

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

EXAMEN FINAL

IFT 6542 FLOTS DANS LES RÉSEAUX

Professeur: BERNARD GENDRON

Date: mardi, 14 décembre 2004

Heure: 13:30 – 16:30

Salle: Z-215

DIRECTIVES:

AUCUNE DOCUMENTATION AUTORISÉE

1 _____ (20 points)

Arbres de poids minimum

a) Expliquez le fonctionnement de l'algorithme de Prim pour résoudre le problème de l'arbre de poids minimum (un pseudocode suffit). (5 points)

Indice: L'algorithme de Prim maintient un seul arbre tout au long des itérations.

b) Proposez deux implantations de cet algorithme et analysez la complexité en temps de ces algorithmes (précisez les structures de données utilisées). (10 points)

c) Laquelle des deux implantations en b) est préférable et pourquoi? (5 points)

2 _____ (25 points)

Plus courts chemins

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté auquel on associe à chaque arc (i, j) une longueur c_{ij} . Supposons que G ne possède pas de circuits de longueur négative.

a) Supposons qu'on veuille résoudre le problème des plus courts chemins d'une source s vers tous les autres sommets. Montrez par un exemple que l'algorithme de Dijkstra ne fonctionne pas dans le cas où certaines longueurs sont négatives. (5 points)

b) Soit $k \in V$ et $d(k)$ la longueur d'un chemin de s vers k (on pose $d(s) = 0$). Montrez que : $d(k)$ est la longueur d'un plus court chemin de s vers k si et seulement si $d(j) \leq d(i) + c_{ij}, \forall (i, j) \in A$. (10 points)

c) Supposons qu'on veuille résoudre le problème des plus courts chemins entre toutes les paires de sommets. Expliquez le fonctionnement d'un algorithme qui procède en résolvant $n = |V|$ problèmes de plus courts chemins d'un sommet vers tous les autres, dont $n - 1$ fois en appliquant l'algorithme de Dijkstra. (10 points)

Indice: Utilisez la propriété en b).

3 _____ (15 points)

Flot maximum

- a) Montrez que la valeur de tout flot est inférieure ou égale à la capacité de toute coupe. (5 points)
- b) Utilisez a) pour démontrer le théorème flot max-coupe min : La valeur d'un flot maximum est égale à la capacité d'une coupe minimum. (10 points)

4 _____ (25 points)

Flot à coût minimum

Soit x un flot et λ un vecteur de potentiels. Soit $G(x) = (V, A(x))$ le graphe résiduel et $k_{ij}^\lambda = k_{ij} - \lambda_i + \lambda_j$, $\forall (i, j) \in A(x)$, les coûts réduits dans le graphe résiduel.

- a) Montrez que : x est un flot à coût minimum si et seulement si il existe λ tel que $k_{ij}^\lambda \geq 0$, $\forall (i, j) \in A(x)$. (5 points)
- b) Expliquez le fonctionnement de l'algorithme des plus courts chemins successifs (un pseudocode suffit). (10 points)
- c) En quoi cet algorithme utilise-t-il la propriété en a)? Justifiez en montrant que la condition $k_{ij}^\lambda \geq 0$, $\forall (i, j) \in A(x)$, est maintenue tout au long de l'algorithme. (10 points)

5 _____ (15 points)

Multiflots

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté où chaque arc est muni d'une capacité $u_{ij} > 0$ et d'un coût par unité de flot $c_{ij} \geq 0$. Soit K un ensemble de produits, où chaque produit est représenté par un sommet d'offre (ou source) $s(k)$ et un sommet de demande (ou puits) $t(k)$.

- a) Formulez le problème de trouver des multiflots à coût minimum dans ce graphe (un modèle suffit). (5 points)
- b) Expliquez le principe de la relaxation lagrangienne (des contraintes de capacité) appliquée à votre modèle en a). (5 points)
- c) Comment résoudre le problème obtenu une fois relaxées les contraintes de capacité? (5 points)

Indice: Exploitez la structure particulière du problème.