# Quelques notes sur l'apprentissage machine

felipe@iro.umontreal.ca

**RALI**
Dept. Informatique et Recherche Opérationnelle
Université de **Montréal**


V0.001

Last compiled: 14 octobre 2019

# Plan

## Portraits de quelques approches

## Modèles de Markov cachés

- Visible/Caché
- Problème 1 : calcul de la probabilité d'une observation
- Problème 2 : recherche de la séquence d'états
- Problème 3 : apprendre $\lambda$
- Varia
- HMMs en reconnaissance de la parole

## Perceptron

## Une plateforme amusante

rali

# Plan

## Portraits de quelques approches

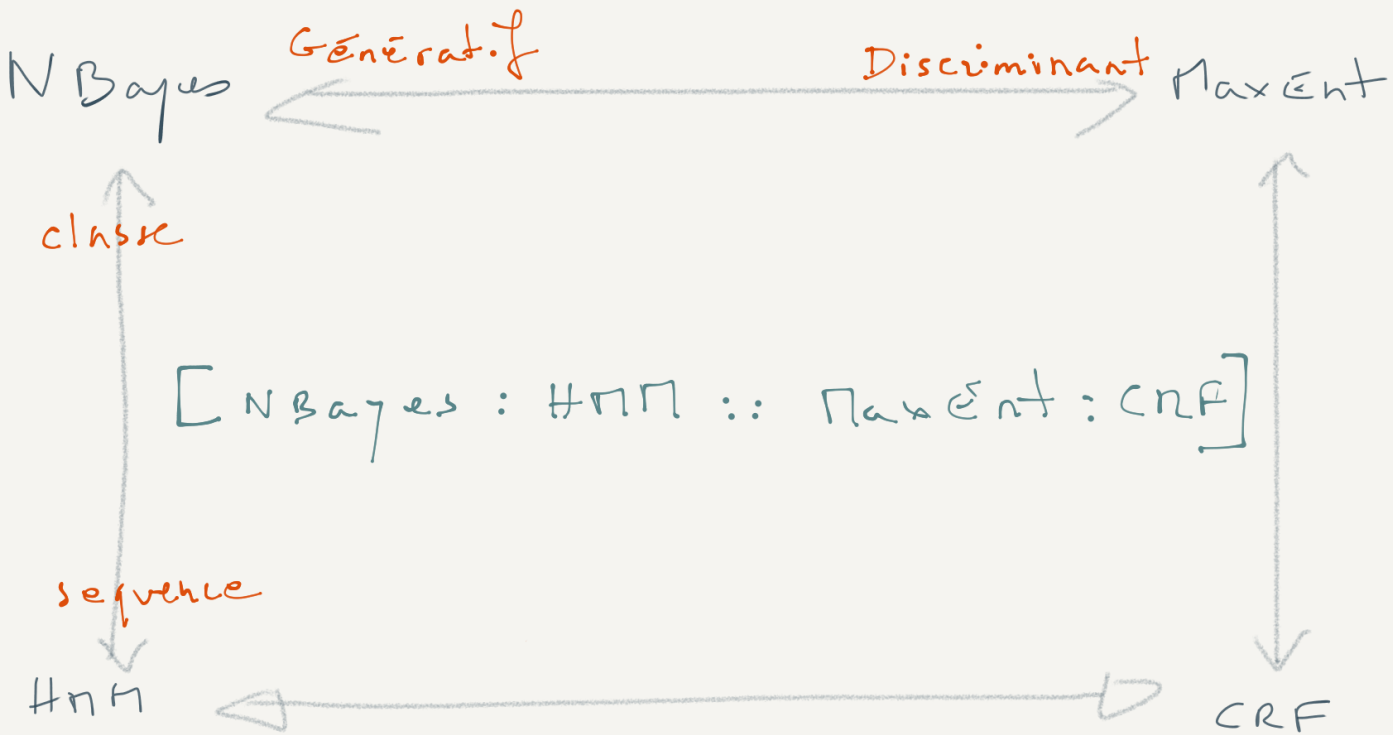
Modèles de Markov cachés
- Visible/Caché
- Problème 1 : calcul de la probabilité d'une observation
- Problème 2 : recherche de la séquence d'états
- Problème 3 : apprendre $\lambda$
- Varia
- HMMs en reconnaissance de la parole

Perceptron

Une plateforme amusante

rali

# Analogie quand tu nous tiens



# Naive Bayes

in : $D = \{(x_1^n, y)\}$ où $x_i \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$

- $$\begin{aligned} \hat{y} &= \text{argmax}_{y \in \mathcal{Y}}\, p(y|x_1^n) \\ &\propto \text{argmax}_{y \in \mathcal{Y}}\, p(x_1^n, y) \\ &= \text{argmax}_{y \in \mathcal{Y}}\, p(y) \times p(x_1^n|y) \\ &= \text{argmax}_{y \in \mathcal{Y}}\, p(y) \times \prod_i p(x_i|y) \end{aligned}$$

- si l'input est un document $d$, on peut considérer que $x_i$ est booléen (présence ou non du $i$e mot du vocabulaire dans $d$) ou un scalaire (compte $i$e mot dans $d$) ; la jointe peut alors être représentée par une binomiale ou une multinomiale respectivement
- on peut sélectionner un sous-ensemble de mots, les lemmatiser ou non, etc. un bon baseline
- Lire ***[McCallum and Nigam, 1998]*** pour une application à la classification de documents

# MaxEnt

in : $D = \{(x_1^n, y)\}$ où $x_i \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, et $m$ fonctions booléennes $f_j(x, y)$

- soit $n(x, y) = \exp\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x, y)\right)$,

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \operatorname{argmax}_{y \in \mathcal{Y}} p_\lambda(y|x) \\ &= \operatorname{argmax}_{y \in \mathcal{Y}} \frac{n(x,y)}{\sum_{y \in \mathcal{Y}} n(x,y)} \end{aligned}$$

- entraînement $(\lambda_i)$ par une variante de EM ou descente de gradient (une couche softmax sans couche cachée). Intuitivement, c'est le modèle parmi ceux *compatibles avec le corpus d'entraînement* qui a la plus grande entropie croisée : $H(y|x) = \sum_{(x,y)} p(y, x) \log p(y|x)$
- très souple, les fonctions peuvent se recouvrir en terme d'information. Lire ***[Berger et al., 1996]***.
- **note :** on peut simuler un naive bayes avec des fonctions $f_{w,c}(x, y)$ retournant vrai si $w$ apparait au moins $c$ fois dans $x$

# HMM

in : $D = \{(x_1^n, y_1^n)\}$ ; $x_i \in \mathcal{X}$, $y_i \in \mathcal{Y}$

- décodage à l'aide de Viterbi en temps $o(E^2 \times n)$ ; $E$ est le nombre d'états et $n$ la longueur d'une séquence

$$\begin{aligned} \hat{y}_1^n = \text{argmax}_{y_1^n} p(y_1^n | x_1^n) &= \text{argmax}_{y_1^n} p(y_1^n, x_1^n) \\ &= \text{argmax}_{y_1^n} \prod_{i=1}^n p(y_i | y_{i-1}) \times p(x_i | y_i) \end{aligned}$$

- estimée des paramètres par fréquence relative (supervisé) ou via EM (transition = bigramme, émission = unigramme)
- cons : ne capture pas les dépendances longues
- Lire ***[Rabiner, 1989]***

rali

# CRF (linéaire)

in : $D = \{(x_1^n, y_1^n)\}$ ; $x_i \in \mathcal{X}$, $y_i \in \mathcal{Y}$, $K$ fonctions valuées $f_k \in \mathbb{R}$

- Inférence via Viterbi :

$$\begin{aligned} \hat{y}_1^n &= \operatorname{argmax}_{y \in \mathcal{Y}^n} p(y|x) \\ &= \operatorname{argmax}_{y \in \mathcal{Y}^n} \frac{1}{Z(x)} \underbrace{\exp\left(\sum_i \sum_{k=1}^{K} \lambda_k f_k(y_i, y_{i-1}, x, i)\right)}_{\phi(x,y)} \end{aligned}$$

  où $Z(x) = \sum_{y'} \phi(x, y')$

- De très bon packages (ex : Wapiti), approche forte.
- Lire ***[Lafferty, 2001]***.

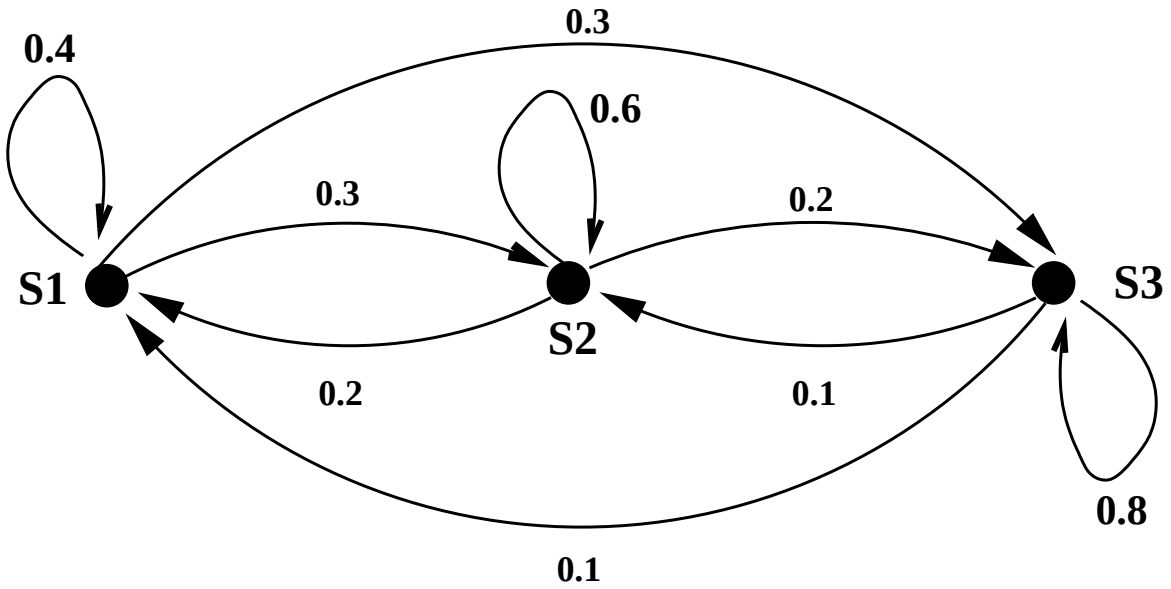
# Plan



rali

# Modèle de Markov visible

$S_1 =$ pluie; $S_2 =$ nuage; $S_3 =$ soleil




$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$ matrice de transitions

**Note :** $\forall (i,j) \in [1,3],\ a_{ij} >= 0, \quad$ et $\forall i \in [1,3], \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = 1$

# Quel temps fera-t-il les huit prochains jours ?

$$p(S_3 S_3 S_3 S_1 S_1 S_3 S_2 S_3) \stackrel{def}{=}$$

$$p(S_3)p(S_3|S_3)p(S_3|S_3 S_3)p(S_1|S_3 S_3 S_3)p(S_1|S_1 S_3 S_3 S_3)$$
$$p(S_3|S_1 S_1 S_3 S_3 S_3)p(S_2|S_3 S_1 S_1 S_3 S_3 S_3)$$
$$p(S_3|S_2 S_3 S_1 S_1 S_3 S_3 S_3) \approx$$

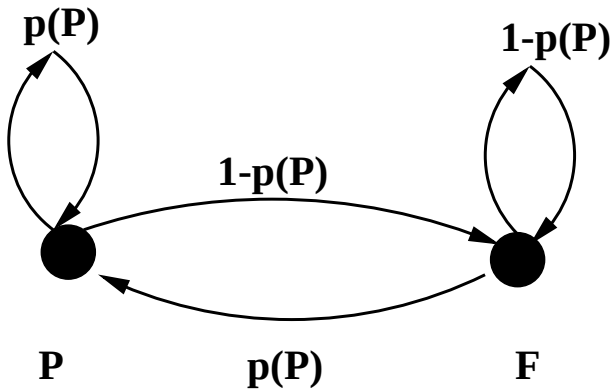
$$p(S_3)p(S_3|S_3)p(S_3|S_3)p(S_1|S_3)p(S_1|S_1)$$
$$p(S_3|S_1)p(S_2|S_3)p(S_3|S_2) =$$
$$\pi_3 \times a_{33} \times a_{33} \times a_{31} \times a_{11} \times a_{13} \times a_{32} \times a_{23} = 1.536 \times 10^{-4}$$

- hypothèse markovienne d'ordre d'ordre $n$ :
  $p(S_t|S_{t-1} \ldots S_1) = p(S_t|S_{t-1} \ldots S_{t-n})$
- indépendance au temps : $p(q_t = S_j|q_{t-1} = S_i) = p(S_j|S_i)$

rali

# Modèles markoviens et jets de pièces

- On vous annonce oralement le résultat de tirages (pile ou face) sans vous montrer comment on procède aux tirages.
- Première modélisation : Il existe une pièce (possiblement biaisée). Un état pour pile, un état pour face. Avec ce modèle chaque observation spécifie la séquence d'états
  - c'est un modèle visible (VMM)

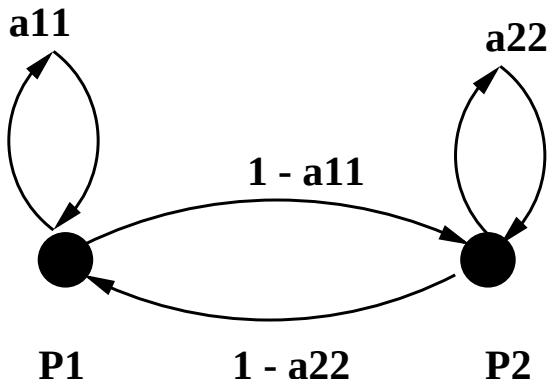



| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O | = | P | P | F | F | P | F | F | P | ... |
| S | = | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | ... |

paramètre : $p(Pile)$

# Modèles markoviens et jets de pièces

- Deuxième modèlisation : Il existe deux pièces (possiblement biaisées de manière différente) que l'opérateur change à son gré lors de chaque tirage.
- Cette fois-ci, l'observation des tirages ne nous spécifie pas dans quel état (pièce) de notre modèle on se trouve.
  - la séquence d'états $S$ est cachée.




| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O | = | P | P | F | F | P | F | F | P | ... |
| S | = | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | ... |

4 paramètres : $p_1(Pile), p_2(Pile), a_{11}, a_{22}$

# Des urnes et des balles

- $N$ urnes qui contiennent chacune des balles de couleur. Il y a $M$ couleurs différentes de balles.
- Processus génératif : Un génie tire une balle d'une urne initiale. Il annonce la couleur de la balle et repose la balle dans son urne. Selon un processus aléatoire dépendant de la dernière urne concernée, le génie choisit une nouvelle urne (qui peut-être la même que la précédente) et effectue le tirage d'une balle dans cette urne, etc.
- Modélisation possible : un HMM à $N$ états (un par urne) ; chaque état émet une balle de couleur selon une loi de probabilité spécifique à l'état. Le choix d'une urne par le génie est modélisé par les probabilités de transition d'un état vers un autre.

rali

# Des urnes et des balles

- 3 couleurs : V J R (symboles), 3 urnes (états : $s_1, s_2, s_3$).
- Le modèle est spécifié par $\lambda = \{\pi, A, B\}$ où $\pi = \{0.3, 0.3, 0.4\}$, et

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline s_1 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ s_2 & 0.4 & 0.0 & 0.6 \\ s_3 & 0.0 & 0.3 & 0.7 \end{array}\right] \quad B = \left[\begin{array}{c|ccc} & V & J & R \\ \hline s_1 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ s_2 & 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ s_3 & 0.2 & 0.0 & 0.8 \end{array}\right]$$

- $A$ et $B$ sont respectivement les matrices de transition et d'émission.
- Soit une séquence d'observations : $O = \{VJRV\}$
  $p(O|\lambda)$ ?

# Caractérisation d'un HMM

les états ($\{S_1, \ldots, S_N\}$) : la séquence d'états est cachée, mais un état correspond souvent à un phénomène précis (ex. urne).

les observations ($\{v_1, \ldots, v_M\}$) : l'alphabet avec lequel on décrit les observations (ex : la couleur des balles).

les probabilités de transition ($A = \{a_{i,j}\}$) pour tout $(i,j) \in [1,N]$ avec : $a_{ij} = p(q_t = S_j | q_{t-1} = s_i), \quad \forall (i,j) \in [1,N]$

**Note :** $a_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1 \; \forall (i,j) \in [1,N]$

les probabilités d'émission ($B = \{b_j(k)\}$) pour tout $j \in [1,N]$ et $k \in [1,M]$ avec : $b_j(k) = p(v_k \text{ à l'instant } t | q_t = j)$

**Note :** $b_j(k) \geq 0$ et $\sum_{o=1}^{M} b_j(o) = 1$

les probabilités initiales ($\pi = \{\pi_i\}$) avec $\pi_i = p(q_1 = S_i), \; \forall i$

**Note :** $\pi_i(k) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$

rali

# Les trois problèmes fondamentaux des HMMs

**Évaluation :** Sachant $O = \{O_1 O_2 \dots O_T\}$ et $\lambda = (A, B, \pi)$, comment calculer $p(O|\lambda)$ ?
Évaluer une observation selon un modèle

**Retirer le H de Hidden :** Sachant $O = \{O_1 O_2 \dots O_T\}$ et $\lambda = (A, B, \pi)$, comment trouver la séquence (cachée) **optimale** d'états ?
Ce qui en pratique nous intéresse le plus souvent

**Apprentissage :** Sachant un corpus d'entraînement $O$, comment ajuster les paramètres $\lambda$ du modèle ?
Le problème le plus difficile

# Des urnes et des balles : Évaluation

- Il existe 5 chemins (séquences) qui génèrent $O$ :

$$c_1 = \{s_2 s_1 s_3 s_3\} \quad c_3 = \{s_2 s_1 s_2 s_3\} \quad c_5 = \{s_3 s_2 s_3 s_3\}$$
$$c_2 = \{s_2 s_1 s_3 s_2\} \quad c_4 = \{s_3 s_2 s_3 s_2\}$$

$$\begin{aligned}
p(O, c_1|\lambda) &= \pi_2.b_2(V).a_{21}.b_1(J).a_{13}.b_3(R).a_{33}.b_3(V) &&= 0.00134 \\
p(O, c_2|\lambda) &= \pi_2.b_2(V).a_{21}.b_1(J).a_{13}.b_3(R).a_{32}.b_2(V) &&= 0.00144 \\
p(O, c_3|\lambda) &= \pi_2.b_2(V).a_{21}.b_1(J).a_{12}.b_2(R).a_{23}.b_3(V) &&= 0.000664 \\
p(O, c_4|\lambda) &= \pi_3.b_3(V).a_{32}.b_2(J).a_{23}.b_3(R).a_{32}.b_2(V) &&= 0.0001728 \\
p(O, c_5|\lambda) &= \pi_3.b_3(V).a_{32}.b_2(J).a_{23}.b_3(R).a_{33}.b_3(V) &&= 0.00016128 \\
\hline
p(O|\lambda) &= \textstyle\sum_{i=1}^{5} p(O, c_i, |\lambda) \times p(c_i|\lambda) &&= 0.00377808
\end{aligned}$$

- La séquence qui explique le mieux l'observation est $c_2$
- Les calculs peuvent être factorisés

# Problème 1 : Évaluation

- Soit $Q = q_1 q_2 \dots q_T$ une séquence d'états pouvant "expliquer" $O$.

$$p(O|\lambda) = \sum_{\text{all } Q} p(O, Q|\lambda) = \sum_{\text{all } Q} p(O|Q, \lambda) p(Q|\lambda)$$

- avec :
  $p(O|Q, \lambda) = \prod_{t=1}^{T} p(o_t|q_t, \lambda) = b_{q_1}(o_1) \times b_{q_2}(o_2) \dots b_{q_T}(o_T)$
  $p(Q|\lambda) = \pi_{q_1} \times a_{q_1 q_2} \times \dots a_{q_{T-1} q_T}$
- donc :

$$p(O|\lambda) = \sum_{q_1 \dots q_T} \pi_{q_1} b_{q_1}(o_1) a_{q_1 q_2} b_{q_2}(o_2) \dots a_{q_{T-1} q_T} b_{q_T}(o_T)$$

**Complexité :** $(2T - 1) \times N^T$ multiplications, $N^T - 1$ additions
**Ex :** $N = 5$ (états), $T = 100$ (observations)
$\triangleright$ de l'ordre de $2 \times 100 \times 5^{100} \approx 10^{72}$ opérations !

rali

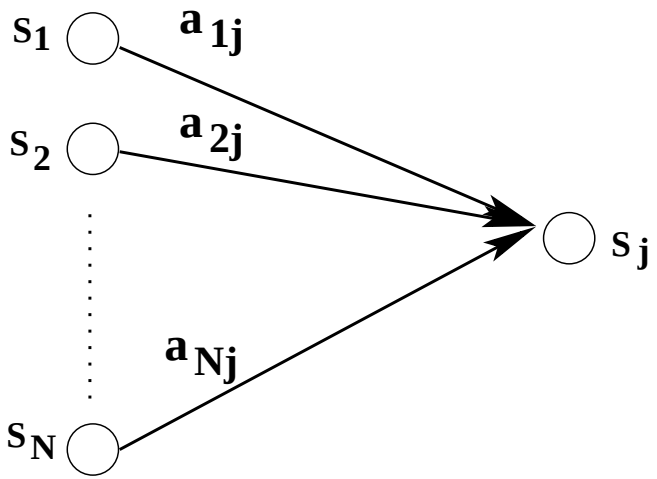
# Calcul forward (en avant) :

$$\alpha_t(i) = p(o_1 \dots o_t, q_t = s_i | \lambda)$$

Init : $\alpha_1(i) = \pi_i b_i(o_1), \quad \forall i \in [1, N]$

Induction : $\alpha_{t+1}(j) = \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i) a_{ij}\right] b_j(o_{t+1})$, pour tout $t \in [1, T-1]$ et pour tout $j \in [1, N]$

Terminaison : $p(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$




**Complexité :** $o(N^2 \times T)$ opérations au lieu de $o(T \times N^T)$

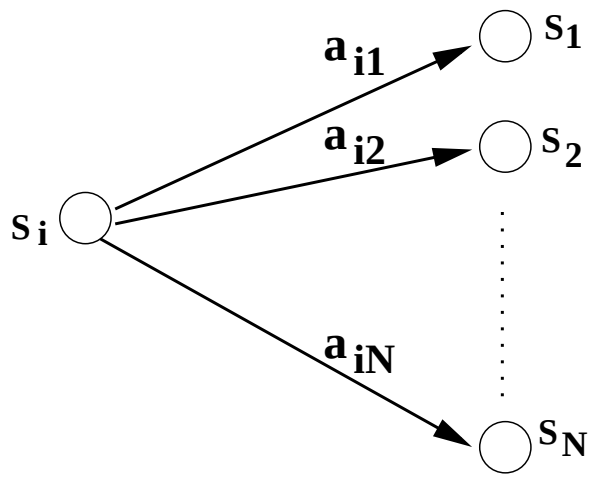
**Ex :** $N = 5,\ T = 100 \triangleright$ environ 3000 opérations (*vs* $10^{72}$ ! ! !)

# Calcul backward (en arrière) :

$$\beta_t(i) = p(o_{t+1} \dots o_T | q_t = s_i, \lambda)$$

Init : $\beta_T(i) = 1, \ \forall i \in [1, N]$

Induction : $\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$ pour tout $t \in [1, T-1]$ et pour tout $i \in [1, N]$




**Note :** même complexité que le calcul forward.

# Problème 2 (trouver la séquence)

- soit $\gamma_t(i) = p(q_t = s_i|O, \lambda)$
- **Un critère possible :** choisir l'état le plus probable individuellement pour chaque $t$

$$\hat{q}_t = \underset{1 \leq i \leq N}{\operatorname{argmax}}[\gamma_t(i)], \ \ \forall t \in [1, T]$$

$$\gamma_t(i) = \frac{p(q_t = s_i, O|\lambda)}{p(O|\lambda)} = \frac{\alpha_t(i) \times \beta_t(i)}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i) \times \beta_t(i)}$$

(On peut calculer les $\gamma$ une fois les $\alpha$ et $\beta$ calculés)

- **Problème :** rien ne garantit que les transitions entre chaque état de $\hat{Q}$ sont valides
- Critère local.

# Algorithme de Viterbi

- $\hat{Q} = \text{argmax}_Q\, p(Q|O,\lambda) = \text{argmax}_Q\, p(O,Q|\lambda)$
  *car* $p(O,Q|\lambda) = p(Q|O,\lambda) \times p(O|\lambda)$
- Posons :

$$\delta_t(i) = \max_{q_1 \cdots q_{t-1}} p(q_1 q_2 \ldots q_t = s_i, o_1 \ldots o_t|\lambda)$$

- Par induction :

$$\delta_{t+1}(j) = [\max_i \delta_t(i) a_{ij}] \times b_j(o_{t+1})$$

- On conserve pour chaque $t$ et chaque $i$ l'état ayant amené au maximum $\delta_t(j)$, soit $\phi_t(j)$

# Viterbi

init : $\delta_1(i) = \pi_i b_i(o_1)$ et $\phi_1(i) = 0$

récursion :

$$\begin{aligned} \delta_t(j) &= \max_{1 \le i \le N}[\delta_{t-1}(i)a_{ij}]b_j(o_t) \quad 2 \le t \le T \\ \phi_t(j) &= \operatorname{argmax}_{1 \le i \le N}[\delta_{t-1}(i)a_{ij}] \quad 1 \le j \le N \end{aligned}$$

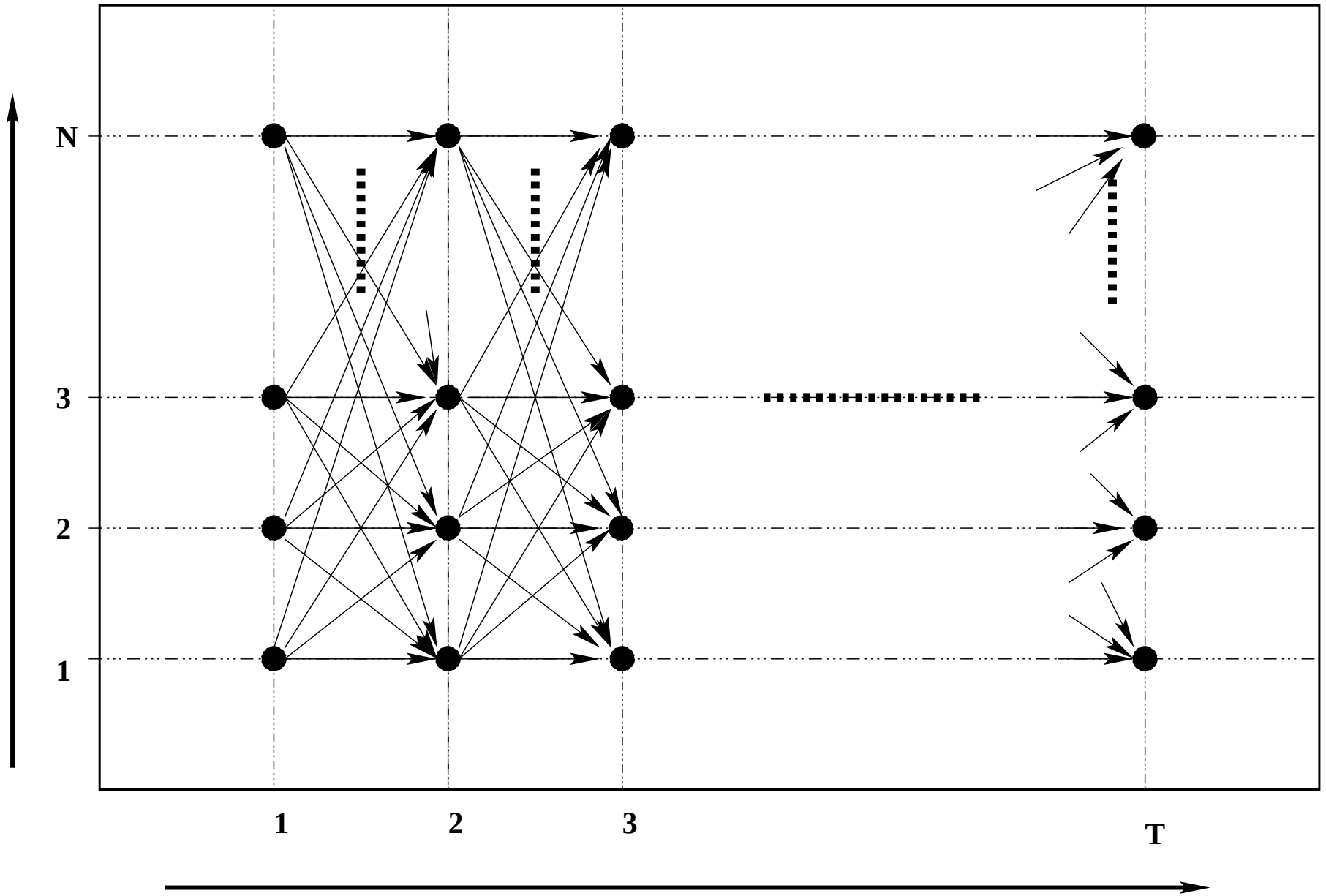
fin :

$$\hat{p} = \max_{1 \le i \le N} \delta_T(i)$$

$$\hat{q}_T = \operatorname*{argmax}_{1 \le i \le N} \delta_T(i)$$

meilleure séquence : $\hat{q}_t = \phi_{t+1}(\hat{q}_{t+1}), \ t = T-1, T-2, \ldots, 1$

# Structure en treillis



# Algorithme de Viterbi

- Soit $S$ une table $N \times T$, telle que :
  $S[t,i] = (\delta_t(i), \phi_t(i)) = (S[t,i].p, S[t,i].b)$

- Soit $A$ $(N \times N)$ la matrice de transition et $B$ $(N \times M)$ la matrice d'émission. (matrice de transition souvent creuse)

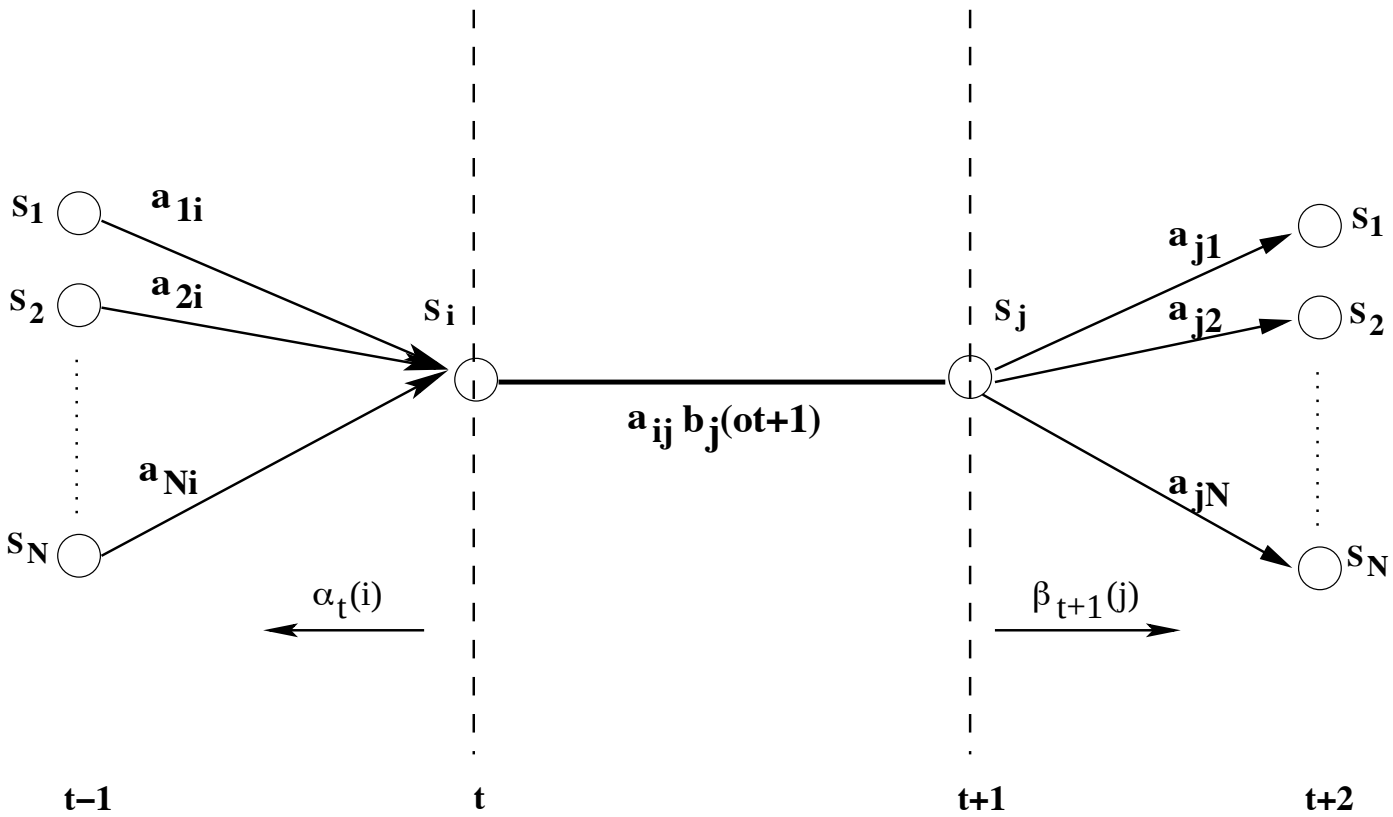
- Pour éviter de faire un cas particulier pour les probabilités initiales, on peut étendre $A$ d'une ligne et d'une colonne : $A[0,i] = \pi_i$ et $A[i,0] = 0 \ \forall i \in [1,N]$

# Algorithme de Viterbi

// Décodage de $o_1 o_2 \ldots o_T$ (à faire dans le domaine des log !)
$S[0,0].p \leftarrow 1$
**for** t $\leftarrow$ 1 à T **do**
  **for** i $\leftarrow$ 1 à N **do**
    $S[t,i].p \leftarrow 0$
    $e \leftarrow B[i, o_t]$
    **for** j $\leftarrow$ 1 à N **do**
      **if** $(A[j,i] > 0)$ **et** $((m = (S[t-1,j].p \times A[j,i])) > S[t,i].p)$
      **then**
        $S[t,i] \leftarrow (m, j)$
    $S[t,i].p \leftarrow S[t,i].p \times e$
// Retour
$\hat{s} \leftarrow \text{argmax}_{i \in [1,N]: S[T,i].p > 0} S[T,i].p$
**if** $S[T,\hat{s}].p > 0$ **then**
  Retourner le chemin à partir de $S[T,\hat{s}]$
**else**
  Échec de reconnaissance

# Problème 3 (estimer $\lambda$) : Algorithme Baum-Welch

- à maximum de vraisemblance, par une procédure itérative (EM) qui maximise $p(O|\lambda)$
- Soit $\xi_t(i,j) = p(q_t = s_i, q_{t+1} = s_j|O,\lambda)$ la probabilité de transiter de $i$ vers $j$ au temps $t$ sachant l'observation $O$ et le modèle.



# Algorithme Baum-Welch

$$\xi_t(i,j) = \frac{p(q_t{=}s_i, q_{t+1}{=}s_j, O|\lambda)}{p(O|\lambda)}$$

$$= \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}$$

Note : $\gamma_t(i) = p(q_t = s_i|O, \lambda)$, d'où : $\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^{N} \xi_t(i,j)$

- $\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)$ = le nombre espéré de transitions depuis $s_i$, sachant l'observation $O$ et le modèle.
- $\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)$ = le nombre espéré de transitions depuis $s_i$ vers $s_j$, sachant $O$ et le modèle.

# Algorithme Baum-Welch

$\overline{\pi_i}$ = nombre espéré de fois où au temps 1 on est en $s_i$ $(= \gamma_1(i))$

$$\overline{a_{ij}} = \frac{\text{nb. espéré de transitions de } s_i \text{ vers } s_j}{\text{nb. espéré de transitions depuis } s_i} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}$$

$$\overline{b_j(k)} = \frac{\text{nb. espéré de fois où on est en } s_j \text{ et on observe } v_k}{\text{nb. espéré de fois où on est dans } s_j} = \frac{\sum_{t=1:o_t=v_k}^{T} \gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j)}$$

- [Baum, 1972] démontre la convergence de cet algorithme

# Algorithme Baum-Welch : Une instance de EM

- Variable cachée : la séquence d'états $q$
- La fonction auxiliaire $A$ est :

$$A(\lambda, \lambda') = \sum_{q \in \mathcal{Q}} p(O, q|\lambda') \log p(O, q|\lambda)$$

ou (ce qui revient au même en terme de maximisation) :

$$A'(\lambda, \lambda') = \sum_{q \in \mathcal{Q}} p(q|O, \lambda') \log p(O, q|\lambda)$$

# Algorithme Baum-Welch : Une instance de EM

- Posons $q = q_1 \dots q_T$ et $O = o_1 \dots o_T$.
- $p(O, q|\lambda) = \pi_{q_1} b_{q_1}(o_1) \prod_{t=2}^{T} a_{q_{t-1} q_t} b_{q_t}(o_t)$

- On peut décomposer $A$ en 3 termes indépendants (au regard de la maximisation) :

$$A(\lambda, \lambda') =$$
$$\sum_{q \in \mathcal{Q}} (\log \pi_{q_1} \times p(O, q|\lambda') + \log b_{q_1}(o_1) \times p(O, q|\lambda')) +$$
$$\sum_{q \in \mathcal{Q}} \left( \sum_{t=2}^{T} \log a_{q_{t-1} q_t} \right) p(O, q|\lambda') +$$
$$\sum_{q \in \mathcal{Q}} \left( \sum_{t=2}^{T} \log b_{q_t}(o_t) \right) p(O, q|\lambda')$$

# Algorithme Baum-Welch : Une instance de EM : cas des $\pi_i$

- Condition nécessaire de la maximisation : $\frac{\delta}{\delta \pi_i} A = 0$
- Maximiser A (selon $\pi_i$) est équivalent à :
  - maximiser seulement $\sum_{q \in \mathcal{Q}} \log \pi_{q_1} p(O, q|\lambda')$
  - qui revient à maximiser $\sum_{i=1}^{N} \log \pi_i p(O, q_1 = i|\lambda')$

- Coefficient de Lagrange ($\mu$) pour la contrainte $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$ :

$$\frac{\delta}{\delta \pi_i} \left( \sum_{i=1}^{N} \log \pi_i p(O, q_1 = i|\lambda') - \mu(\sum_{j=1}^{N} \pi_j - 1) \right) = 0$$

# Algorithme Baum-Welch : Une instance de EM : cas des $\pi_i$

$$\frac{p(O, q_1 = i|\lambda')}{\pi_i} - \mu = 0 \ \forall i \in [1, N]$$

Soit :

$$\pi_i = \frac{p(O, q_1 = i|\lambda')}{\mu} \ \forall i \in [1, N]$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{p(O, q_1 = i|\lambda')}{\mu} \Longrightarrow \mu = \sum_{i=1}^{N} p(O, q_1 = i|\lambda')$$

D'où :

$$\pi_i = \frac{p(O, q_1 = i|\lambda')}{\sum_i p(O, q_1 = i|\lambda')} = \gamma_1(i)$$

# Limitations de l'approche à maximum de vraisemblance

- Soit $V$ modèles $(\lambda_v)$, $v \in [1, V]$, et une tâche de reconnaissance :

$$\hat{v} = \underset{v}{\operatorname{argmax}}\, p(O|\lambda_v)$$

- Lors de l'entraînement ML des modèles, on a :

$$p_v^\star = \max_{\lambda_v} p(O^v|\lambda_v)$$

où $O^v$ représente l'ensemble des données étiquetées $v$ dans le corpus d'entraînement (O).

- un jeu d'observations séparé pour l'entraînement de chaque modèle

# Autre critère

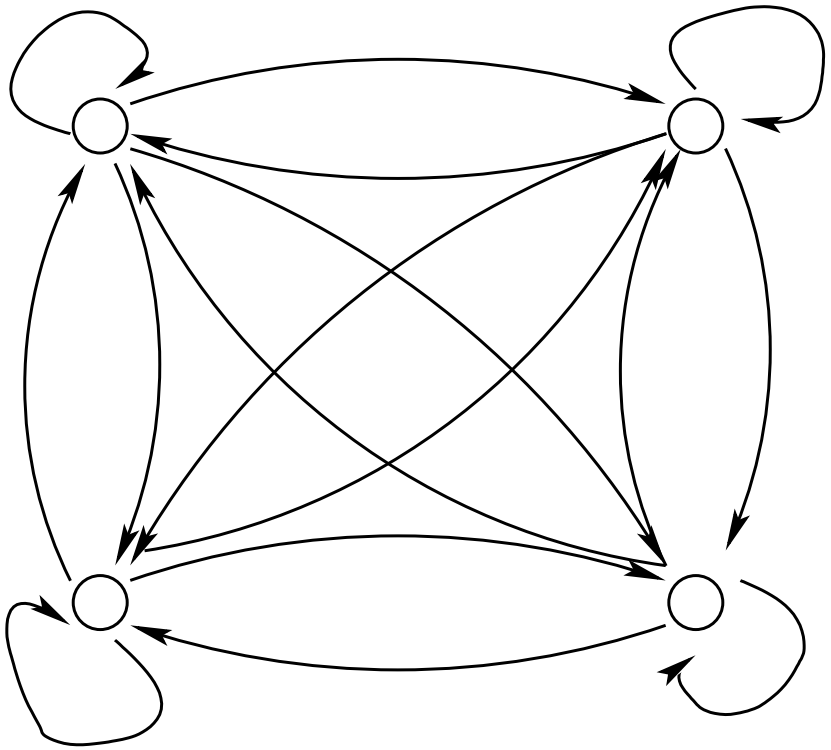
$$I = \max_{\lambda} \left\{ \sum_{v=1}^{V} \left[ \log p(O^v|\lambda_v) - \log \sum_{k \neq v} p(O^v|\lambda_k) \right] \right\}$$

avec $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_V\}$

- Apprentissage plus coûteux

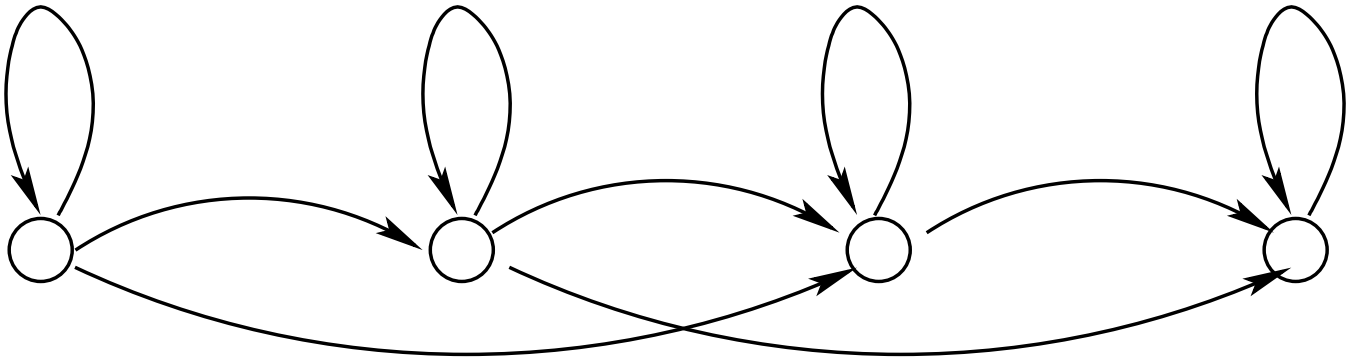
# Topologie d'un modèle

- Un modèle est ergodique si tout état est atteignable depuis tout autre état en un nombre fini de transitions.
- Exemple pour $N = 4$ :



# Topologie d'un modèle

- modèle de Bakis :



- Dans un modèle gauche-droite : $a_{ij} = 0$ si $j < i$

$$\pi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On a souvent des contraintes supplémentaires comme : $a_{ij} = 0$ si $j > i + \Delta$ ($\Delta = 2$ dans les modèles de Bakis)
- Les modèles gauche-droite permettent de modéliser des signaux qui évoluent avec le temps (ex : parole)

# Détail : Scaling des $\alpha_t(i), \beta_t(i)$

$\alpha_t(i) = p(o_1 o_t, q_t = s_i|\lambda)$ nécessite le calcul de :

$$\left(\prod_{s=1}^{t-1} a_{q_s q_{s+1}} \prod_{s=1}^{t} b_{q_s}(o_s)\right)$$

- Plus $t$ est grand et plus le résultat de ce calcul tend vers 0. La précision des réels en C (ou équivalent) est insuffisante pour coder ces valeurs, plus $t$ augmente (de l'ordre de 100).

$\Rightarrow$ Il faut normaliser $\alpha_t(i)$.

- **Idée :** on multiplie $\alpha_t(i)$ par une valeur qui ne dépend que de $t$ et qui assure une bonne dynamique de $\alpha_t(i)$. On applique également le même coefficient à $\beta_t(i)$ (même problème de précision). À la fin, ces coefficients s'annulent.

# Observations multiples

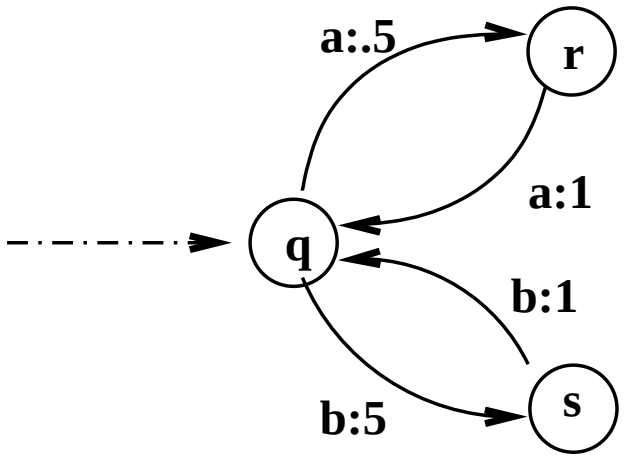
- Souvent, le corpus d'entraînement est présenté comme un ensemble de séquences d'observations (ex : phrases).
- Soit $K$ le nombre de séquences :
  $O = [O^1, O^2, \dots O^K]$ avec $O^i = [O_1^i O_2^i \dots O_{T_i}^i] \ \forall i \in [1, K]$
- en supposant l'indépendance de chaque phrase :
  $p(O|\lambda') = \prod_{k=1}^{K} p(O^k|\lambda') = \prod_{k=1}^{K} P_k$
- Alors les formules de réestimations sont :

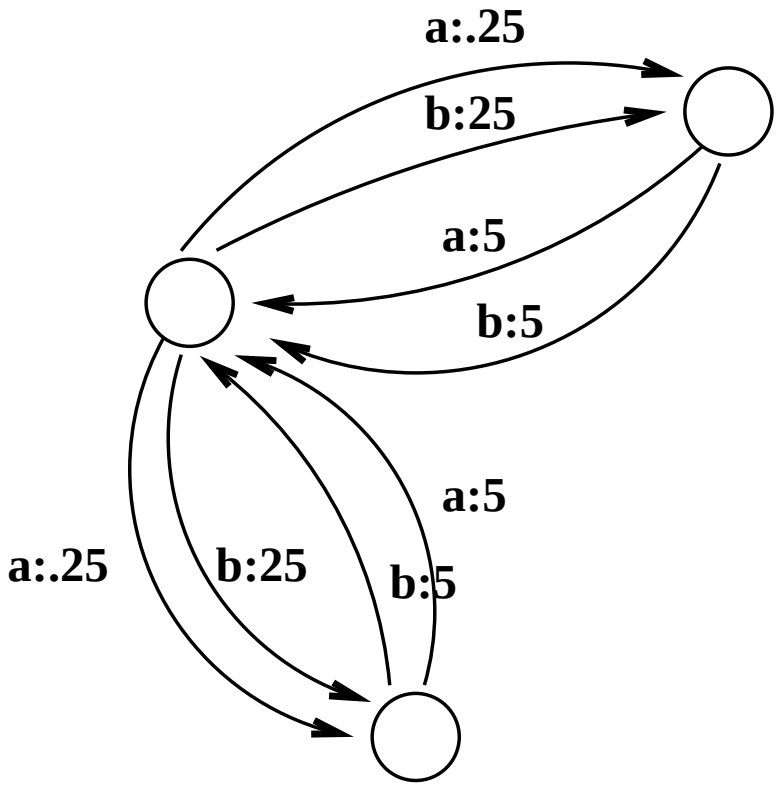
$$\overline{a_{ij}} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{P_k} \sum_{t=1}^{T_k-1} \alpha_t^k(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}^k) \beta_{t+1}^k(j)}{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{P_k} \sum_{t=1}^{T_k-1} \alpha_t^k(i) \beta_t^k(j)}$$

$$\overline{b_j(l)} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{P_k} \sum_{t=1:o_t=v_l}^{T_k-1} \alpha_t^k(i) \beta_t^k(j)}{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{P_k} \sum_{t=1}^{T_k-1} \alpha_t^k(i) \beta_t^k(j)}$$

rali

# Les points critiques




- Apprentissage sur le corpus $\{aabb\}$ :
  - avec le second modèle, les estimées ne changeront pas
- ajouter du bruit lors de l'initialisation avant apprentissage

# Problèmes d'EM

- Si une transition (par exemple) n'est pas utile pour la génération de $O$, alors cette transition va voir sa probabilité décroître à chaque itération.

▷ sur-entraînement

- EM converge vers un maximum local de la vraisemblance.

▷ importance des choix initiaux

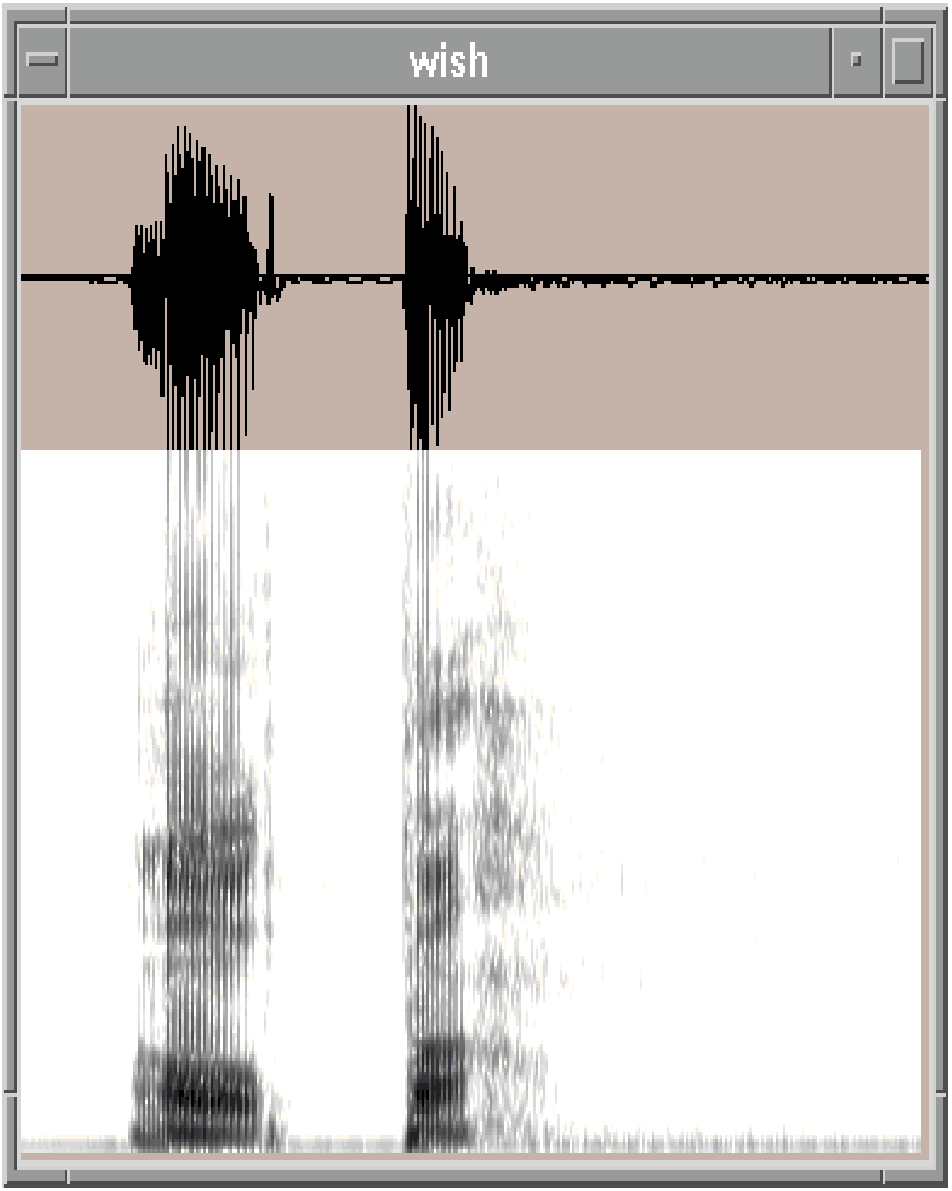
# HMMs en reconnaissance de la parole (RAP)

À l'entrée du canal : une séquence de mots $w$
À la sortie du canal : un signal de parole $O$

$$\begin{aligned}
\hat{w} &= \operatorname{argmax}_{w \in \mathcal{F}} p(w|O) \\
&= \operatorname{argmax}_{w \in \mathcal{F}} \frac{p(O|w) \times p(w)}{p(O)} \\
&= \operatorname{argmax}_{w \in \mathcal{F}} \underbrace{p(O|w)}_{\text{acoustico-phonétique}} \times \underbrace{p(w)}_{\text{modèle de langue}}
\end{aligned}$$

- Pour un bon panorama des techniques markoviennes utilisées dans les systèmes de RAP, lire ***[Huang et al., 1990]***

# Représentation du signal

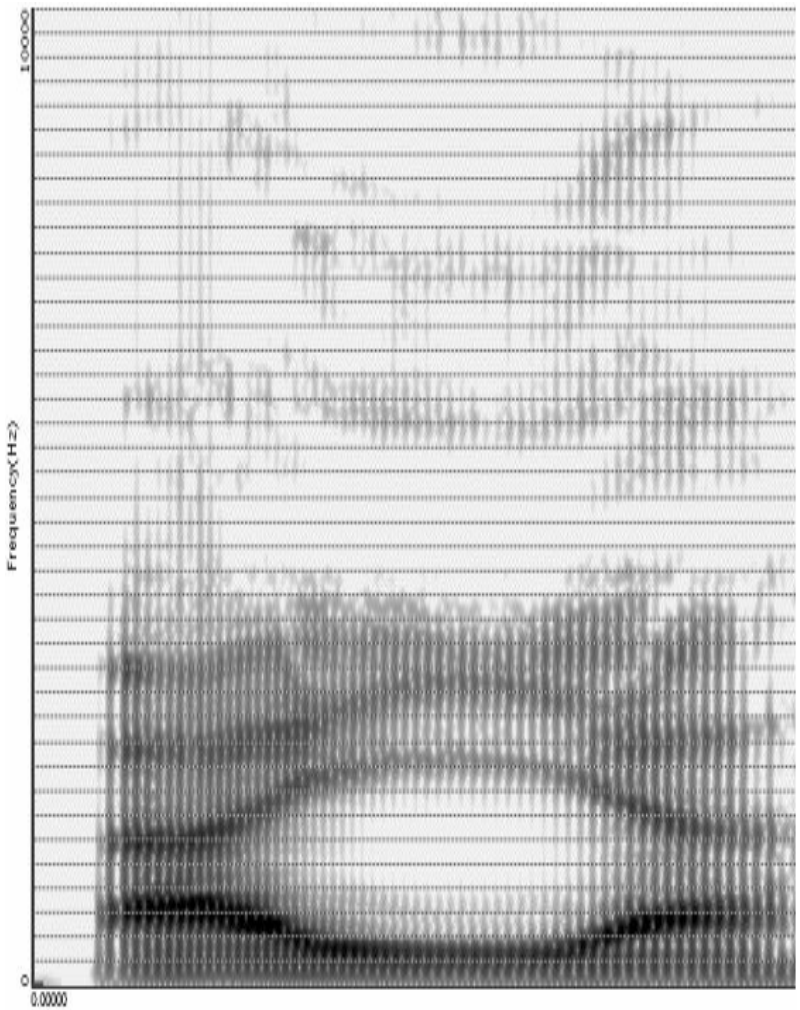


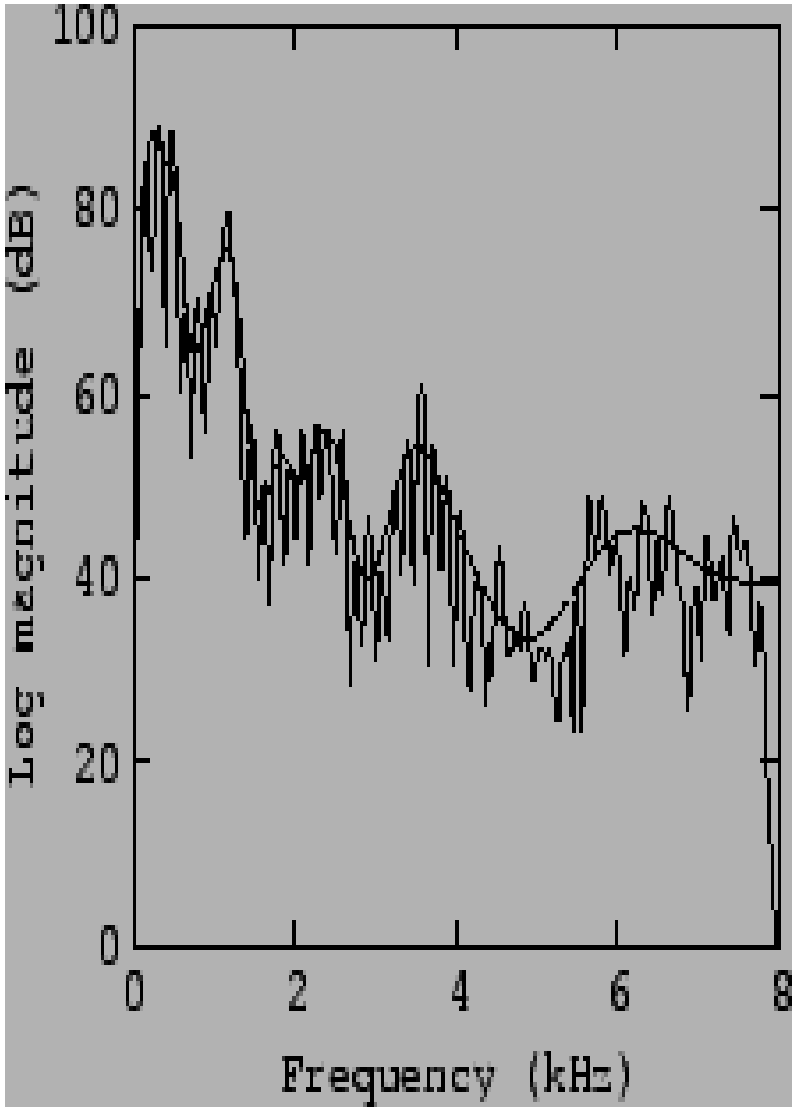

**Typiquement** :

Signal 16 000 échantillons par seconde
(1 échantillon = 16 bits)

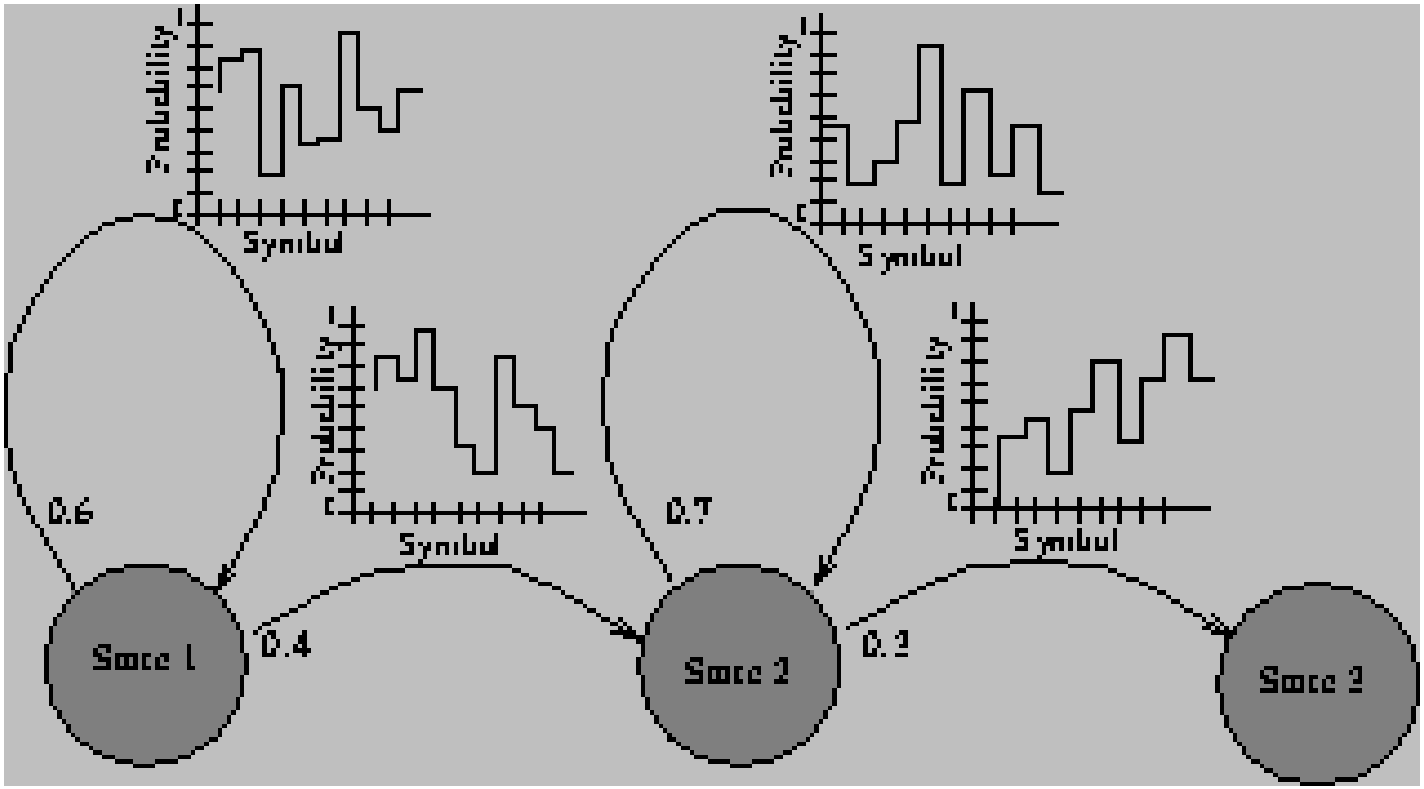
Spectro 39 coefficients par trame
(1 trame = 10 ms)
$\Longrightarrow$ 3 900 valeurs par seconde.

# Représentation du signal

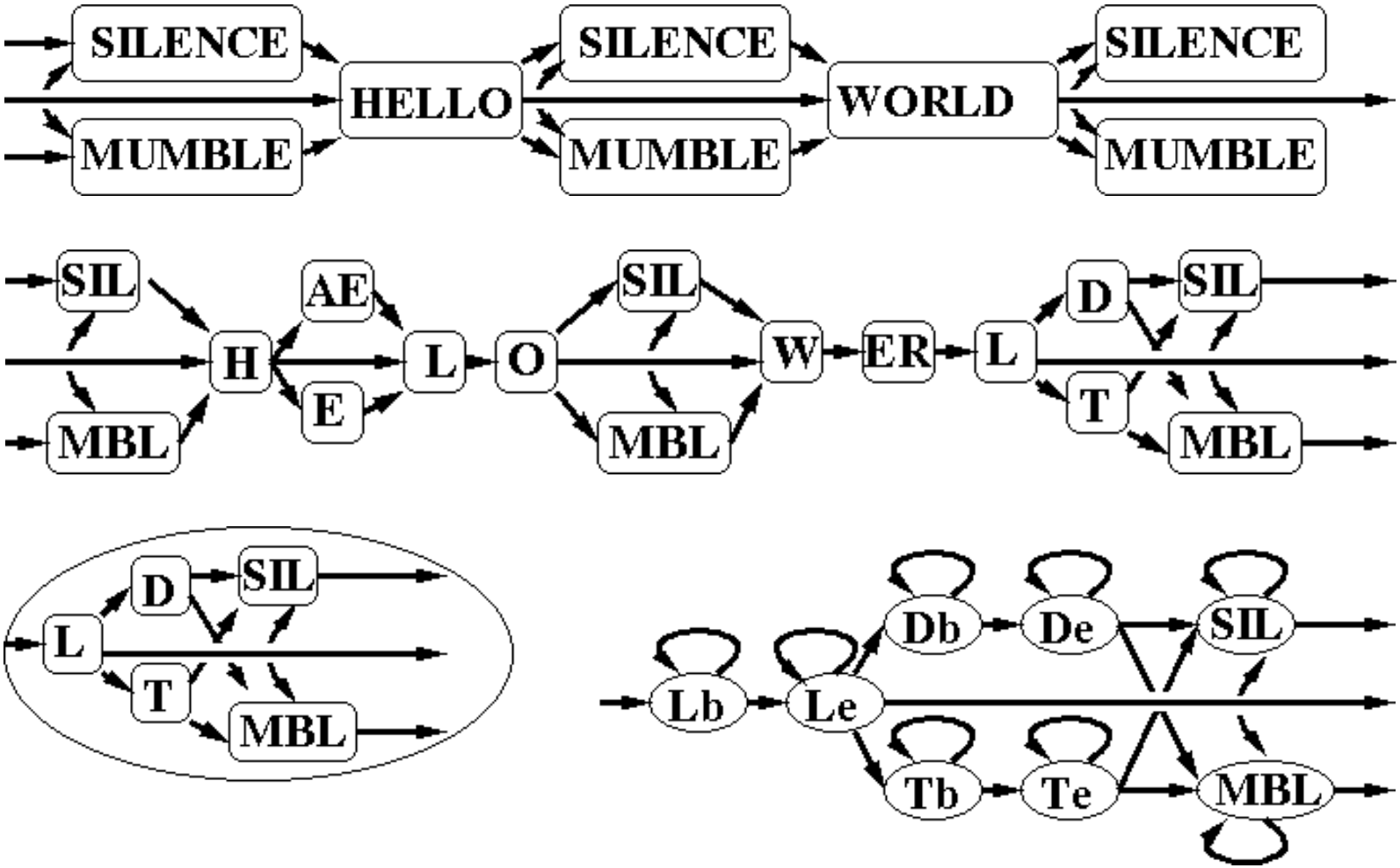


# Exemple de modèle acoustique



# Exemple de graphe de reconnaissance

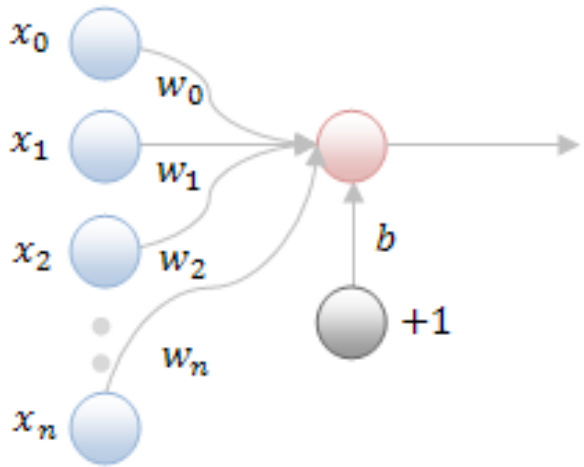


# Plan



rali

# Perceptron (RosenBlatt, 1957)




- $x_j$ input (valeur réelle)
- $w_j$ poids synaptique (valeur réelle)
- $b$ biais (peut être représenté par un poids supplémentaire et une entrée fixe)
- $h = \sum_j x_j \times w_j + b$ est le signal arrivant au neurone
- l'activation du neurone est déterminée par une fonction d'activation $\hat{y} \equiv f(h)$ (ex : $f = sign$)

# Perceptron (RosenBlatt, 1957)

- soit $(x_i, y_i)_{i \in [1,L]}$ un corpus d'entraînement où $y_i$ (ici à valeur dans $\{-1, +1\}$) est la réponse (supervision) et $x_i \in R^{n+1}$
- apprendre les $w_j$ peut se faire en ligne en ajustant itérativement les poids une fois chaque observation $x_i$ rencontrée :
  $\forall j \in [0, n], \quad w_j \leftarrow w_j + \eta(y_i - \hat{y}_i).x_i$
  où $\eta$ est le learning rate

  résout des problèmes linéairement séparables

# Voted-Perceptron *[Freund and Schapire, 1999]*

- Entraînement en ligne :

**Require:** $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i\in[1,L]}$ où $y_i \in \{+1, -1\}$ et $x_i \in \mathbb{R}^n$
**Ensure:** a pool of $K$ perceptrons $\{(\mathbf{v}_k, c_k)\}_{k\in[1,K]}$, $v_k \in \mathbb{R}^n$, $c_k \in \mathbb{N}$

$k, c_1 \leftarrow 0$
$\mathbf{v}_1 \leftarrow [0...0]^T$
**for all** epoch **do**
  **for all** $i \in [1, L]$ **do**
    $\hat{y} \leftarrow sign(\mathbf{v}_k.\mathbf{x}_i)$
    **if** $\hat{y} \neq y_i$ **then**
      $\mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}_k + y_i\mathbf{x}_i$
      $c_{k+1} \leftarrow 1$
      $k \leftarrow k + 1$
    **else**
      $c_k \leftarrow c_k + 1$

Garanties de convergence (même dans les cas non linéairement séparables)

# Voted-perceptron *[Freund and Schapire, 1999]*

- Test :

$$\hat{y} = sign\left(\sum_k c_k.sign(\mathbf{v}_k.\mathbf{x})\right)$$

- requiert la sauvegarde de $K$ perceptrons
- calcul en $O(K \times n)$. On peut également ne retenir qu'un sous-ensemble des perceptrons (à l'extrême un seul, par exemple celui de plus fort $c_k$).

rali

# Perceptron structuré *[Collins, 2002]*

$\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_a \leftarrow \mathbf{0}$
**repeat**
  **for all** example $(x, y) \in D$ **do**
    $\hat{y} = \text{argmax}_y \, \mathbf{w}_0^T \Phi(x, y)$
    **if** $\hat{y} \neq y$ **then**
      $\mathbf{w}_0 \leftarrow \mathbf{w}_0 + \Phi(x, y) - \Phi(x, \hat{y})$
      $\mathbf{w}_a \leftarrow \mathbf{w}_a + c\Phi(x, y) - c\Phi(x, \hat{y})$
      $c \leftarrow c + 1$
**until** converged
**return** $\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_a/c$

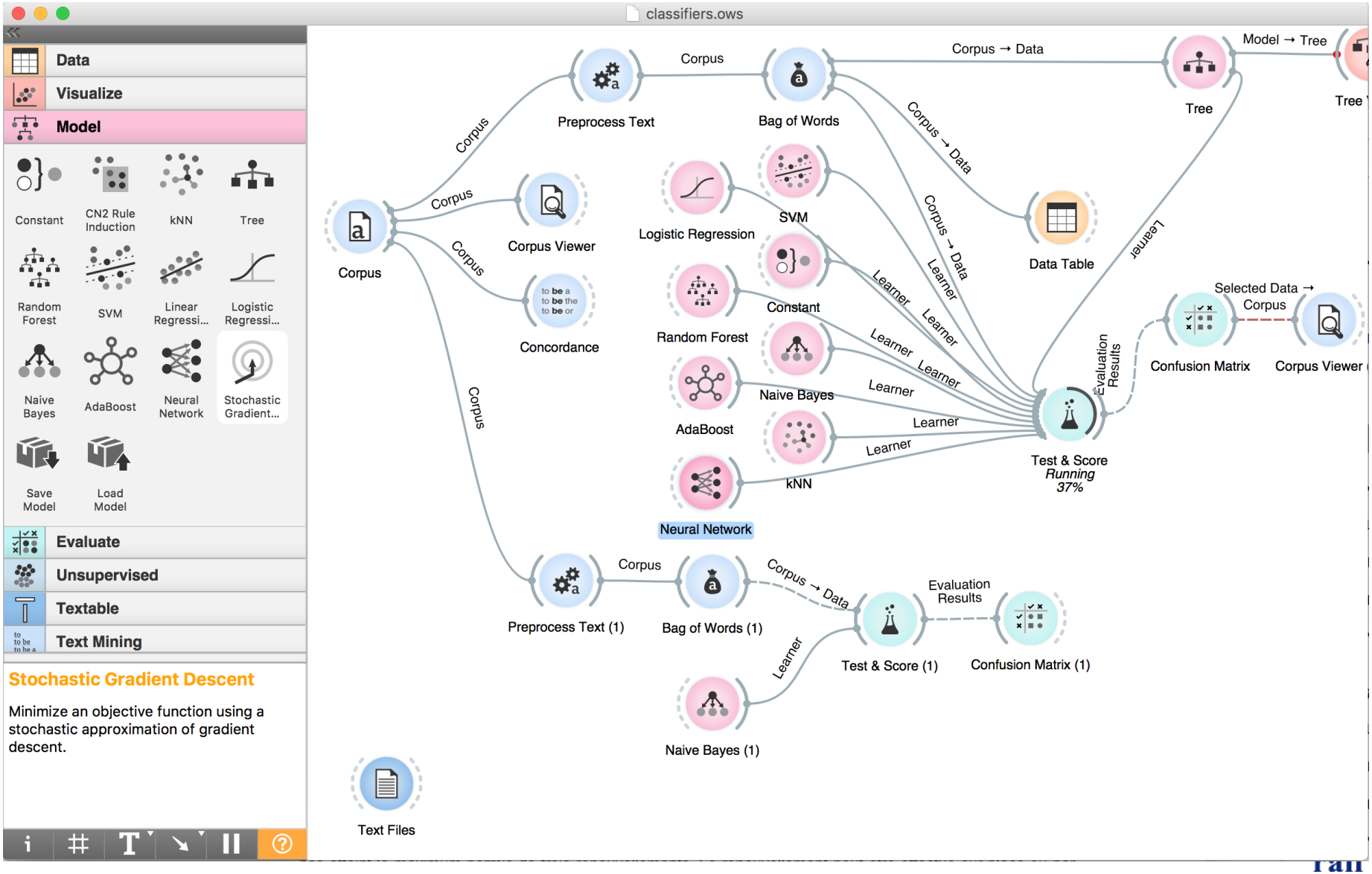
rali

# Plan

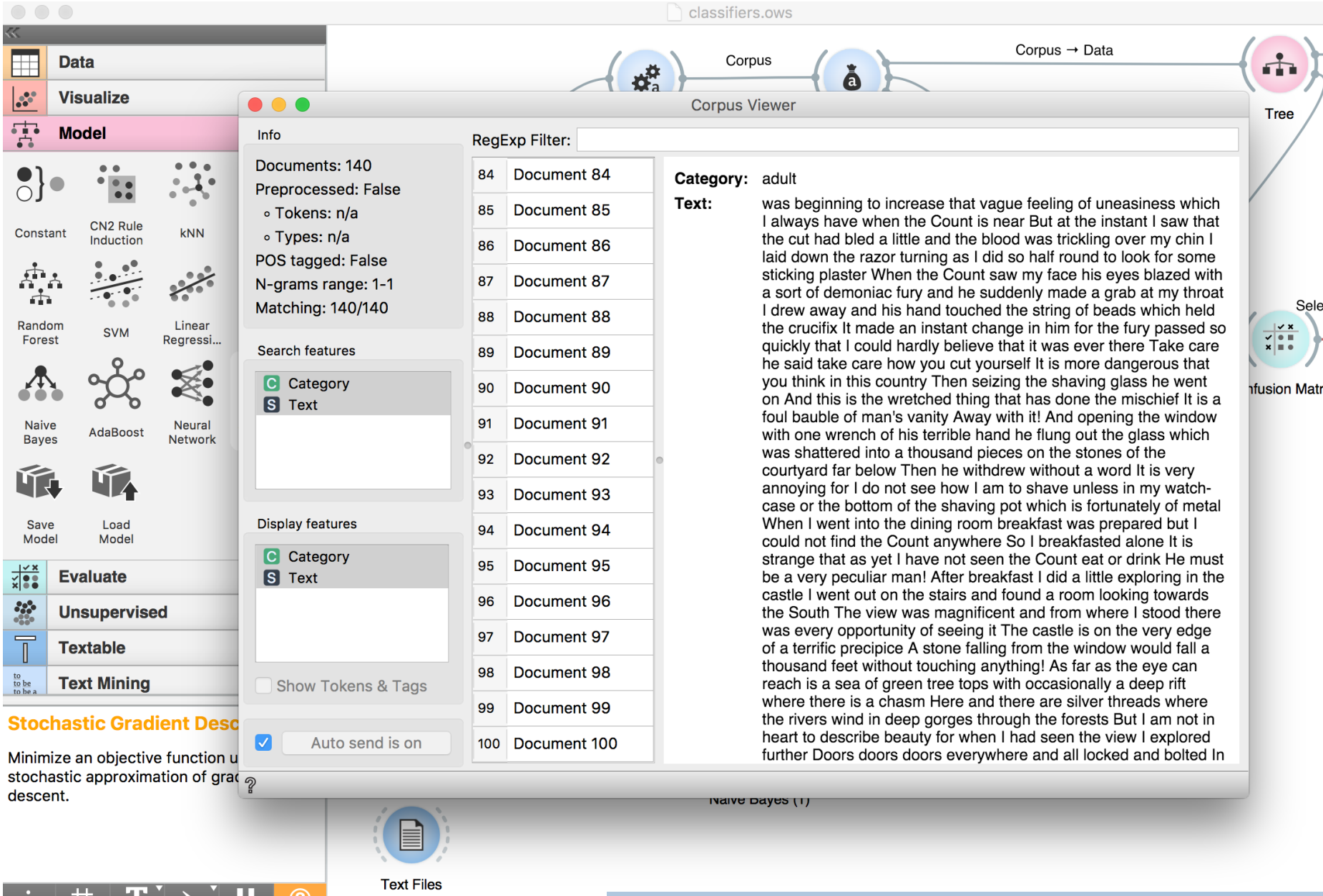


rali

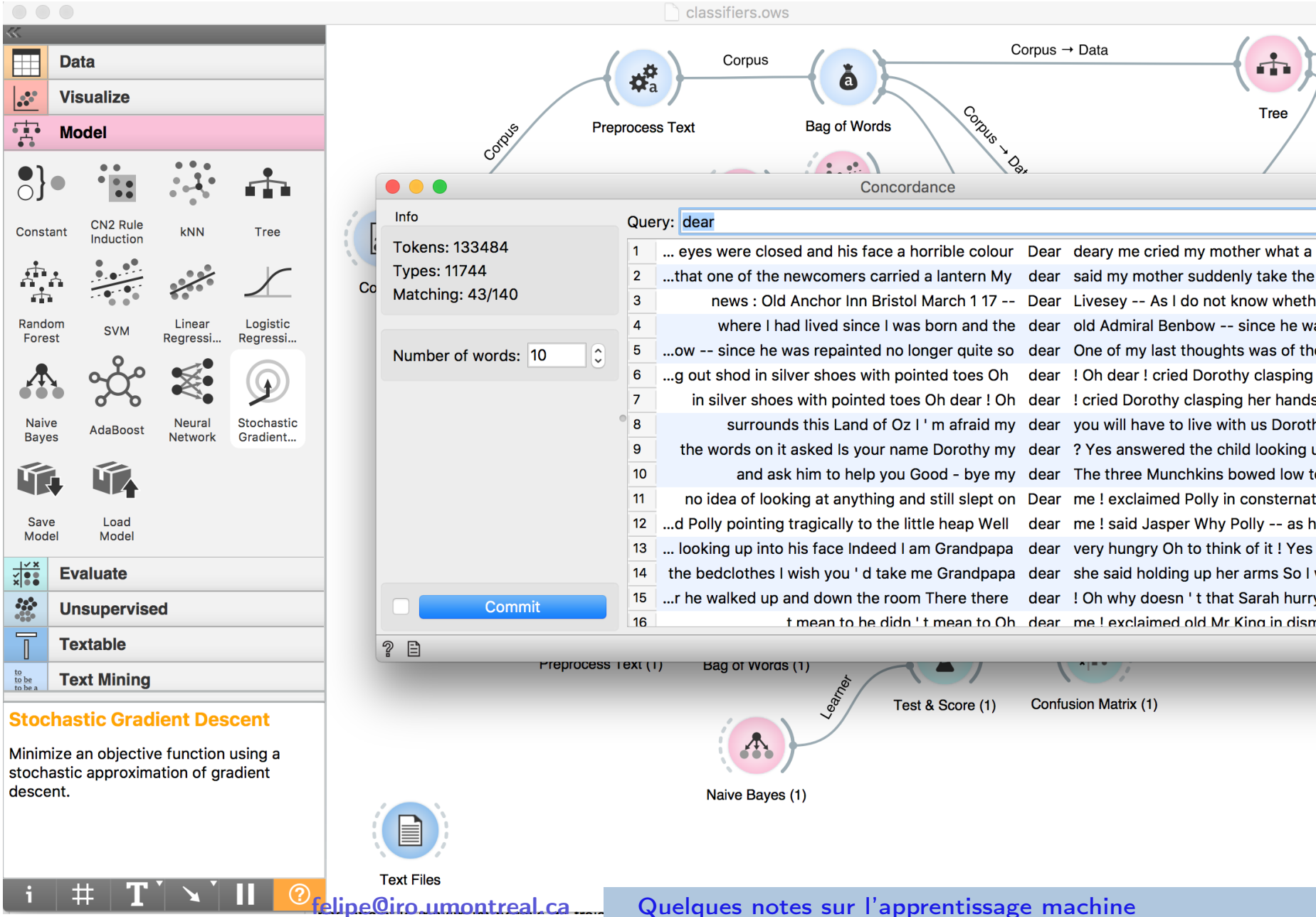
# Orange : une expérience



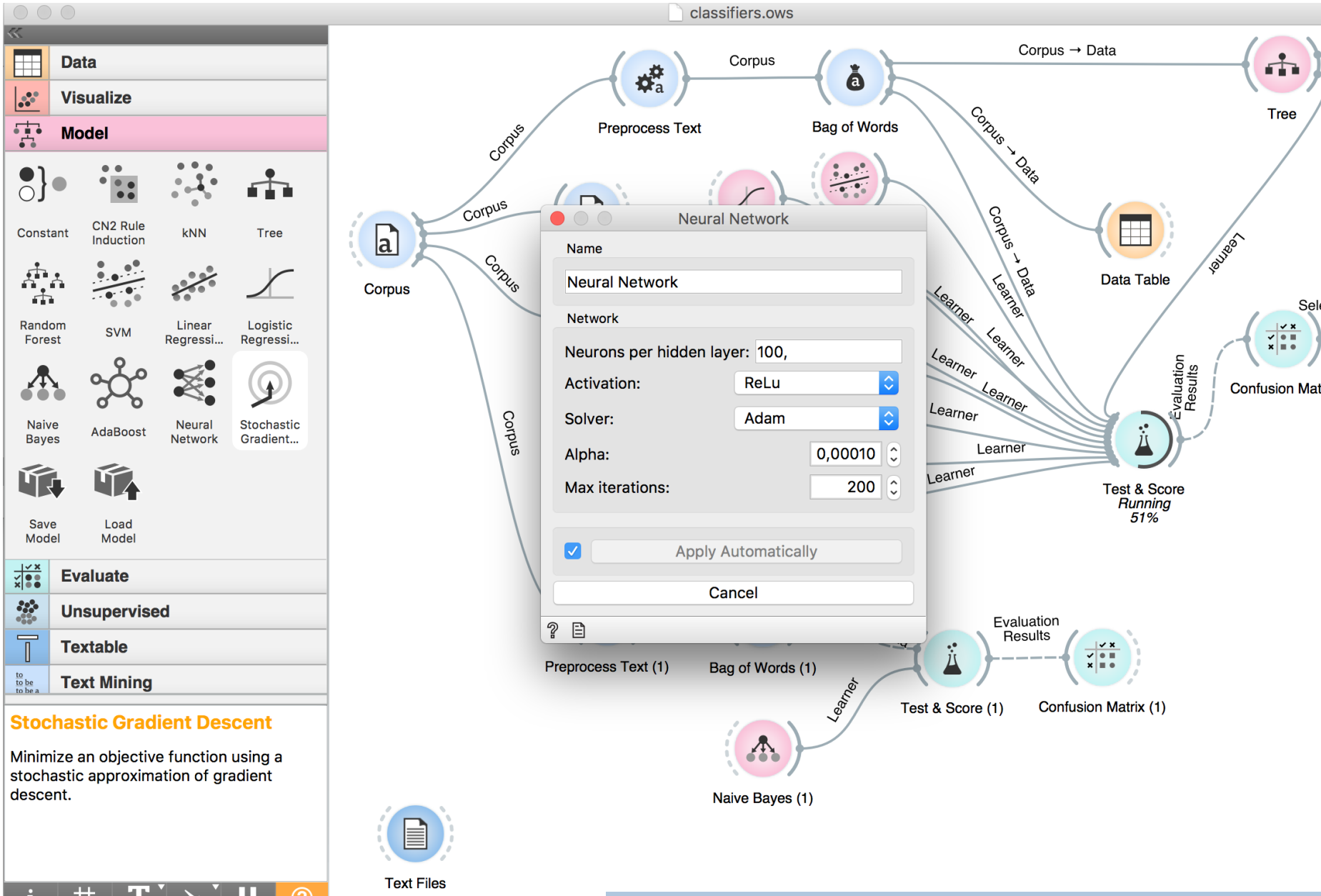
# Orange : visualisation



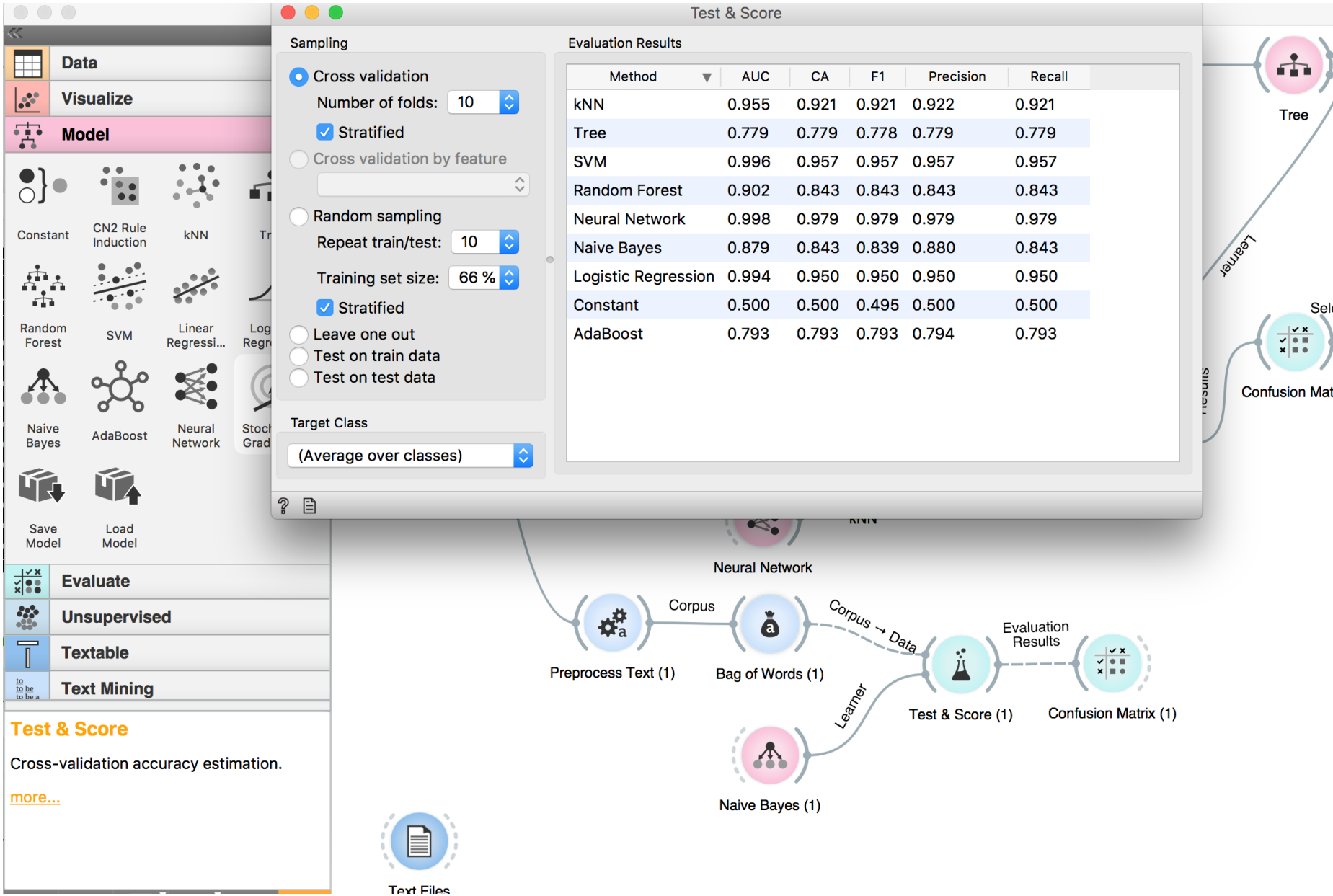
# Orange : concordancier



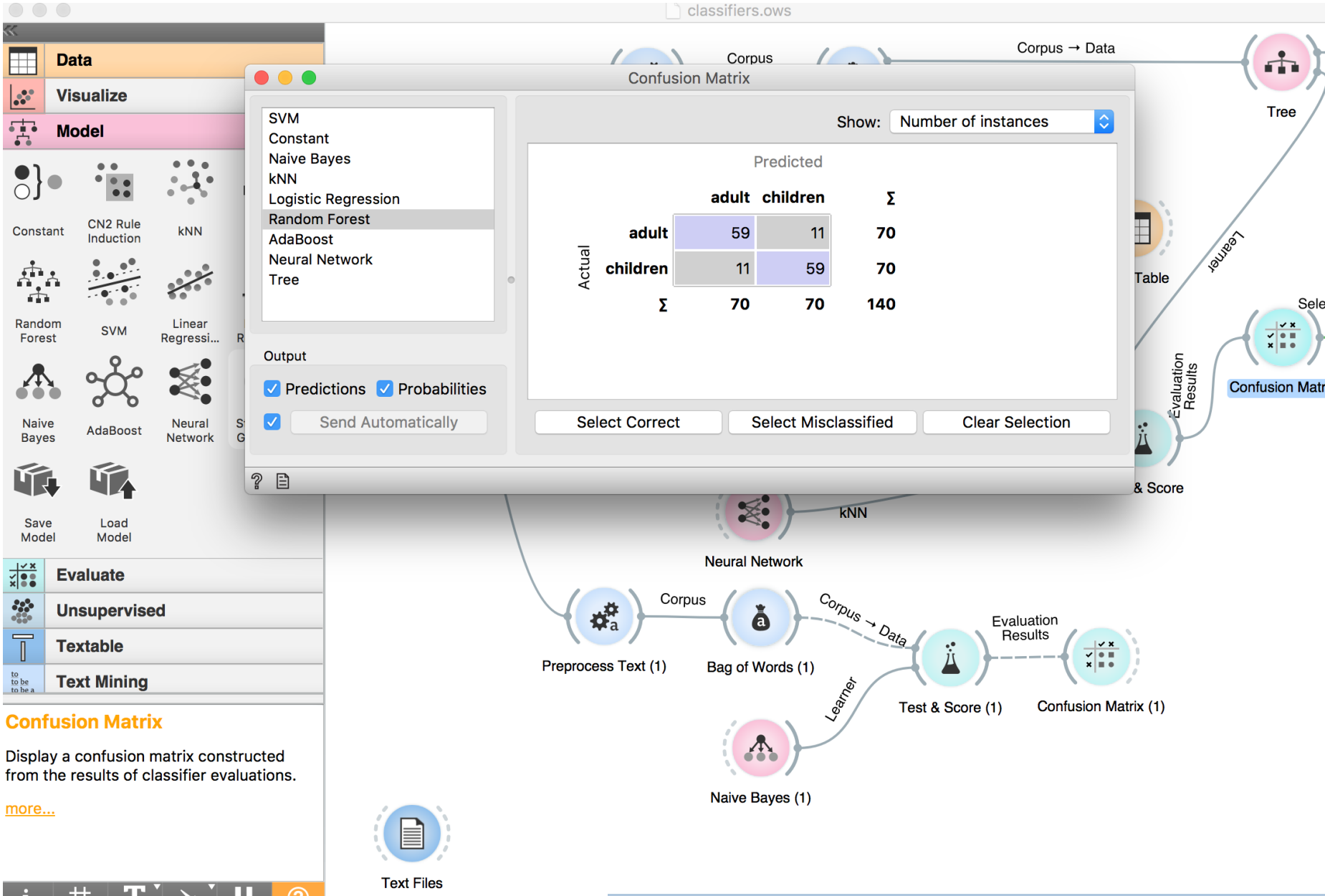
# Orange : neural network



# Orange : résultats



# Orange : matrice de confusion



**Baum, L. (1972).**
An inequality and associated maximization technique in statistical estimation of probabilistic functions of a markov process.
*Inequalities*, 3 :1–8.

**Berger, A. L., Pietra, V. J. D., and Pietra, S. A. D. (1996).**
A maximum entropy approach to natural language processing.
*Comput. Linguist.*, 22(1) :39–71.

**Collins, M. (2002).**
Discriminative training methods for hidden markov models : Theory and experiments with perceptron algorithms.
In *Proceedings of the ACL-02 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing - Volume 10*, EMNLP '02, pages 1–8.

**Freund, Y. and Schapire, R. E. (1999).**
Large margin classification using the perceptron algorithm.
*Mach. Learn.*, 37(3) :277–296.

**Huang, X., Ariki, Y., and Jack, M. (1990).**

rali

*Hidden Markov Models for Speech Recognition*.
Edinburgh University Press.
ISBN-0-7486-0162-7.

**Lafferty, J. (2001).**
Conditional random fields : Probabilistic models for segmenting and labeling sequence data.
In *Proc. 18th International Conf. on Machine Learning*, pages 282–289. Morgan Kaufmann.

**McCallum, A. and Nigam, K. (1998).**
A comparison of event models for naive Bayes text classification.
In *Learning for Text Categorization : Papers from the 1998 AAAI Workshop*, pages 41–48.

**Rabiner, L. R. (1989).**
*A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition*, chapter 6.
IEEE.

rali