

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

EXAMEN FINAL

IFT 6542 FLOTS DANS LES RÉSEAUX

**Professeur:** BERNARD GENDRON

**Date:** jeudi, 4 décembre 2008

**Heure:** 13:00 – 16:00

**Salle:** 5441

DIRECTIVES:

AUCUNE DOCUMENTATION AUTORISÉE

**1** \_\_\_\_\_ **(20 points)**

*Arbre de poids minimum et plus courtes chaînes*

Soit un graphe non orienté  $G = (V, E)$  ayant des poids  $c_e$  sur chaque arête  $e \in E$ . Supposons que certains de ces poids sont négatifs.

a) Considérez le problème de l'arbre de poids minimum. Supposons qu'on ajoute la valeur  $-c_{\min} > 0$  au poids de chaque arête, où  $c_{\min} = \min\{c_e | e \in E\}$ . L'algorithme de Prim exécuté sur ce graphe avec poids modifiés identifie-t-il correctement un arbre de poids minimum relativement aux poids d'origine? Si oui, démontrez-le; sinon, donnez un contre-exemple. (10 points)

b) Considérez le problème des plus courtes chaînes entre un sommet  $s$  et tous les autres (on utilise les poids comme longueurs des arêtes). Supposons à nouveau qu'on ajoute la valeur  $-c_{\min} > 0$  au poids de chaque arête. L'algorithme de Dijkstra exécuté sur ce graphe avec poids modifiés identifie-t-il correctement les plus courtes chaînes relativement aux poids d'origine? Si oui, démontrez-le; sinon, donnez un contre-exemple. (10 points)

**2** \_\_\_\_\_ **(15 points)**

*Goulot détrangement et arbre partiel*

Soit un graphe non orienté  $G = (V, E)$  dans lequel chaque arête  $e$  possède une capacité  $u_e > 0$ . Le goulot d'étranglement associé à une coupe  $\{X, \bar{X}\}$  est  $\max\{u_e | e \in \{X, \bar{X}\}\}$ . Le problème du goulot d'étranglement minimum consiste à identifier, parmi toutes les coupes, celle dont le goulot d'étranglement est minimum.

a) Montrez que la capacité de tout arbre partiel de  $G$  est inférieure ou égale au goulot d'étranglement de toute coupe, où la capacité  $u_T$  d'un arbre partiel  $H = (V, T)$  est  $u_T = \min\{u_e | e \in T\}$ . (5 points)

b) Utilisez a) pour démontrer le théorème suivant : Le goulot d'étranglement minimum est égal à la capacité d'un arbre partiel de capacité maximum parmi tous les arbres partiels de  $G$ . (10 points)

**3** \_\_\_\_\_ **(20 points)**

*Flot maximum*

- a) Définissez le graphe résiduel  $G(x)$  relativement à un flot  $x$ . (5 points)
- b) Montrez que  $x$  est un flot maximum si et seulement si  $G(x)$  ne contient aucun chemin d'augmentation. (5 points)
- c) Expliquez le fonctionnement de l'algorithme de Ford et Fulkerson pour résoudre le problème du flot maximum (un pseudocode suffit). (5 points)
- d) Analysez la complexité en temps en pire cas de l'algorithme de Ford et Fulkerson. (5 points)

**4** \_\_\_\_\_ **(25 points)**

*Plus courts chemins et flot à coût minimum*

Soit  $G = (V, A)$  un graphe orienté auquel on associe à chaque arc  $(i, j)$  une longueur  $c_{ij}$ . Considérez le problème des plus courts chemins d'un sommet  $s$  vers tous les autres.

- a) Supposons que les longueurs sont non négatives. Montrez alors que le problème est un cas particulier du problème de flot à coût minimum. Pour ce faire, formulez le problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire utilisant les variables  $x_{ij}$  qui représentent le flot sur chaque arc  $(i, j)$ . (10 points)
- b) Dans le modèle en a), quelle est la signification des variables  $x_{ij}$  relativement au problème de plus courts chemins? En particulier, montrez que  $x_{ij} > 0$  si et seulement si  $(i, j)$  appartient à l'arborescence des plus courts chemins. (10 points)
- c) Supposons maintenant que certains arcs ont des longueurs négatives et qu'il existe au moins un circuit négatif. Montrez alors par un exemple que le modèle en a) ne permet pas de résoudre le problème de plus courts chemins, dans le sens suivant: dans une solution optimale du modèle, il existe au moins un arc  $(i, j)$  tel que  $x_{ij} > 0$ , mais  $(i, j)$  n'appartient pas à l'arborescence des plus courts chemins. (5 points)

*Affectation*

- a) Décrivez le problème d'affectation dans un graphe biparti. (5 points)
- b) Montrez que le problème d'affectation est un cas particulier du problème de flot à coût minimum. (5 points)
- c) Proposez une adaptation de l'algorithme des plus courts chemins successifs pour résoudre le problème d'affectation. (5 points)

**Indice:** L'algorithme des plus courts chemins successifs pour le problème de flot à coût minimum maintient la condition d'optimalité (tous les coûts réduits sont non négatifs dans le graphe résiduel) et ajuste les pseudoflots (le long d'un plus court chemin dans le graphe résiduel reliant un sommet d'excès à un sommet de déficit) jusqu'à ce que l'excès soit nul pour tous les sommets.

- d) Analysez la complexité en temps en pire cas de l'algorithme en c). (5 points)