

à remettre au plus tard le 3 novembre 2010

1 _____ (20 points)

Considérez le problème des plus courts chemins (p.c.c.) d'un sommet s vers tous les autres dans un graphe orienté ayant des arcs de longueur négative, mais aucun circuit négatif. L'algorithme de Dijkstra identifie-t-il correctement les p.c.c. dans un tel graphe? Supposez que les seuls arcs à longueur négative sont des arcs incidents vers l'extérieur à s . L'algorithme de Dijkstra identifie-t-il correctement les p.c.c. dans un tel graphe?

2 _____ (20 points)

Soit un graphe orienté $G = (V, A)$ dans lequel chaque arc (i, j) possède une longueur c_{ij} . Supposons qu'on a déjà calculé les longueurs des plus courts chemins (p.c.c.) entre chaque paire de sommets. Si on diminue la longueur d'un seul arc, proposez un algorithme qui prend un temps $O(n^2)$ pour recalculer les longueurs des p.c.c. Si on augmente la longueur d'un seul arc, pouvez-vous toujours recalculer les longueurs des p.c.c. en un temps $O(n^2)$?

3 _____ (20 points)

Soit un graphe orienté $G = (V, A)$ dans lequel chaque arc (i, j) possède une capacité $u_{ij} \geq 0$. La capacité u_C d'un chemin C est $u_C = \min\{u_{ij} \mid (i, j) \in C\}$. Le problème du *chemin de capacité maximum* consiste à trouver un chemin entre deux sommets s et t de capacité maximum parmi tous les chemins entre s et t . Proposez un algorithme pour résoudre ce problème et analysez-en la complexité.

4 _____ (20 points)

Le goulot d'étranglement associé à une (s, t) -coupe (X, \bar{X}) est $\max\{u_{ij} \mid (i, j) \in (X, \bar{X})\}$. Le *problème du goulot d'étranglement minimum* consiste à identifier, parmi toutes les (s, t) -coupes, celle dont le goulot d'étranglement est minimum. Montrez que la capacité d'un chemin de capacité maximum entre s et t est égal au goulot d'étranglement minimum.

5 _____ (20 points)

Supposons qu'on a identifié un flot maximum. Proposez un algorithme pour identifier une (s, t) -coupe minimum et analysez-en la complexité. Si on a identifié une coupe minimum, peut-on identifier rapidement un flot maximum et comment?