

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
EXAMEN FINAL
IFT 6542 FLOTS DANS LES RÉSEAUX

Professeur: BERNARD GENDRON

Date: mercredi, 9 décembre 2009

Heure: 9:30 – 12:30

Salle: 5441

DIRECTIVES:

AUCUNE DOCUMENTATION AUTORISÉE

1 _____ (20 points)

Parcours de graphe et connexité forte

Soit un graphe orienté $G = (V, A)$ et soit s un sommet de ce graphe.

- a) Expliquez le fonctionnement d'un algorithme permettant d'identifier tous les sommets de G qui sont reliés à s par au moins un chemin d'extrémité initiale s (un pseudocode suffit). (5 points)
- b) Expliquez le fonctionnement d'un algorithme permettant d'identifier tous les sommets de G qui sont reliés à s par au moins un chemin d'extrémité terminale s (un pseudocode suffit). (5 points)
- c) Expliquez le fonctionnement d'un algorithme permettant de déterminer si G est fortement connexe (un pseudocode suffit). (5 points)

Rappel: $G = (V, A)$ est fortement connexe si et seulement si pour tout couple de sommets distincts i et j , il existe un chemin de i vers j et un chemin de j vers i .

- d) Analysez la complexité de votre algorithme en c). (5 points)

2 _____ (15 points)

Arbres de poids minimum

- a) Expliquez le fonctionnement de la méthode vorace pour résoudre le problème de l'arbre de poids minimum (l'énoncé de la méthode suffit). (5 points)
- b) Expliquez le fonctionnement de l'algorithme de Kruskal pour résoudre le problème de l'arbre de poids minimum (un pseudocode suffit). (5 points)

Indice: L'algorithme de Kruskal maintient une forêt d'arbres tout au long des itérations.

- c) Expliquez pourquoi cet algorithme est un cas particulier de la méthode vorace. (5 points)

3 _____ (20 points)

Plus courts chemins

Considérez le problème des plus courts chemins d'un sommet s vers tous les autres dans un graphe orienté $G = (V, A)$.

- a) Les plus courts chemins sont-ils nécessairement élémentaires? Si oui, démontrez-le; sinon, donnez un contre-exemple. (5 points)

Indice: Un chemin est élémentaire si tous ses sommets sont distincts.

b) L'affirmation suivante est-elle correcte: "C'est seulement dans le cas où il y a des circuits négatifs que l'algorithme de Dijkstra ne fonctionne pas"? Si oui, démontrez-la; sinon, donnez un contre-exemple.

(5 points)

c) Supposons qu'on ajoute la valeur $-c_{\min} > 0$ à la longueur de de chaque arc, où $c_{\min} = \min\{c_a | a \in A\}$. L'algorithme de Dijkstra exécuté sur ce graphe avec longueurs modifiées identifie-t-il correctement les plus courtes chemins relativement aux longueurs d'origine? Si oui, démontrez-le; sinon, donnez un contre-exemple. (5 points)

d) Supposons que tous les arcs ont comme longueur une même valeur positive, disons C . Est-ce que l'algorithme de Dijkstra est le plus efficace pour résoudre cette variante du problème? Justifiez.

(5 points)

4 _____ (25 points)

Flot maximum

Soit un graphe orienté $G = (V, A)$ ayant des capacités $u_{ij} > 0$ sur chaque arc $(i, j) \in A$ et dans lequel on cherche un flot maximum entre une source s et un puits t . À chaque itération de l'algorithme de Ford et Fulkerson, on procède à une augmentation de flot le long d'un chemin de s vers t dans le graphe résiduel $G(x)$, sauf si un tel chemin n'a pu être identifié, auquel cas l'algorithme s'arrête.

a) Spécifiez par un pseudocode une méthode permettant d'identifier un chemin de s vers t dans $G(x)$.

Indice: Chaque itération de cette méthode consiste à choisir un sommet non marqué et à le balayer (marquer ses successeurs non marqués). (5 points)

b) Soit d un vecteur de *distances* de dimension $n = |V|$ et défini ainsi: $d(t) = 0$ et $d(i)$ est le plus petit nombre d'arcs dans tout chemin de $i \neq t$ vers t dans $G(x)$ (s'il n'y a pas de chemin de $i \neq t$ vers t dans $G(x)$, on pose $d(i) = n$). Expliquez quel algorithme utiliser pour calculer le vecteur de distances d . Quelle est la complexité de cet algorithme? (5 points)

En supposant que les distances d sont initialisées avec $G(x) = G$, considérez la variante de l'algorithme de Ford et Fulkerson consistant à mettre à jour $G(x)$ et d après chaque augmentation de flot et, lors de l'identification d'un chemin de s vers t dans $G(x)$, à choisir comme prochain sommet non marqué à balayer celui ayant la plus petite distance.

- c) Démontrez qu'entre deux augmentations, soit $d(i)$ conserve sa valeur, soit $d(i)$ augmente, pour tout sommet i . (5 points)
- d) Démontrez que le nombre total d'augmentations est $O(nm)$, où $m = |A|$. (5 points)
- e) Déduisez de b), c) et d) la complexité de cette variante de l'algorithme de Ford et Fulkerson. (5 points)

5 _____ **(20 points)**

Flot à coût minimum

Considérez le problème de flot à coût minimum où toutes les données (capacités, offres et demandes) sont entières.

- a) Expliquez comment obtenir un flot réalisable initial en résolvant un problème de flot maximum. (5 points)
- b) Expliquez le fonctionnement de l'algorithme par élimination de circuits (un pseudocode suffit). (5 points)
- c) En vous basant sur l'algorithme par élimination de circuits, démontrez qu'il existe une solution entière au problème. (5 points)
- d) Analysez la complexité en temps en pire cas de l'algorithme par élimination de circuits. (5 points)