

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

EXAMEN FINAL

IFT 6542 FLOTS DANS LES RÉSEAUX

Professeur: BERNARD GENDRON

Date: lundi, 5 décembre 2005

Heure: 14:30 – 17:30

Salle: Z-240

DIRECTIVES:

AUCUNE DOCUMENTATION AUTORISÉE

1 _____ **(25 points)**

Arbre de poids minimum

a) Expliquez le fonctionnement de la méthode vorace pour résoudre le problème de l'arbre de poids minimum (l'énoncé de la méthode suffit). *(5 points)*

b) Expliquez le fonctionnement de l'algorithme de Prim pour résoudre le problème de l'arbre de poids minimum (un pseudocode suffit). Expliquez pourquoi cet algorithme est un cas particulier de la méthode vorace. *(10 points)*

Indice: L'algorithme de Prim maintient un seul arbre tout au long des itérations.

c) Expliquez le fonctionnement de l'algorithme de Kruskal pour résoudre le problème de l'arbre de poids minimum (un pseudocode suffit). Expliquez pourquoi cet algorithme est un cas particulier de la méthode vorace. *(10 points)*

Indice: L'algorithme de Kruskal maintient une forêt tout au long des itérations.

2 _____ **(20 points)**

Plus courts chemins

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté auquel on associe à chaque arc (i, j) une longueur c_{ij} . Supposons que G ne possède pas de circuits.

a) Proposez un algorithme permettant de numéroté les sommets topologiquement (un pseudocode suffit). *(10 points)*

Indice: Les sommets sont numérotés topologiquement si $i < j, \forall (i, j) \in A$.

b) Utilisez l'algorithme en a) pour spécifier un algorithme permettant de calculer les plus courts chemins dans un graphe sans circuits (un pseudocode suffit). *(10 points)*

Indice: Votre algorithme doit prendre un temps $O(m)$, où m est le nombre d'arcs.

3 _____ **(15 points)**

Goulot détrangement

Soit un graphe orienté $G = (V, A)$ dans lequel chaque arc (i, j) possède une capacité $u_{ij} > 0$. Étant donné deux sommets s et t , le goulot d'étranglement associé à une (s, t) -coupe (X, \bar{X}) est $\max\{u_{ij} \mid (i, j) \in (X, \bar{X})\}$. Le *problème du goulot d'étranglement minimum* consiste à identifier, parmi toutes les (s, t) -coupes, celle dont le goulot d'étranglement est minimum.

- a) Montrez que la capacité de tout chemin entre s et t est inférieure ou égale au goulot d'étranglement de toute (s, t) -coupe, où la capacité u_C d'un chemin C est $u_C = \min\{u_{ij} \mid (i, j) \in C\}$. (5 points)
- b) Utilisez a) pour démontrer le théorème suivant : Le goulot d'étranglement minimum est égal à la capacité d'un chemin de capacité maximum parmi tous les chemins entre s et t . (10 points)

4 _____ **(20 points)**

Flot maximum

- a) Définissez le graphe résiduel $G(x)$ relativement à un flot x . (5 points)
- b) Montrez que x est un flot maximum si et seulement si $G(x)$ ne contient aucun chemin d'augmentation. (5 points)
- c) Expliquez le fonctionnement de l'algorithme de Ford et Fulkerson pour résoudre le problème du flot maximum (un pseudocode suffit). (5 points)
- d) Analysez la complexité en temps en pire cas de l'algorithme de Ford et Fulkerson. (5 points)

5 _____ **(20 points)**

Flot à coût minimum

- a) Pour le problème de flot à coût minimum, expliquez comment obtenir un flot réalisable initial en résolvant un problème de flot maximum. (5 points)
- b) Expliquez le fonctionnement d'un algorithme par élimination de circuits pour résoudre le problème du flot à coût minimum (un pseudocode suffit). (5 points)
- c) Analysez la complexité en temps en pire cas de l'algorithme par élimination de circuits. (5 points)
- d) Si toutes les données (capacités, offres et demandes) sont entières, démontrez qu'il existe une solution entière au problème du flot à coût minimum. (5 points)