

IFT3355: Infographie

Lecture 2: Transformations Géométriques

Derek Nowrouzezahrai

Département d'informatique et de recherche opérationnelle

Université de Montréal



Aujourd'hui: Transformations 2D & 3D

1. Transformation en 2D

- Translation
- Changement d'échelle (*scaling*)
- Rotation
- Cisaillement (*shearing*)
- Réflexion

2. Coordonées homogènes (2D)

- Combinaisons des transformations

3. Transformation en 3D

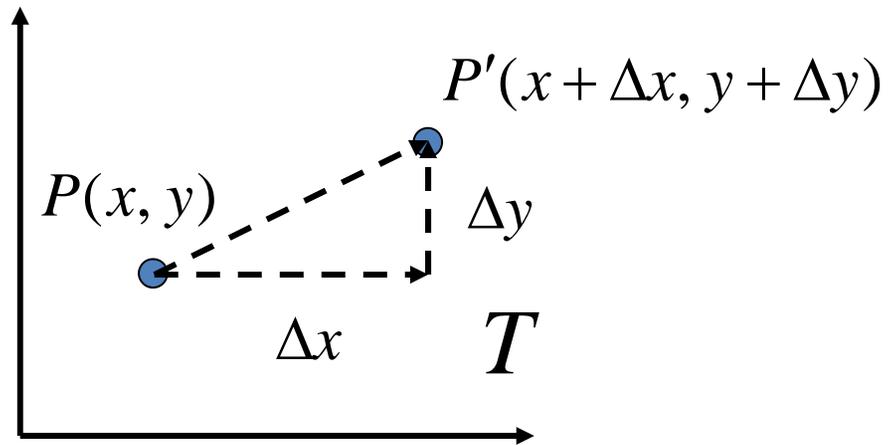


Points Bonus?

- Répondre aux questions pendant la lecture
 - 0.1% sur ta note finale pour chaque réponse correcte
 - Maximum de 5% extra
- Questions **beaucoup** plus facile que ceux de l'examen
- Plusieurs réponses seront déjà dans les notes
 - J'ai le droit de vous demander d'élaborer sur votre réponse
- Marquer le numéro de bonne réponse à la fin de chaque lecture



Translation en 2D

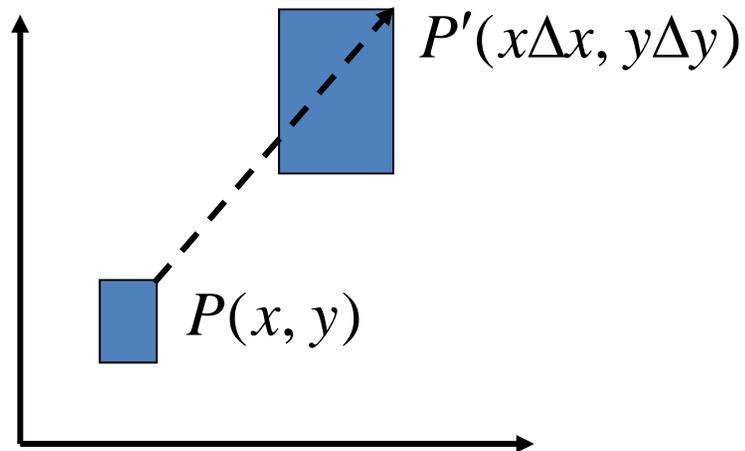


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P' = T + P$$



Changement d'échelle en 2D (*scaling*)

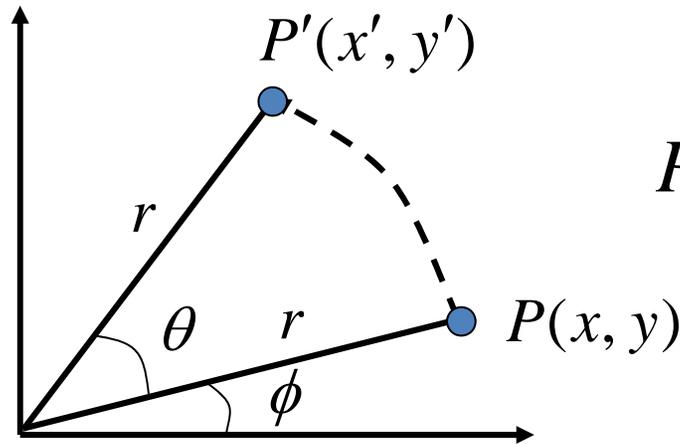


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x & 0 \\ 0 & \Delta y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P' = SP$$



Rotation en 2D



$$P : \begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

$$P' : \begin{cases} x' = r \cos(\phi + \theta) \\ \quad = \underline{r \cos \phi \cos \theta} - \underline{r \sin \phi \sin \theta} \\ \quad = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = r \sin(\phi + \theta) \\ \quad = \underline{r \cos \phi \sin \theta} + \underline{r \sin \phi \cos \theta} \\ \quad = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

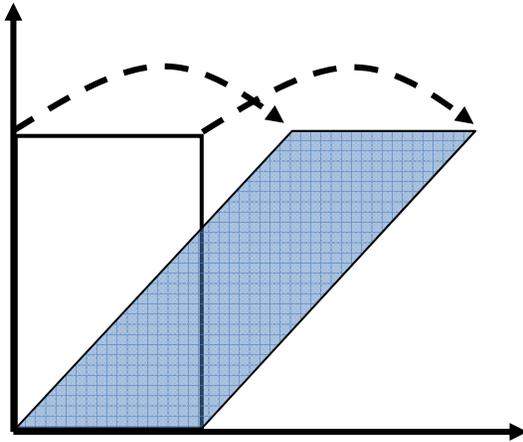
θ sens anti-horaire

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P' = RP$$

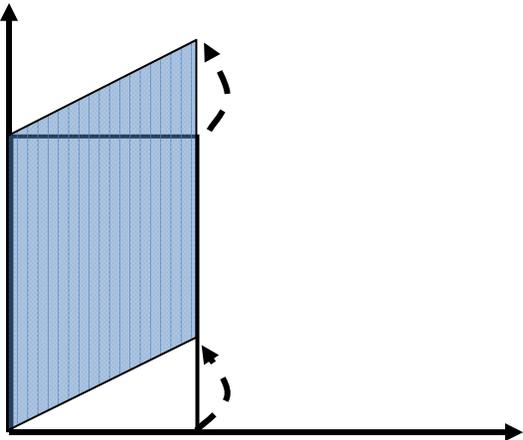


Cisaillement en 2D (*shearing*)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P' = Sh_x P$$

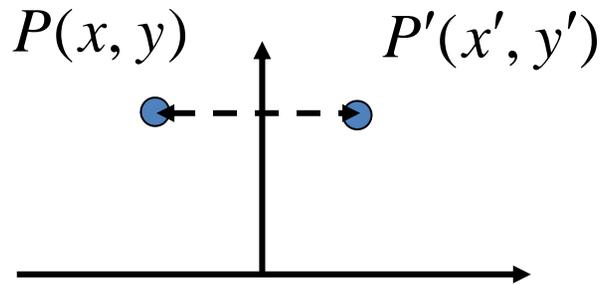


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

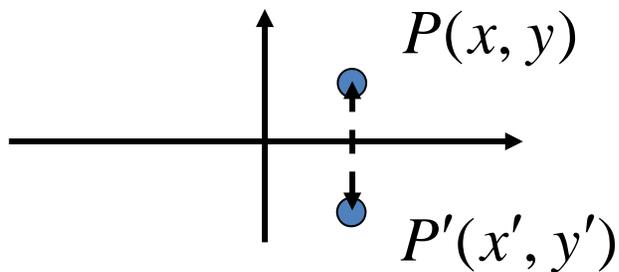
$$P' = Sh_y P$$



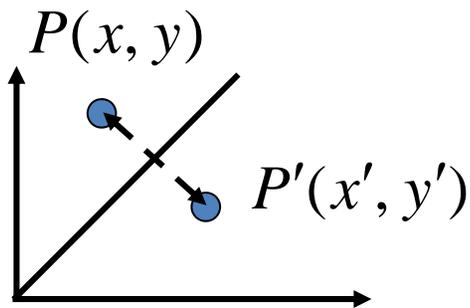
Réflexion en 2D



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Coordonnées homogènes

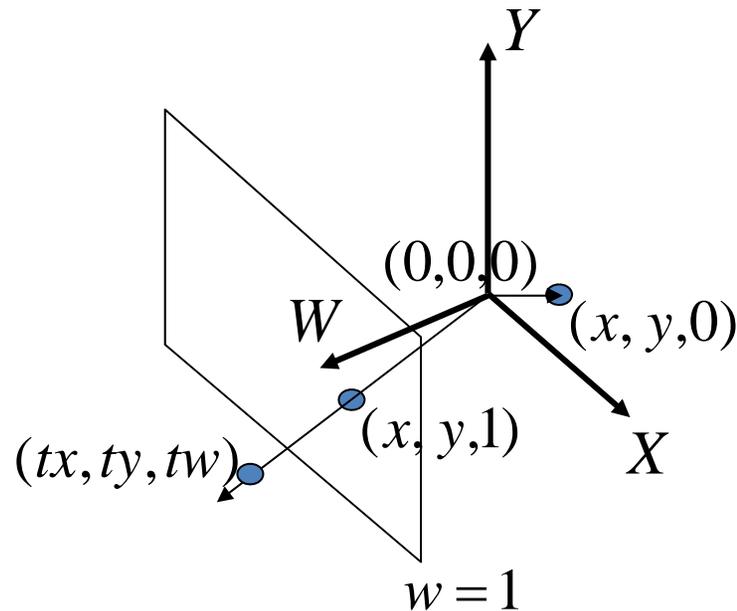
- Pour **Translation: $T+P$** en addition
 - mais les autres transformations sont des **multiplications**
- Représentation des transformations sous une forme matricielle unique:
 - + uniformité
 - + composition
 - + opérations des 4x4 peuvent être exécutées en parallèle
 - optimisations possibles...

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & t_x \\ m_{21} & m_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x' = xm_{11} + ym_{12} + t_x \\ y' = xm_{21} + ym_{22} + t_y \end{cases}$$

(9 mult, 6 add) vs. (4 mult, 4 add)



Coordonnées homogènes en 2D



$P(tx, ty, tw)$: $w \neq 0, t \neq 0$

$P\left(\frac{tx}{tw}, \frac{ty}{tw}, 1\right)$: coordonnée cartésienne d'un point homogène

$P(x, y, 1)$: point dans le plan $w = 1$, point homogène

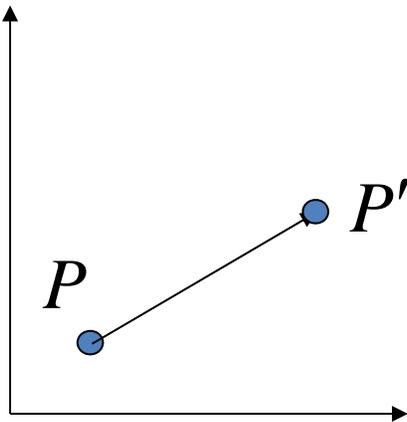
$w = 0$: point à l'infini (direction ou vecteur)

$(0,0,0)$: n'est pas permis...



Translation: maintenant avec les matrices

(grâce aux coordonnées homogènes)



$$\begin{aligned} P' &= \begin{bmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= T(\Delta x, \Delta y)P \end{aligned}$$



Pré-multiplication vs. post-multiplication

Nouvelle méthode

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = T(\Delta x, \Delta y)P$$

Ancienne méthode

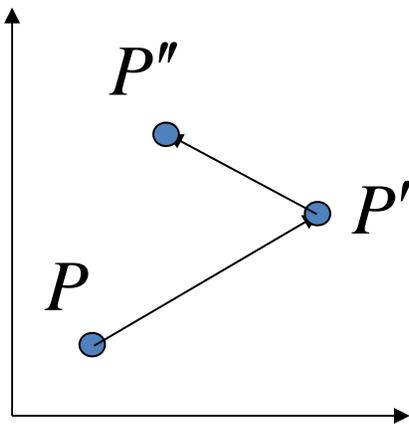
$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix}$$

$$P'^t = P^t T(\Delta x, \Delta y)^t$$

$$(TP)^t = P^t T^t$$



Combinaison de translations en 2D



$$P' = T(\Delta x_1, \Delta y_1)P$$

$$P'' = T(\Delta x_2, \Delta y_2)P'$$

$$= T(\Delta x_2, \Delta y_2)T(\Delta x_1, \Delta y_1)P$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 1 & \Delta y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & \Delta y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 + \Delta x_2 \\ 0 & 1 & \Delta y_1 + \Delta y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= T(\Delta x_1 + \Delta x_2, \Delta y_1 + \Delta y_2)P$$



Combinaison de changements d'échelle en 2D

$$\begin{aligned}P'' &= S(\Delta x_2, \Delta y_2)S(\Delta x_1, \Delta y_1)P \\&= \begin{bmatrix} \Delta x_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} \Delta x_1 \Delta x_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_1 \Delta y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \\&= S(\Delta x_1 \Delta x_2, \Delta y_1 \Delta y_2)P\end{aligned}$$



Combinaison de rotations en 2D

$$P'' = R(\phi)R(\theta)P$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \sin \theta + \cos \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\phi + \theta) & -\sin(\phi + \theta) & 0 \\ \sin(\phi + \theta) & \cos(\phi + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= R(\phi + \theta)P$$



Combinaisons de matrices de transformation

- + efficacité
 - une seule matrice composée est utilisée au lieu d'une série de matrices
- $\{R, T\}$
 - Sont des transformation *rigid-body*
 - préserve les longueurs et les angles
- $\{R, T, S\}$
 - transformation *affine*
 - préserve le parallélisme des lignes
 - (mais pas les longueurs ni les angles)



Propriétés des matrices de transformations

- Commutativité

$$T_1 T_2 = T_2 T_1$$

$$S_1 S_2 = S_2 S_1$$

$$R_1 R_2 = R_2 R_1$$

$$S(\Delta x = \Delta y)R = RS(\Delta x = \Delta y)$$

- Associativité

$$M_1(M_2 M_3) = (M_1 M_2)M_3$$

$$T^{-1}(x, y) = T(-x, -y)$$

- Inverses

$$S^{-1}(x, y) = S\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta) = R^t(\theta)$$



Exemple d'une série de transformations

- Rotation autour d'un point Q
 - On sait comment faire une rotation autour de l'origine, mais pas autour d'un point arbitraire
1. Translation telle que Q est à l'origine: $T(-x, -y)$
 2. Rotation de θ autour de l'origine: $R(\theta)$
 3. Translation de l'origine jusqu'à Q : $T(x, y)$

$$M = T(x, y)R(\theta)T(-x, -y)P$$



Exemple de non-commutativité

$$T(\Delta x, \Delta y)S(s_x, s_y) \neq S(s_x, s_y)T(\Delta x, \Delta y)$$

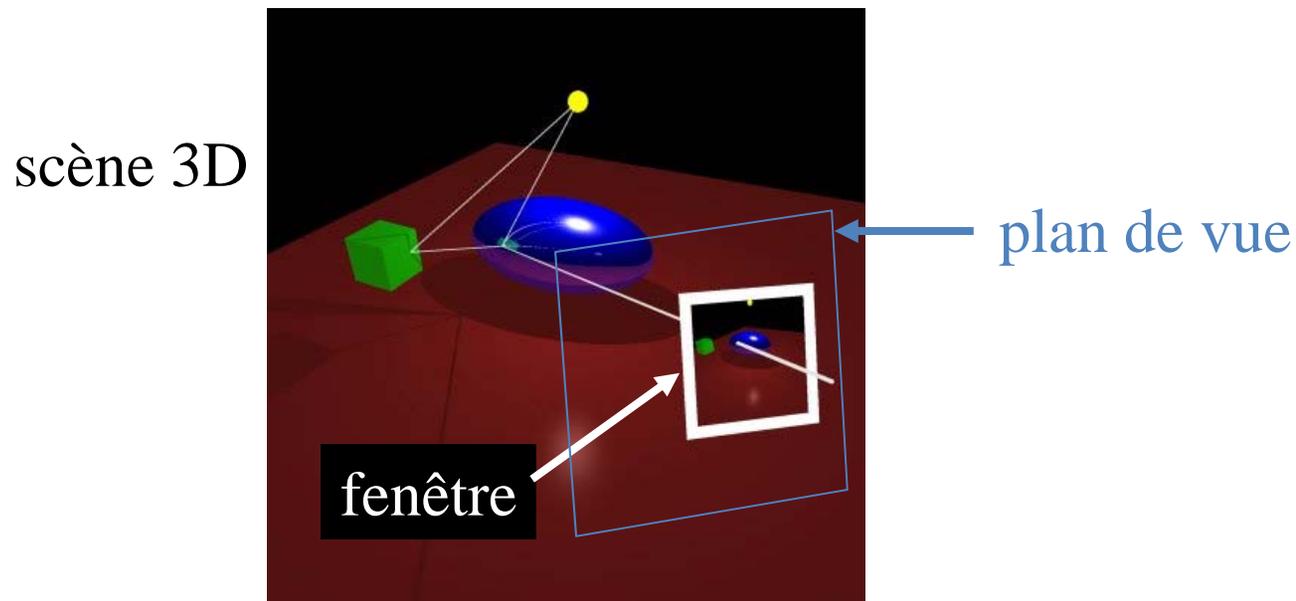
$$TS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & \Delta x \\ 0 & s_y & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ST = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & s_x \Delta x \\ 0 & s_y & s_y \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



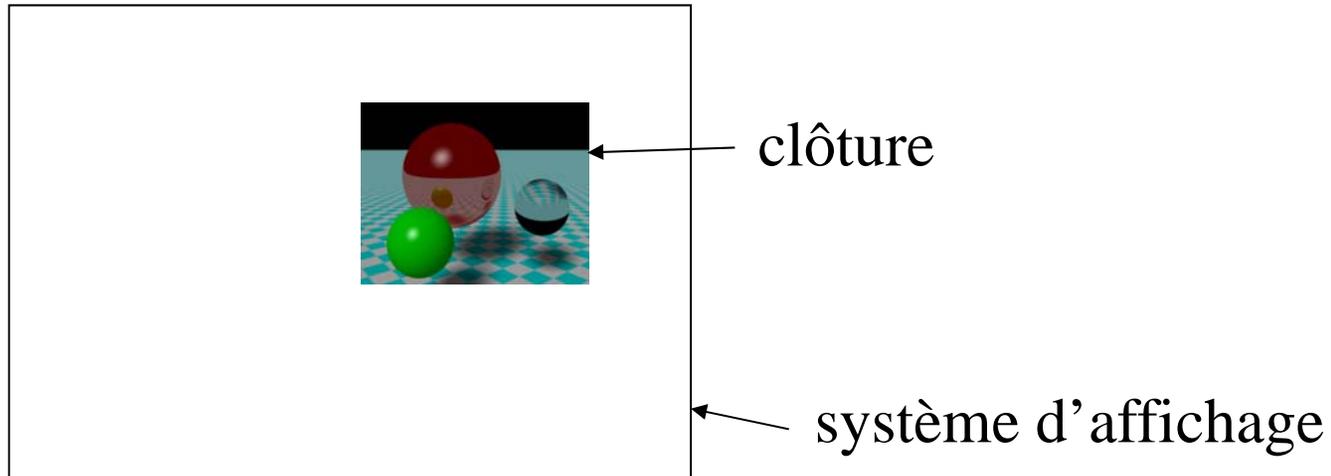
Fenêtre (*window*)

- Région en 3D à travers laquelle on voit la scène
 - Vaguement liés à quelques idées dans la dernière classe
- Concept différent de celui des fenêtres en *windows*



Clôture (*viewport*)

- Partie de l'écran où la fenêtre est affichée



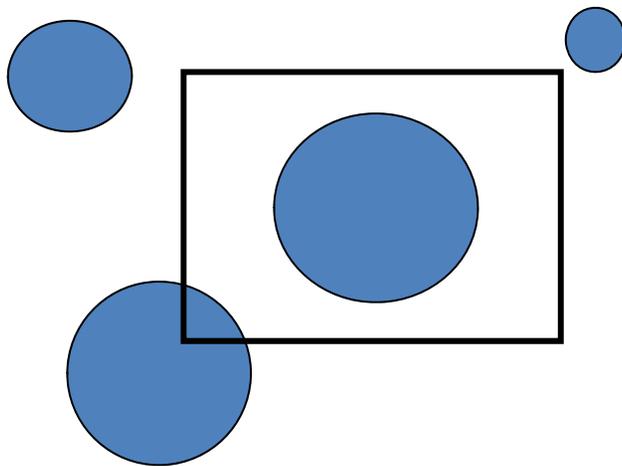
Série de transformations

- Modèle 3D
 - Système de coordonnées de vue (caméra)
 - construit un plan de vue en 3D
 - définit une fenêtre dans ce plan
- ↓ Projection
- Coordonnées de vue (2D) pour chaque point en 3D
 - Définit un clôturé dans un système normalisé $[0,1]$
- ↓ Mapping fenêtre-clôturé
- Coordonnées d'affichage

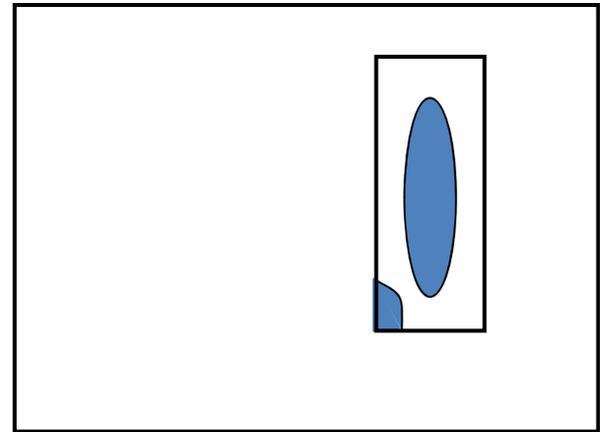


Mapping

- Fenêtre \rightarrow clôture
- $XY \rightarrow UV$



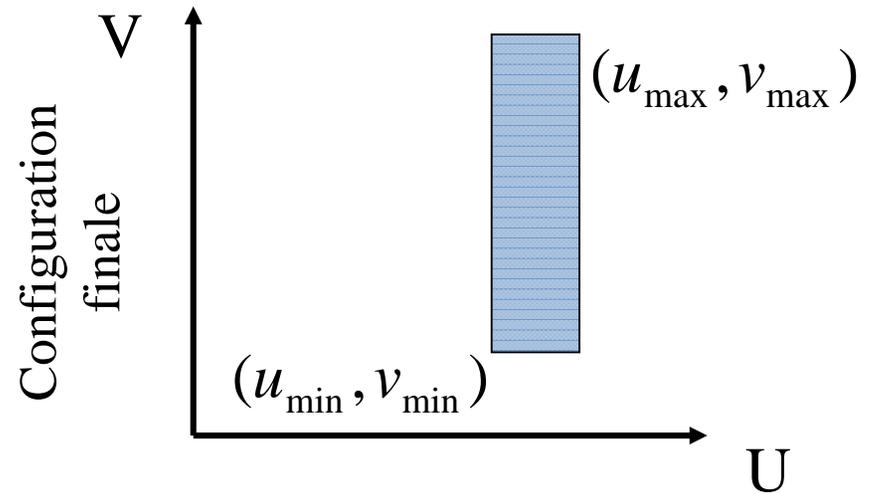
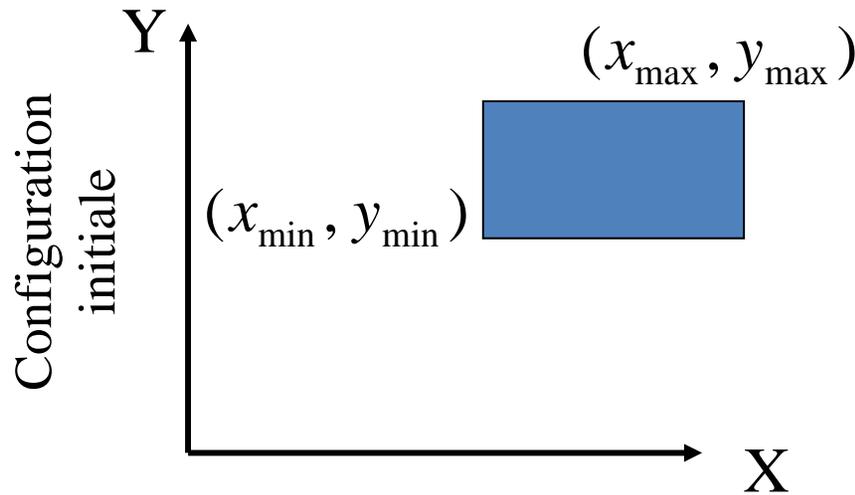
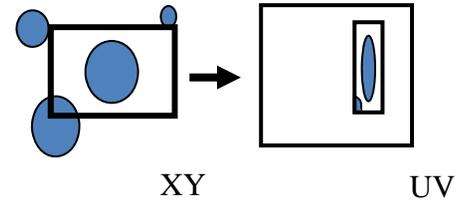
XY



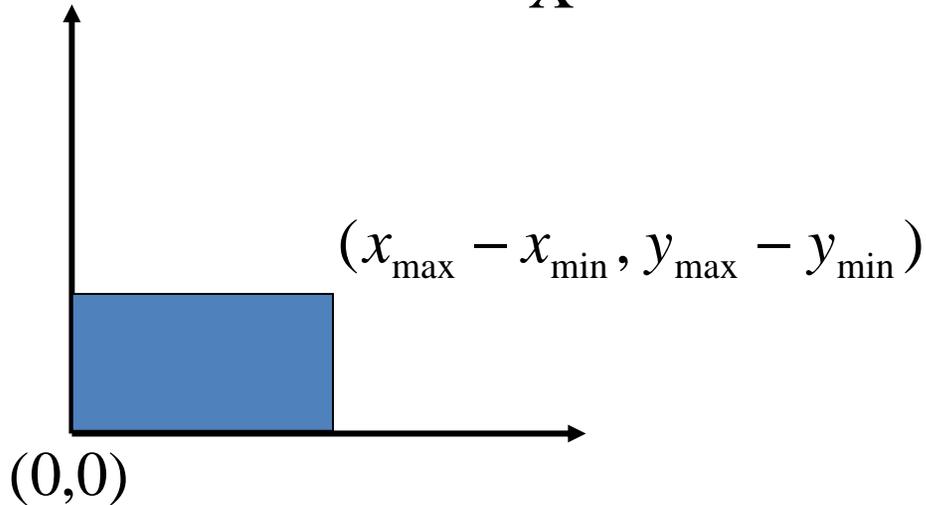
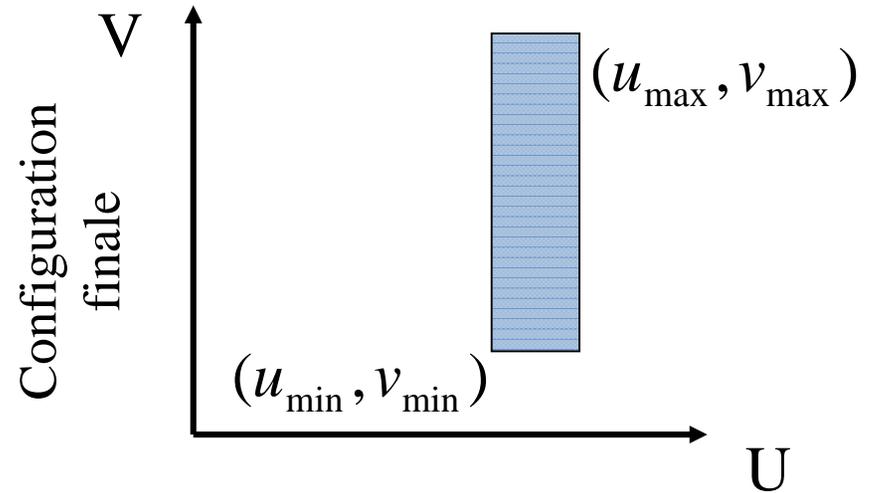
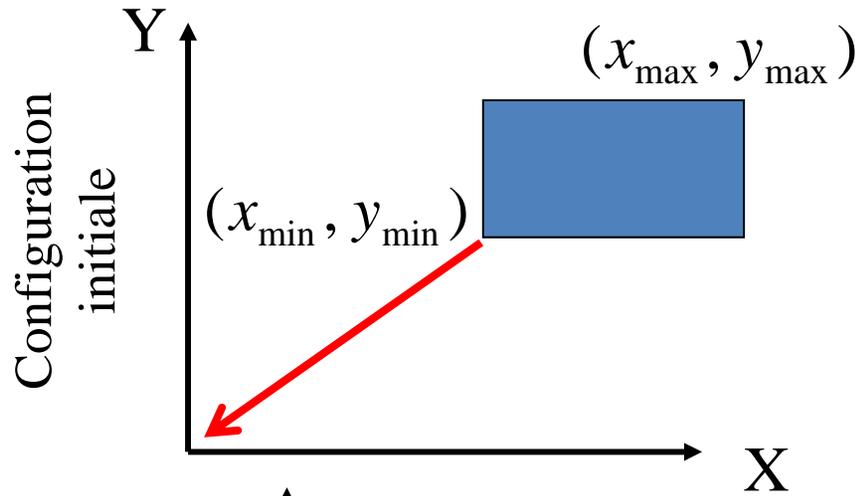
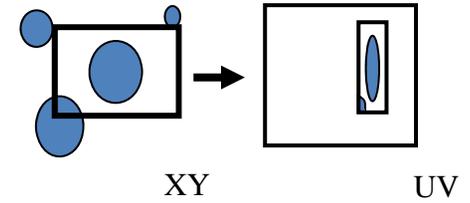
UV



Transformation 2D: rectangle à rectangle



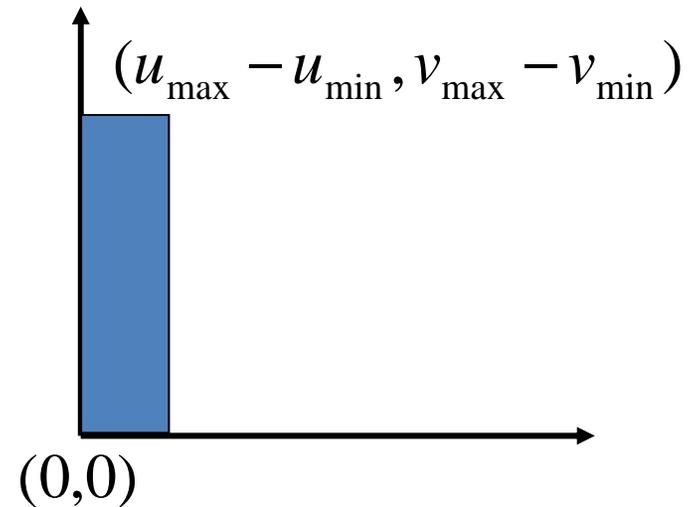
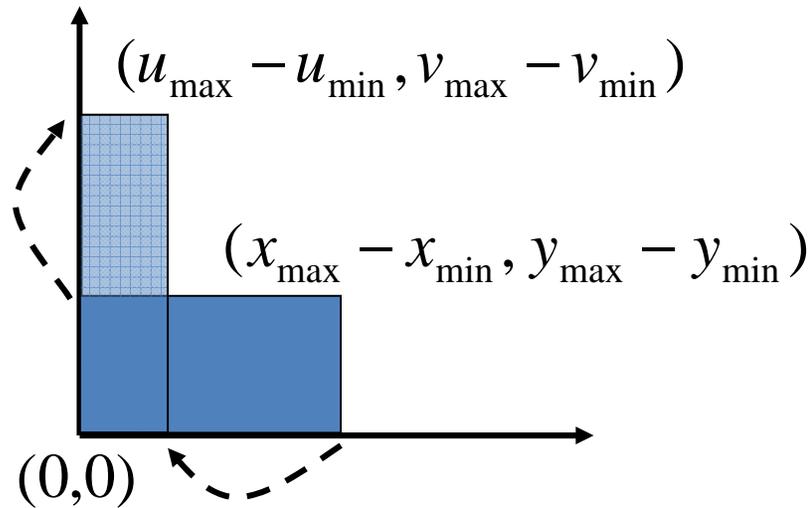
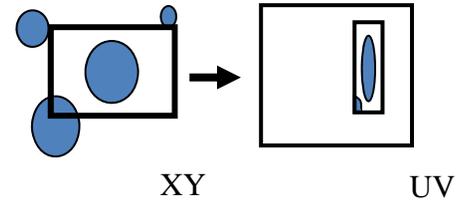
Transformation 2D: rectangle à rectangle



$$T(-x_{\min}, -y_{\min})$$



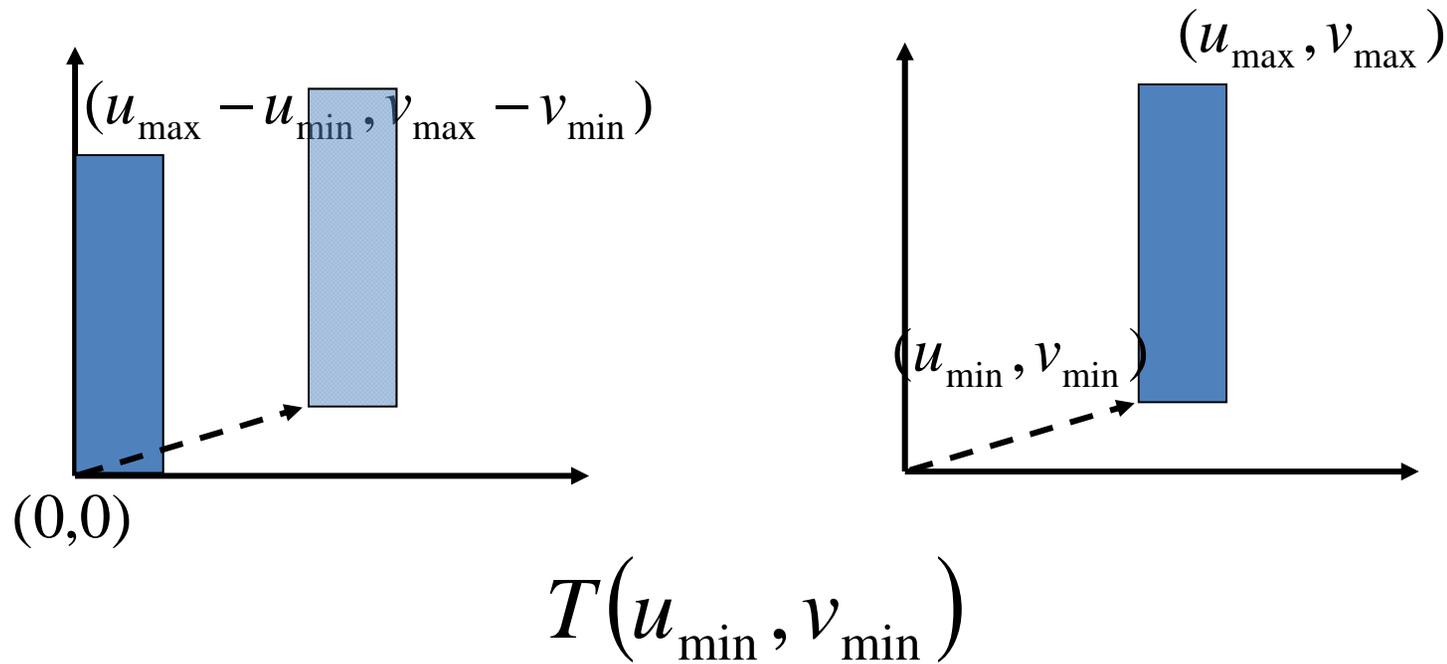
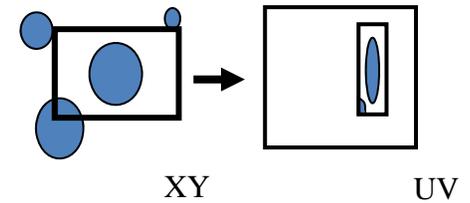
Transformation 2D: rectangle à rectangle



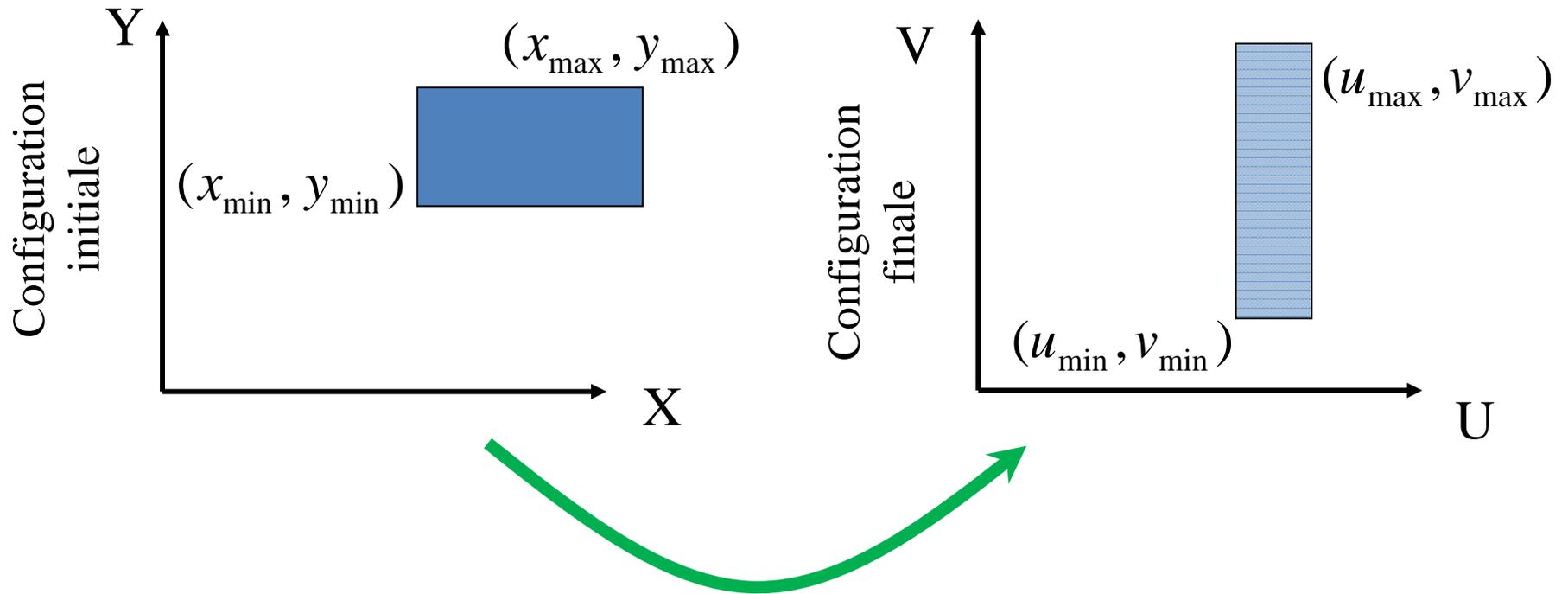
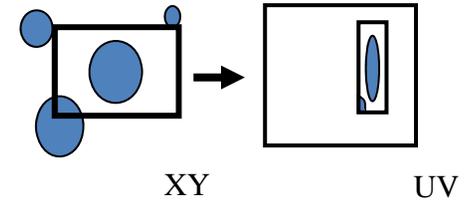
$$S\left(\frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}\right)$$



Transformation 2D: rectangle à rectangle



Transformation 2D: rectangle à rectangle



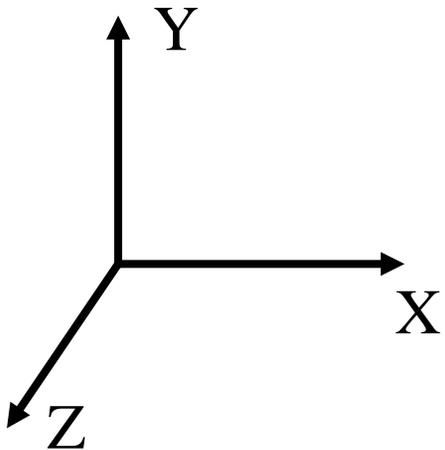
$$M_{xy \rightarrow uv} = T(u_{\min}, v_{\min}) S \left(\frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \right) T(-x_{\min}, -y_{\min})$$



Transformations en 3D

- 2D: matrice 3x3 en coordonnées homogènes
- 3D: matrice 4x4 en coordonnées homogènes

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, z, w)$$



Systeme de coordonnées de la main droite
→ rotation positive: sens anti-horaire



Transformations 3D de base

- Translation

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Changement d'échelle

$$S = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Transformations 3D de base

- Rotations

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_x(\theta)$

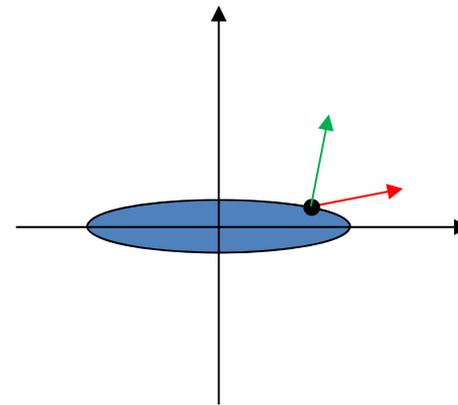
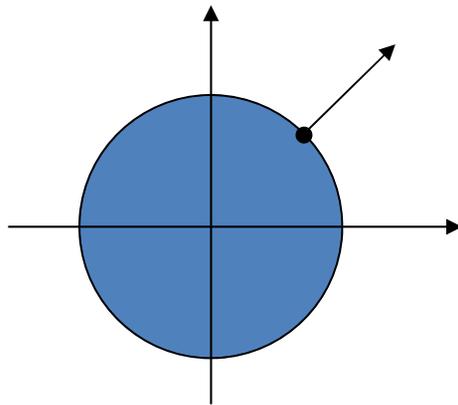
$R_y(\theta)$

$R_z(\theta)$



Transformation de normales

- Points, tangentes, vecteurs fonctionnent avec les matrices standards
- Normale à la surface fonctionne différemment



$S(1,0.2)$



Transformation de normales

$$t \cdot n = t^T n = 0$$

$$(Mt)^T (Xn) = 0$$

$$t^T M^T Xn = 0$$

$$M^T X = I$$

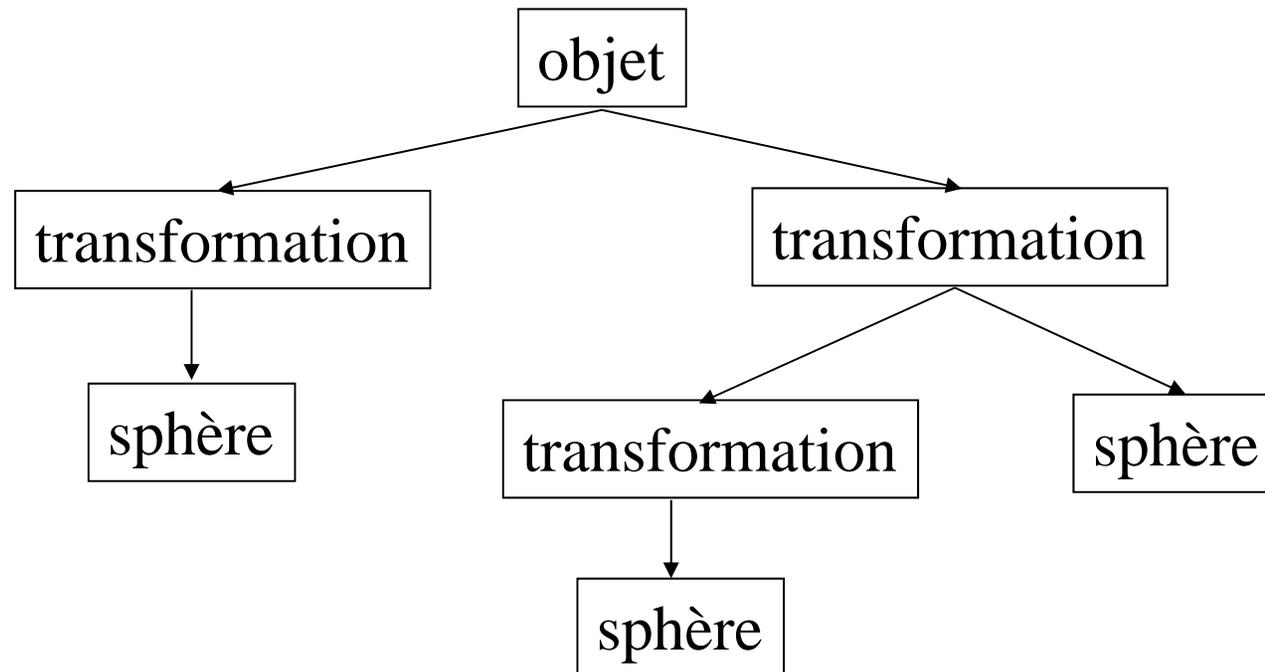
$$t^T M^T (M^T)^{-1} n = 0$$

$$X = (M^T)^{-1}$$

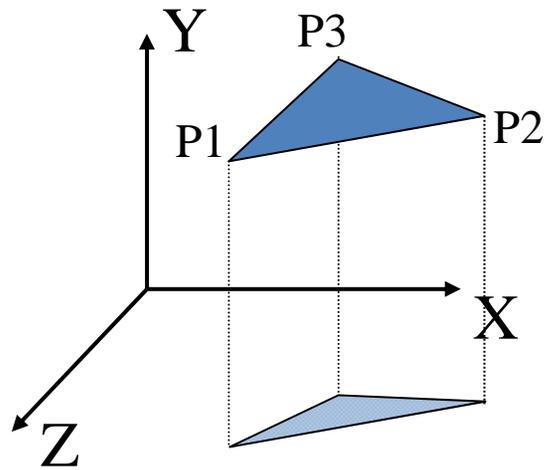


Transformations hiérarchiques

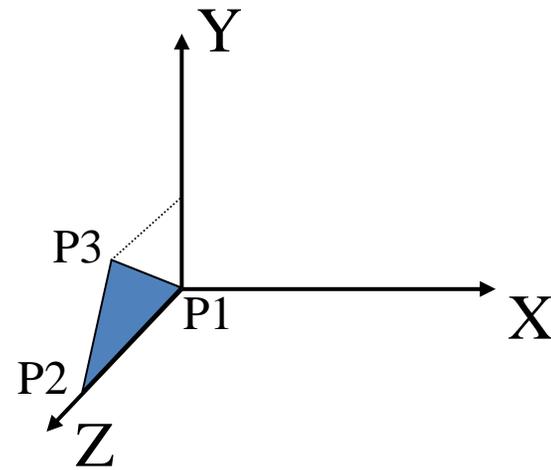
- Objet représenté par un arbre de primitives (feuilles) transformées (noeuds)



Exemple de composition de transformations



Original



Final

