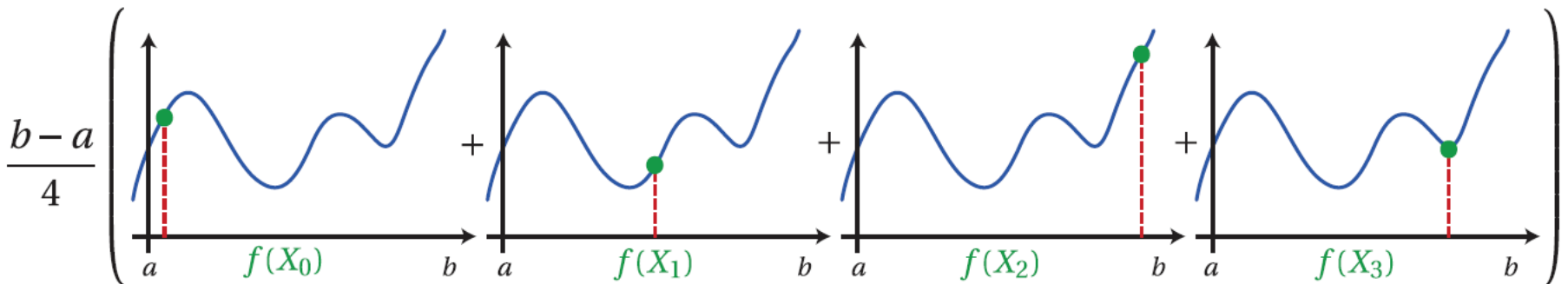
Intégration Monte Carlo: Exemple en 1D

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(X_i)}{pdf(X_i)}$$

- Visuellement vous pouvez interpréter le processus d'intégration Monte Carlo en deux façons:
 - Comme une moyenne pondérée d'aires (ou de volumes en haute dimension)



- Comme une somme pondérée des échantillons



Intégration Monte Carlo

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(X_i)}{pdf(X_i)}$$

- On peut déterminer la **convergence** de notre estimateur \bar{F} selon une analyse de la déviation standard:

$$\begin{aligned}\sigma^2[\bar{F}] &= \sigma^2 \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(X_i)}{pdf(X_i)} \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sigma^2 \left[\frac{f(X_i)}{pdf(X_i)} \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_i^N \sigma^2[Y_i] \\ &= \frac{1}{N} \sigma^2[Y]\end{aligned}$$

$$\sigma[Y] \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$



Intégration Monte Carlo

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(X_i)}{pdf(X_i)}$$

- Un but important quand on utilise l'intégration Monte Carlo est de réduire la variance de nos points X_i
- Deux manières typiques de réduire la variance sont:
 - Stratification, et
 - Importance sampling
- Stratification: divise la domaine d'intégration en plusieurs sous-domaines et effectue une intégration Monte Carlo sous chacun des sous-domaines
- Importance sampling: choisi $pdf(x)$ afin de placer les points X_i aux locations où $f(x)$ a une valeur plus élevée

