

IFT3355: Infographie

Courbes et surfaces

© Pierre Poulin

Dép. I.R.O.

Université de Montréal

Courbes et surfaces

- Beaucoup de trajectoires sont définies par des courbes, et beaucoup de vrais objets sont définis par une surface lisse
 - typographie, dessins, trajectoire de la caméra, graphes, interpolation de mouvement, CAD, etc.

Polygones

- Solution polygonale consiste à augmenter le nombre de polygones (maillage plus fin) pour mieux approximer la surface
 - + diminue l'erreur de représentation
 - + hardware déjà disponible pour des polygones
 - augmente l'espace mémoire
 - augmente le temps requis pour le rendu
 - augmente le nombre de points à manipuler pour modifier la surface

Courbes et surfaces paramétriques

- Solution paramétrique polynômiale
 - courbe (cubique): $x(t), y(t), z(t)$
 - surface ou patche (bicubique): $x(s, t), y(s, t), z(s, t)$
- Solution implicite $F(x, y, z) = 0$
 - contrôle plus complexe pour la modélisation de grande précision
 - discutée plus tard dans la modélisation avancée

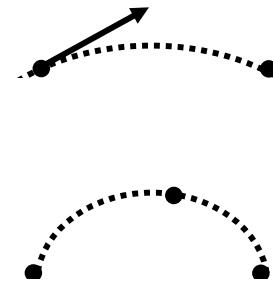
Degré d'un polynôme

- Linéaire
 - deux points définissent le segment
 - dérivées définies par la ligne elle-même

$$\begin{aligned}x(t) &= a_x t + b_x \\y(t) &= a_y t + b_y \\z(t) &= a_z t + b_z\end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Degré d'un polynôme

- Quadratique
 - deux points
 - une autre condition
 - pente
 - troisième point
 - courbe est planaire en 3D (trois points)



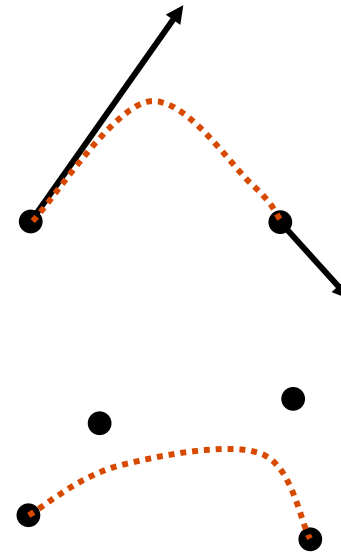
$$x(t) = a_x t^2 + b_x t + c_x$$

$$y(t) = a_y t^2 + b_y t + c_y \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = a_z t^2 + b_z t + c_z$$

Degré d'un polynôme

- Cubique
 - deux points
 - deux conditions
 - 2 points
 - 2 dérivées
 - non-planaire en 3D
- Plus élevé
 - oscillations souvent indésirables
 - plus coûteux à évaluer



Courbe cubique

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

$$Q(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix} = T \cdot G$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot G$$

$$= \begin{bmatrix} 3a_x t^2 + 2b_x t + c_x & 3a_y t^2 + 2b_y t + c_y & 3a_z t^2 + 2b_z t + c_z \end{bmatrix}$$

Continuité

- Une courbe paramétrique est continue partout sauf à ses extrémités $t = 0$ et $t = 1$
- Les continuités entre deux segments sont:

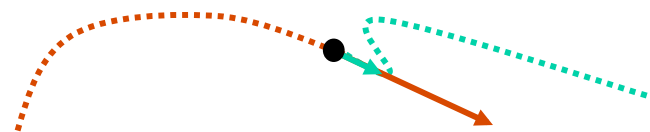
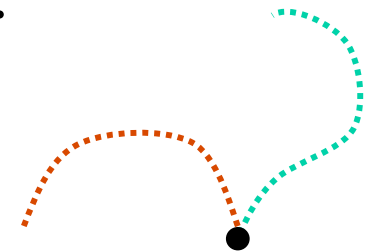
Géométriques:

- G^0 : le point de jonction est commun
- G^1 : ... et la direction du vecteur tangent

(pas la longueur)

vitesse d'un point sur la courbe par rapport à t

$$\vec{A} = k\vec{B} \text{ pour } 0 < k$$

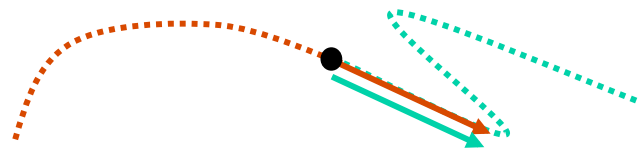


Continuité

- Les continuités entre deux segments sont:

Paramétriques:

- C^1 : ... et la longueur du vecteur tangent ($k = 1$)
 C^1 implique G^1 excepté lorsque $tg = (0,0,0)$
- C^n : ... et la direction et la longueur de $\frac{d^n Q(t)}{dt^n}$
- C^2 : accélération d'un point sur la courbe par rapport à t



Contraintes

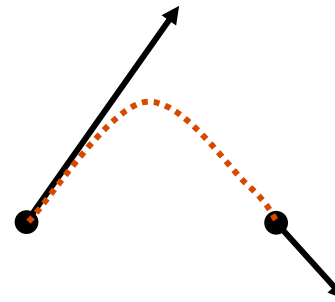
- Points aux extrémités du segment
- Vecteurs tangents
- Continuité entre les segments

Une courbe cubique est définie par 4 coefficients, donc requiert 4 contraintes pour résoudre le système

Courbes d'après les contraintes

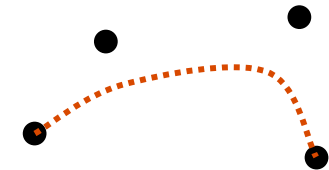
- Hermite

- deux points
- deux tangentes



- Bézier

- deux points
- deux points contrôlant les tangentes

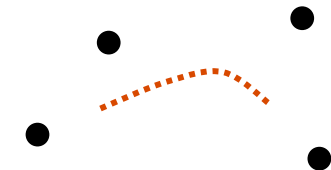


- Splines

- quatre points

B-splines (uniformes et non-uniformes)

β -splines



Interpolation linéaire

$$Q(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \end{bmatrix}$$

$T \quad \cdot \quad M \quad \cdot \quad G$

$$x(t) = (g_{1x}m_{11} + g_{2x}m_{12})t + (g_{1x}m_{21} + g_{2x}m_{22})$$

$$x(t) = g_{1x}(1-t) + g_{2x}t$$

$$y(t) = g_{1y}(1-t) + g_{2y}t$$

$$z(t) = g_{1z}(1-t) + g_{2z}t$$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Interpolation cubique

$$Q(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}}_T \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}}_M \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} \\ g_{4x} & g_{4y} & g_{4z} \end{bmatrix}}_G$$

G : contraintes géométriques

M : matrice de la base

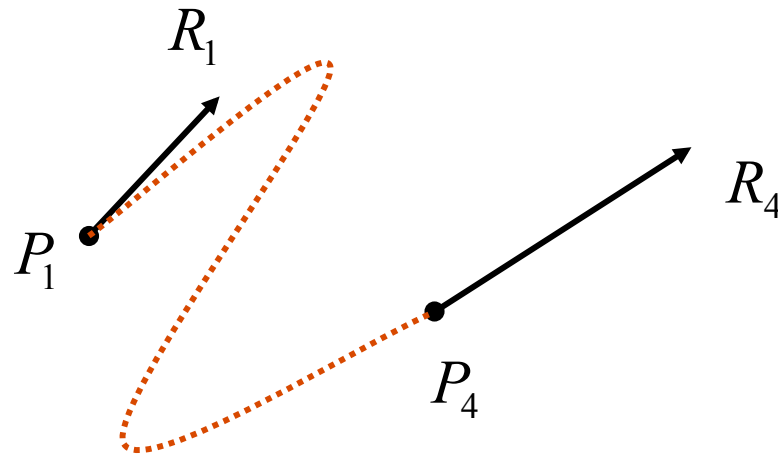
TM : *blending* (poids de chaque contrainte pour t)

Transformations

- Transformer les contraintes G est équivalent à transformer la courbe parce que la courbe est définie par une combinaison linéaire des 4 contraintes
- Donc la courbe est invariant sous rotation, changement d'échelle et translation
- Mais la courbe varie après une projection en perspective

Courbe d'Hermite

- Contraintes
 - points aux extrémités P_1 et P_4
 - tangentes aux extrémités R_1 et R_4



Courbe d'Hermite

$$x(t) = T \cdot M_H \cdot G_{Hx}$$

$$t = 0 \quad x(0) = P_{1x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M_H \cdot G_{Hx}$$

$$t = 1 \quad x(1) = P_{4x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot M_H \cdot G_{Hx}$$

$$t = 0 \quad x'(0) = R_{1x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot M_H \cdot G_{Hx}$$

$$t = 1 \quad x'(1) = R_{4x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot M_H \cdot G_{Hx}$$

$$G_{Hx} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot M_H \cdot G_{Hx}$$

Courbe d'Hermite

$$G_{Hx} = [] \cdot M_H \cdot G_{Hx}$$

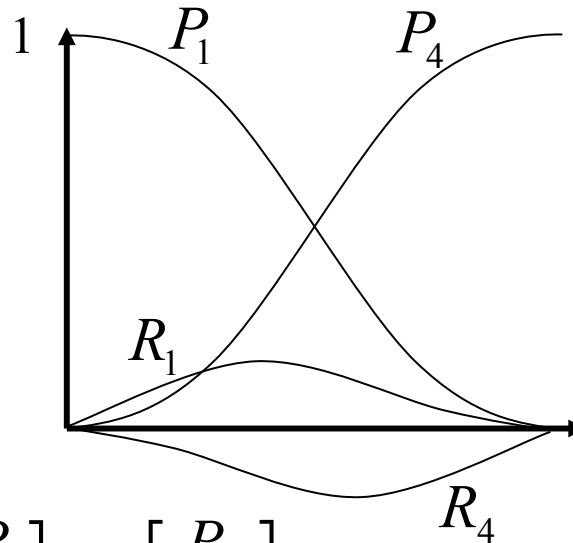
$$[] \cdot M_H = I \Rightarrow M_H = []^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)] = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

Courbe d'Hermite

$$B_H = T \cdot M_H = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{fonctions de} \\ \text{blending} \\ \text{d'Hermite} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &P_1(2t^3 - 3t^2 + 1) + \\ &P_4(-2t^3 + 3t^2) + \\ &R_1(t^3 - 2t^2 + t) + \\ &R_4(t^3 - t^2) \end{aligned}$$



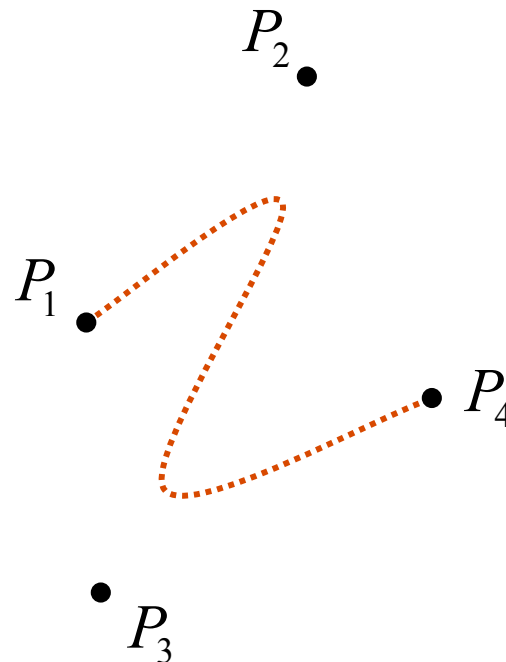
$$C^0 : \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P_4 \\ P_7 \\ R \\ R_7 \end{bmatrix}$$

$$G^1 : \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P_4 \\ P_7 \\ kR_4 \\ R_7 \end{bmatrix}$$

$$C^1 : \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P_4 \\ P_7 \\ R_4 \\ R_7 \end{bmatrix}$$

Courbe de Bézier

- Contraintes
 - points aux extrémités P_1 et P_4
 - tangentes aux extrémités sont déterminées par deux points de contrôle P_2 et P_3

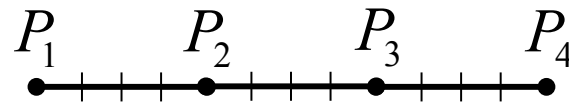


Tangentes sur Bézier

- Les deux tangentes d'Hermite sont déterminées par les deux points de contrôle additionnels P_2 et P_3

$$\vec{P_1P_2} \quad Q'(0) = 3(P_2 - P_1) \quad \text{facteur 3: vitesse constante}$$

$$\vec{P_3P_4} \quad Q'(1) = 3(P_4 - P_3)$$



$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

$$G_H = M_{BH} \cdot G_B$$

De Hermite à Bézier

$$G_H = M_{BH} \cdot G_B$$

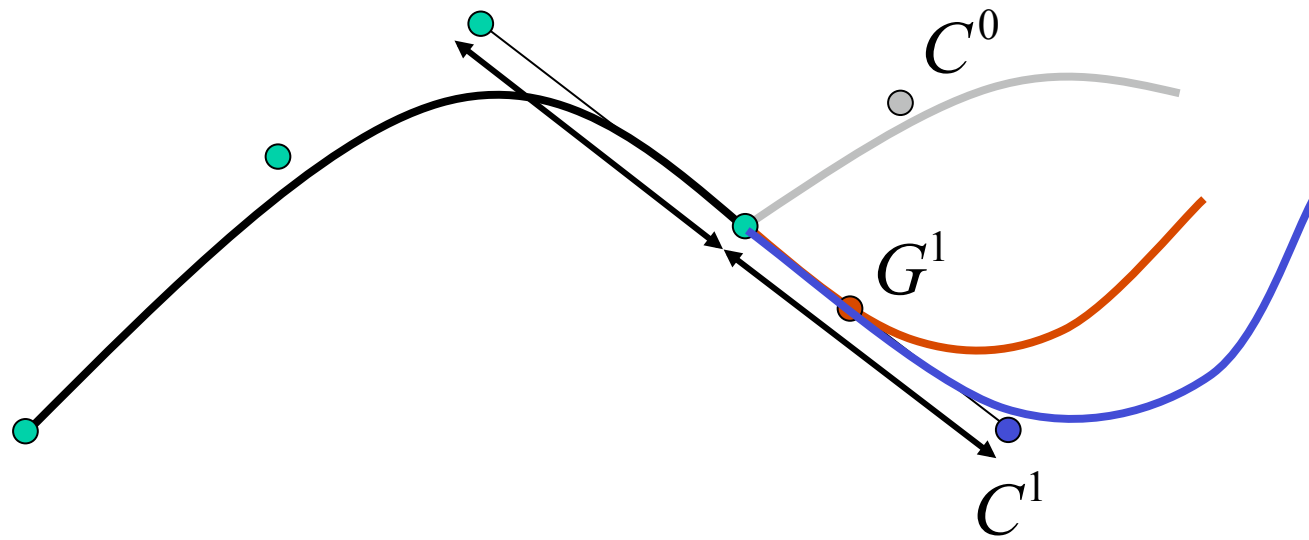
$$\begin{aligned} Q(t) &= T \cdot M_H \cdot G_H \\ &= T \cdot M_H \cdot (M_{BH} \cdot G_B) \\ &= T \cdot (M_H \cdot M_{BH}) \cdot G_B \\ &= T \cdot M_B \cdot G_B \end{aligned}$$

$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contraintes de Bézier

$G^1 : P_3 - P_4 = k(P_4 - P_5) \quad 0 < k \quad P_3, P_4, P_5$ sont colinéaires

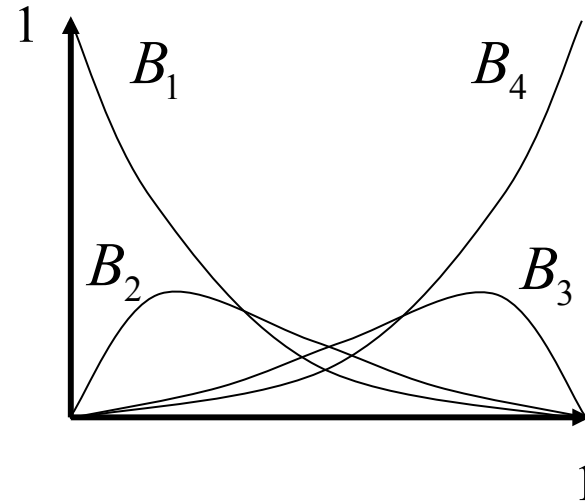
$C^1 : \quad k = 1 \quad \dots$ et à la même distance



Courbe de Bézier

$$B_B = T \cdot M_B = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{fonctions de} \\ \text{blending de} \\ \text{Bézier} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &P_1(1-t)^3 + \\ &P_2(1-t)^2 3t + \\ &P_3(1-t)3t^2 + \\ &P_4(t^3) \end{aligned}$$



Polynôme de Bernstein

Propriétés de Bézier

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \sum_4 B_B(t) = 1 \\ (2) \quad B_B(t) \geq 0 \end{array} \right\} 0 \leq t \leq 1$$

- (1) et (2) impliquent que
 - $Q(t)$ est une somme pondérée des 4 points
 - la courbe est complètement comprise dans l'enveloppe convexe (*convex hull*) des 4 points
- Enveloppe convexe (*convex hull*) peut servir à
 - subdivision (planarité de la courbe)
 - clippage (acceptation/rejet trivial)

Cubique par morceaux: propriétés désirées

- Chaque segment est une cubique
 - La courbe interpole les points de contrôle
 - La courbe a contrôle local
 - La courbe a une continuité C^2
-
- Les différentes familles de représentations ne peuvent satisfaire au plus que trois de ces quatre propriétés

Splines

- baguette flexible de métal avec des attaches pour la déformer
- utilisée pour mesurer des surfaces courbes
- équivalent mathématique est la spline cubique naturelle

Spline cubique naturelle

- + interpole les points de contrôle
- + C^2 donc plus lisse que Hermite et Bézier à C^1
- les coefficients dépendent des n points de contrôle, donc contrôle global seulement
- doit inverser une matrice de $(n + 1) \times (n + 1)$
code dans *Numerical Recipes in C*

Impossible d'avoir C^2 , interpoler les points et un contrôle local avec des courbes cubiques

B-spline uniforme non-rationnelle

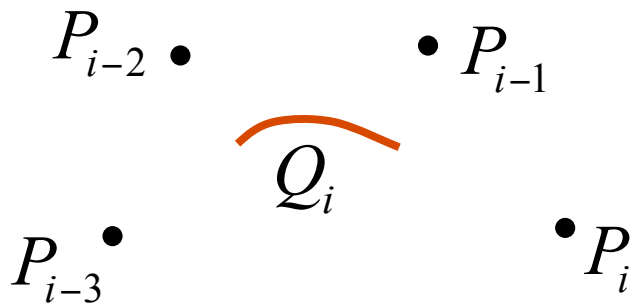
- + les coefficients ne dépendent que de quelques points, donc contrôle local
- + même continuité que la spline naturelle
- n'interpole pas les points de contrôle

$m + 1$ points de contrôle : P_0, \dots, P_m $m \geq 3$

$m - 2$ segments de courbes Q_3, \dots, Q_m

B -spline uniforme non-rationnelle

Q_i est défini par 4 points de contrôle $P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i$



- Propriété de l'enveloppe convexe

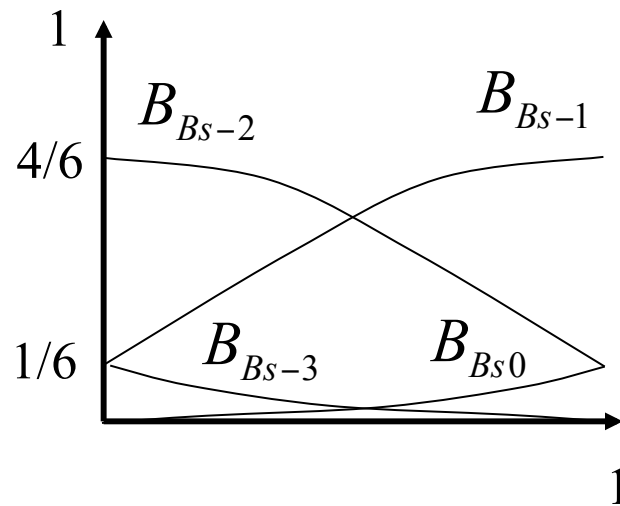
$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \sum_4 B_S(t) = 1 \\ (2) \quad B_S(t) \geq 0 \end{array} \right\} \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad t_{i+1} - t_i = 1 \quad (\text{uniforme})$$

- P_i affecte 4 segments

B-spline uniforme non-rationnelle

$$Q_i(t) = T_i \cdot M_{Bs} \cdot G_{Bsi}$$

$$Q_i(t) = \begin{bmatrix} (t - t_i)^3 & (t - t_i)^2 & (t - t_i) & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$



B-spline non-uniforme non-rationnelle

- + les intervalles entre les noeuds n'ont pas à être uniformément espacés en t
- ceci entraîne que les fonctions de *blending* diffèrent dans chaque intervalle
- + possible de réduire de C^2 à C^1 à C^0 et même non- C^0
- + à C^0 la courbe interpole les points de contrôle sans *hacking* (*i.e.* sans introduire des segments linéaires)
- + peut ajouter des noeuds intermédiaires pour un contrôle encore plus local

B-spline non-uniforme rationnelle (*NURBS*)

$$Q(t) = [X(t) \quad Y(t) \quad Z(t) \quad W(t)]$$

$$W(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad [X(t)/1 \quad Y(t)/1 \quad Z(t)/1 \quad 1]$$

- Points de contrôle sont définis en coordonnées homogènes
- Invariant sous rotation, changement d'échelle, translation et *projection en perspective* (projette les points de contrôle)
- Définit aussi les coniques (alors que non-rationnelle approxime seulement les coniques)

Spline Catmull-Rom

- + Interpole les points de contrôle à l'exception du premier et du dernier point
- + Contrôle local
- + Tangente à P_i est parallèle au segment $P_{i+1} - P_{i-1}$
- Ne possède plus la propriété de l'enveloppe convexe

$$Q_i(t) = T_i \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

β -spline

- Ajoute deux variables de contrôle valide sur toute la courbe
- β_1 : biais si $1 < \beta_1$; la spline est influencée par la tangente du côté supérieur de t
si $\beta_1 < 1$; biais dans l'autre direction
- β_2 : tension si $1 < \beta_2$; la spline est rapprochée de ses points de contrôle
- G^2 mais seulement C^0

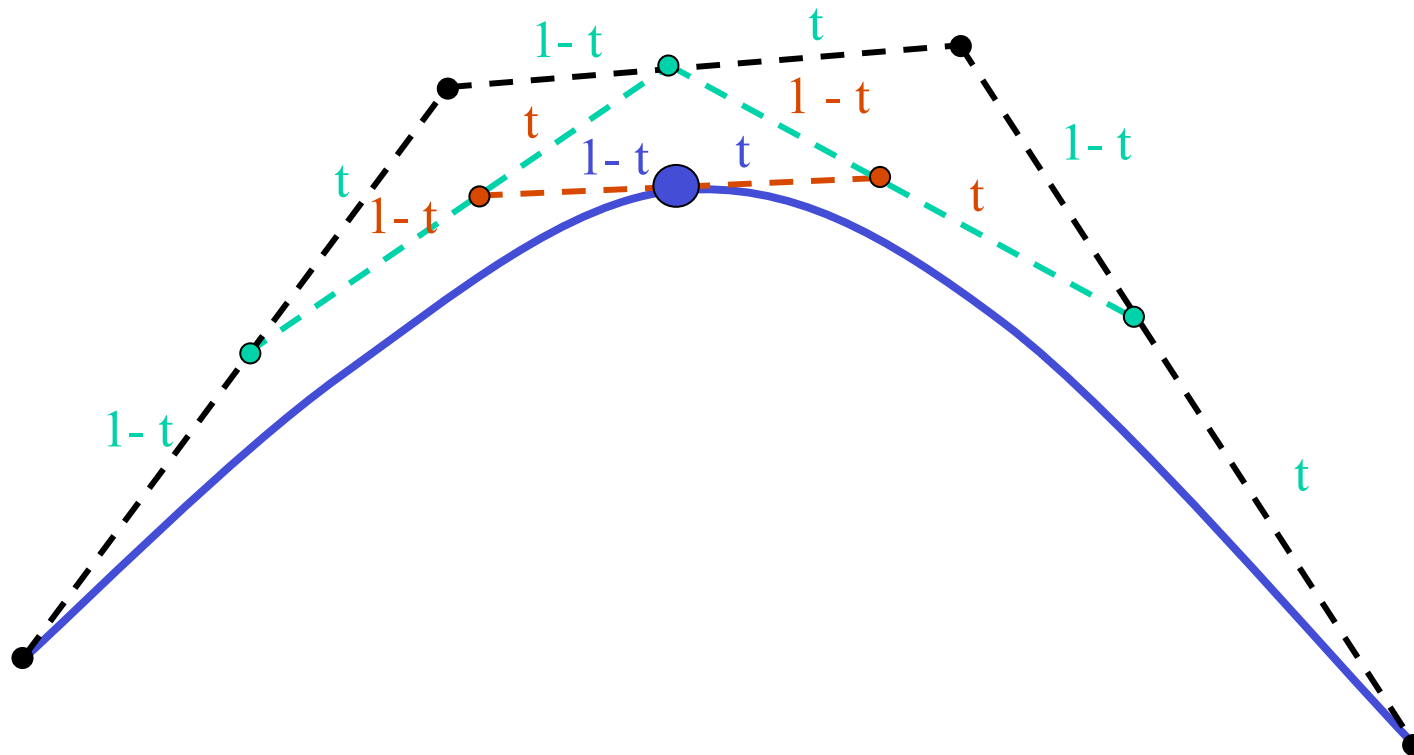
Contrôle de courbe

- On peut modifier la forme d'une courbe en manipulant ses points de contrôle (G)
- Mais la forme peut ne pas correspondre aux attentes de l'utilisateur dues aux limites de la cubique et du nombre de segments

Contrôle de courbe - Solutions

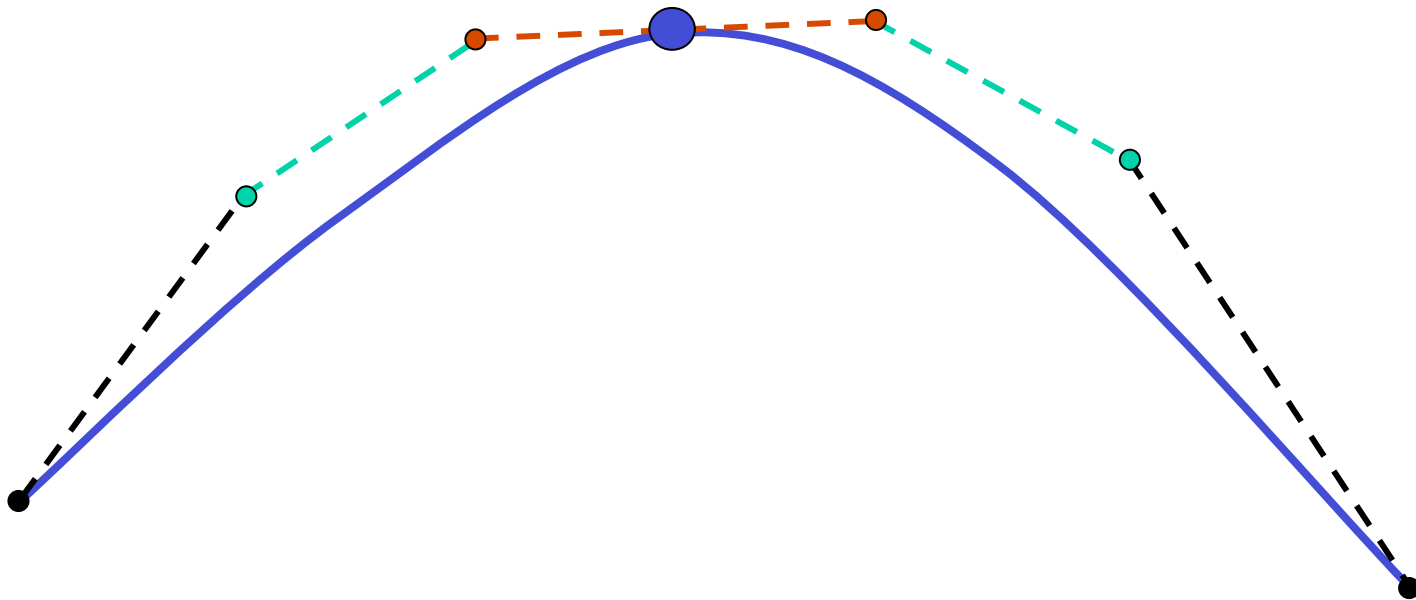
- Augmenter le degré du polynôme (>3)
 - plus de points d'inflexions (oscillations)
 - plus coûteux à évaluer
- Subdiviser en plus de segments
 - construction de *de Casteljau* pour évaluer une courbe de Bézier à la position t
 - diminution de variation des enveloppes convexes de la courbe

Construction de *de Casteljau*



Diminution de variation (*variation diminishing*)

- Les nouveaux points de contrôle sont à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points de contrôle de la courbe non-subdivisée



Conversion entre différentes représentations

$$Q(t) = T \cdot M_2 \cdot G_2 = T \cdot M_1 \cdot G_1$$

$$M_2 \cdot G_2 = M_1 \cdot G_1$$

$$G_2 = (M_2^{-1} \cdot M_1) \cdot G_1$$

$$G_2 = M_{\text{conversion}} \cdot G_1$$

Traçage de courbe

- Evaluation à $t + \delta$ de $Q(\cdot)$

- naïf ($11x$, $10+$)

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

- règle de factorisation de Horner ($9x$, $10+$)

$$x(t) = ((a_x t + b_x)t + c_x)t + d_x$$

- incrémental (*forward differences*) ($9+$, *init*)

Forward differences

$$x(t + \delta) = x(t) + \Delta x(t)$$

$$\Delta x(t) = x(t + \delta) - x(t)$$

$$\begin{aligned} &= a_x(t + \delta)^3 + b_x(t + \delta)^2 + c_x(t + \delta) + d_x - a_x t^3 - b_x t^2 - c_x t - d_x \\ &= (3a_x \delta)t^2 + (3a_x \delta^2 + 2b_x \delta)t + \delta(a_x \delta^2 + b_x \delta + c_x) \end{aligned}$$

$$\Delta x(t + \delta) = \Delta x(t) + \Delta(\Delta x(t))$$

$$\Delta(\Delta x(t)) = \Delta x(t + \delta) - \Delta x(t)$$

$$= 6a_x \delta t + 6a_x \delta^3 + 2b_x \delta^2$$

$$\Delta(\Delta(\Delta x(t))) = \Delta(\Delta x(t + \delta)) - \Delta(\Delta x(t))$$

$$= 6a_x \delta^3$$

Forward differences

$$\text{à } t=0: \quad x(0) = d_x$$

$$\Delta x(0) = a_x \delta^3 + b_x \delta^2 + c_x \delta$$

$$\Delta(\Delta x(0)) = 6a_x \delta^3 + 2b_x \delta^2$$

$$\Delta(\Delta(\Delta x(0))) = 6a_x \delta^3$$

$$\text{boucle: } \quad x_+ = \Delta x$$

$$\Delta x_+ = \Delta(\Delta x)$$

$$\Delta(\Delta x)_+ = \Delta(\Delta(\Delta x))$$

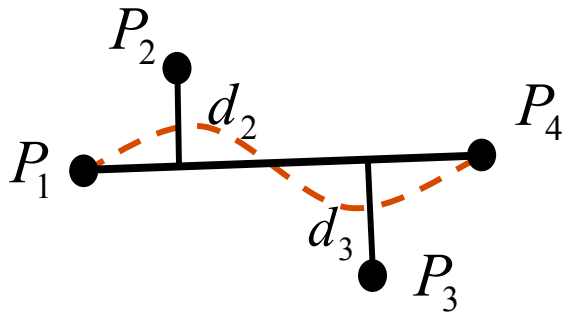
$$\text{segment}(x, y, z)$$

Traçage de courbe

- Evaluations à des intervalles fixes en t
 - Des intervalles réguliers en t ne correspondent pas à des intervalles réguliers en espace 3D
 - Si l'intervalle est trop grand, la courbe ressemble à des segments de lignes; si l'intervalle est trop petit, on fait trop de calculs
- Subdivision récursive basée sur la longueur
 - Si la distance entre $Q(t)$ et $Q(t+dt)$ est plus grande que le seuil désiré, subdivise dt

Traçage de courbe

- Subdivision récursive sur la linéarité
 - critère d'arrêt lorsque la portion de la courbe est suffisamment plate pour être remplacée par un simple segment de ligne
 - basé sur la propriété de l'enveloppe convexe et de la diminution de variation



remplace par P_1P_4
si $d_2 < \varepsilon$ et $d_3 < \varepsilon$

Surfaces bicubiques

$$x(t) = T \cdot M \cdot G_x = T \cdot M \cdot \begin{bmatrix} g_{1x} \\ g_{2x} \\ g_{3x} \\ g_{4x} \end{bmatrix}$$

courbe 1D

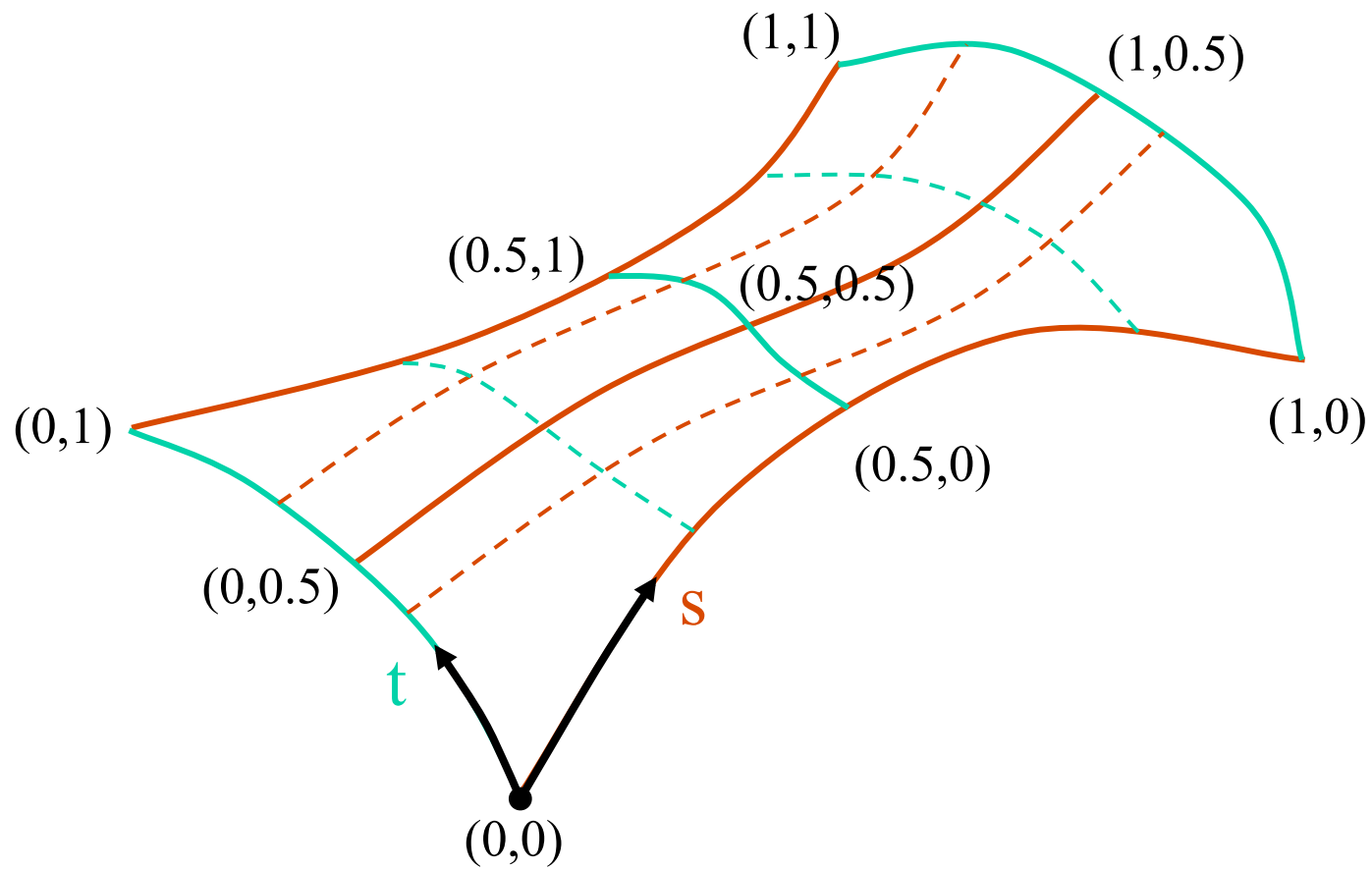
$$Q(t) = T \cdot M \cdot G = T \cdot M \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

courbe 3D

$$Q(s, t) = S \cdot M \cdot G(t) = S \cdot M \cdot \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \\ g_4(t) \end{bmatrix}$$

surface 3D

Surfaces bicubiques



Surfaces bicubiques

- $G(t)$ est constante: courbe cubique
- $G(t)$ n'est pas constante: surface
- $G(t)$ est cubique en t : $Q_i(t) = T \cdot M \cdot G_i$

Afin de conserver t en vecteur ligne:

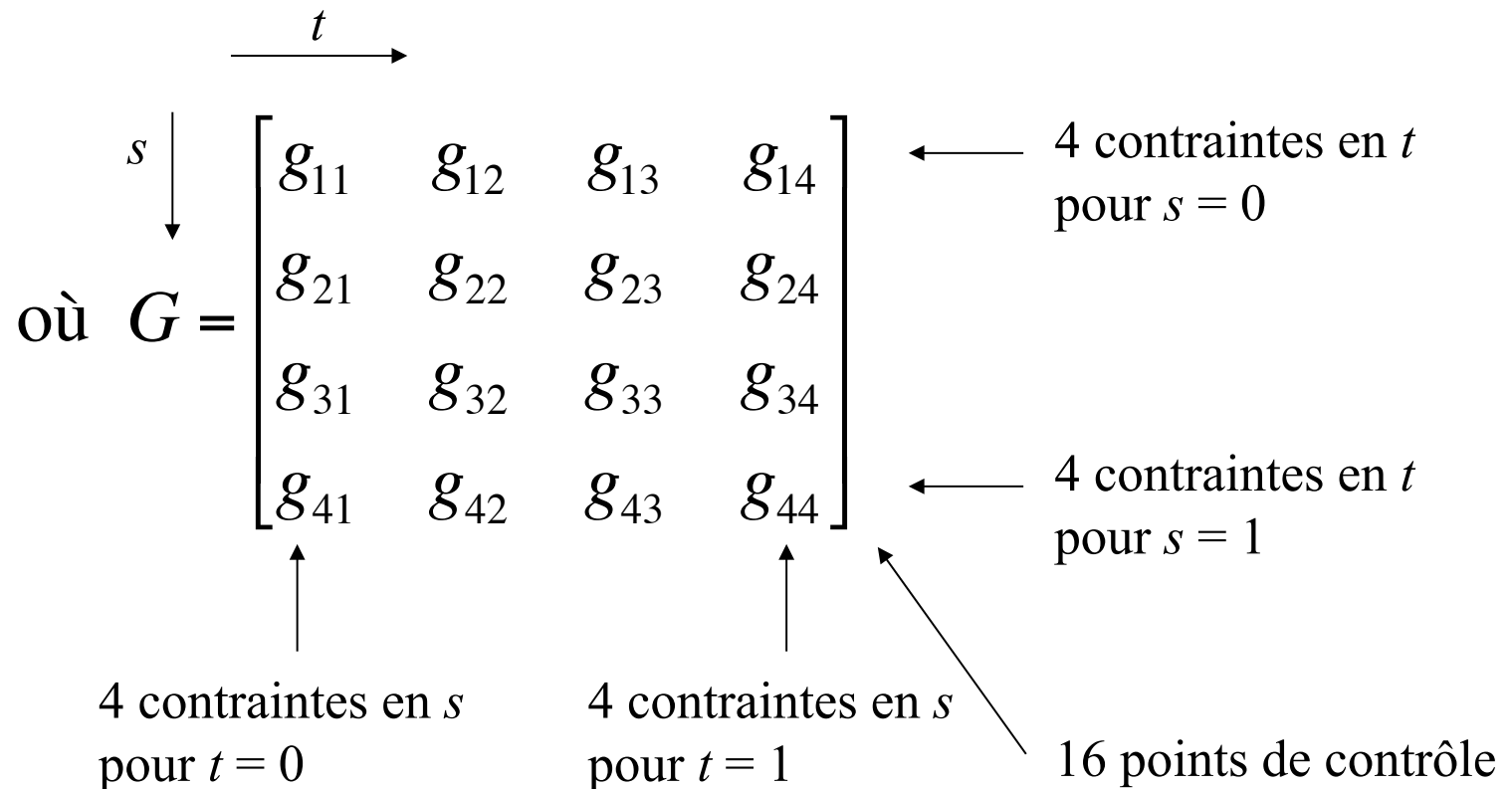
$$(T \cdot M \cdot G_i)^T = G_i^T \cdot M^T \cdot T^T$$

$$Q(s,t) = S \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot T^T$$

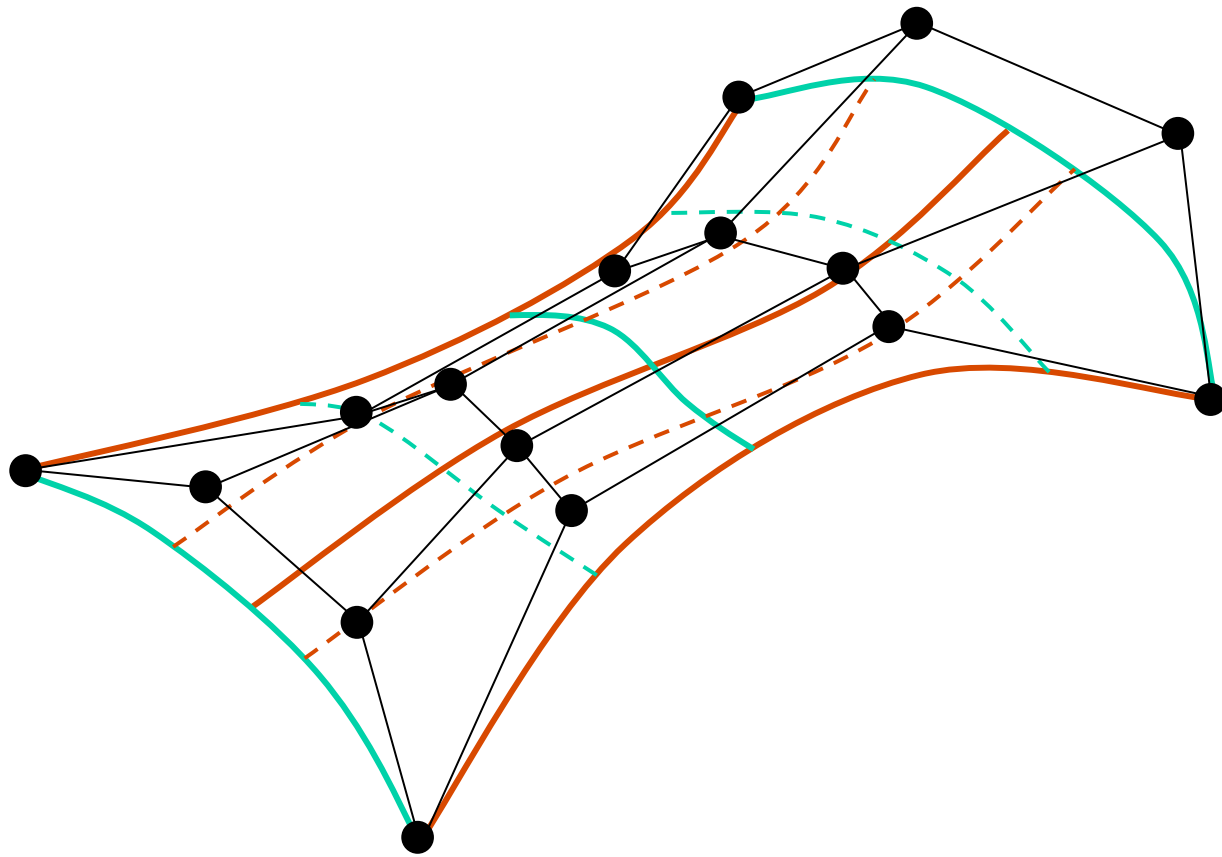
$$\text{où } G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}$$

Surfaces bicubiques

$$Q(s,t) = S \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot T^T$$



Surface de Bézier



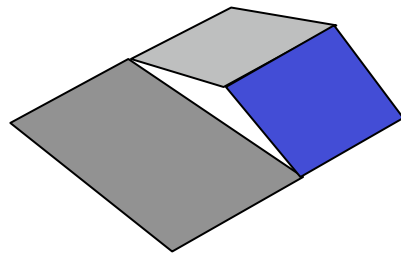
Surface de Bézier

$$x(s,t) = S \cdot M_B \cdot G_{Bx} \cdot M_B^T \cdot T^T$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q(s,t)}{\partial s} &= \frac{\partial(S)}{\partial s} \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot T^T \\ &= \begin{bmatrix} 3s^2 & 2s & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot T^T \\ \frac{\partial Q(s,t)}{\partial t} &= S \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot \frac{\partial(T^T)}{\partial t} \\ &= S \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right] \vec{N} = \frac{\partial Q(s,t)}{\partial s} \times \frac{\partial Q(s,t)}{\partial t}$$

Notes sur les surfaces bicubiques

- Affichage par subdivision
 - lorsque les subdivisions ne sont pas uniformes dans une des directions paramétriques s ou en t , des craques peuvent apparaître entre les polygones résultants



- Textures
 - paramétrisation $(s, t) \rightarrow (u, v)$

Standards historiques

