

IFT 6551
Programmation en nombres entiers
Professeur: Bernard Gendron

Objectifs et sujets traités

- Présentation de problèmes d'*optimisation* pouvant être formulés à l'aide de variables entières.
- Revue des *méthodes* de la programmation en nombres entiers.

Optimisation

Dans ce cours, nous nous intéressons aux modèles d'optimisation suivants:

$$\min\{f(x)|x \in P \subseteq \mathbb{R}^n, x_j \text{ entier}, j \in J_I\}$$

où $J_I \subseteq J = \{1, 2, \dots, n\}$, $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est la fonction objectif, $\{x \in \mathbb{R}^n | x_j \text{ entier}, j \in J_I\}$ est l'ensemble représentant les *contraintes d'intégralité* et P est un ensemble représentant les autres contraintes. En particulier, lorsque $J_I \neq \emptyset$ ($J_I = \emptyset$), nous avons affaire à un modèle d'*optimisation discrète* (d'optimisation continue).

De nombreux modèles d'optimisation discrète peuvent également être formulés à l'aide de modèles d'*optimisation combinatoire*:

$$\min\{g(K)|K \in \Gamma\}$$

où $K \subseteq I = \{1, 2, \dots, p\}$, $g(K)$ est le coût associé à l'ensemble K et Γ est une collection de sous-ensembles de I ($|\Gamma|$ est typiquement un très grand nombre).

La *programmation en nombres entiers* s'intéresse aux modèles d'optimisation discrète dans lesquels les contraintes autres que celles d'intégralité sont représentées par des *polyèdres* rationnels de la forme suivante:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq 0\}$$

où A est une matrice rationnelle $m \times n$ et b est un vecteur rationnel de dimension m . Si, de plus, la fonction objectif est linéaire, i.e. $f(x) = cx$, où c est un vecteur rationnel de

dimension n , alors nous entrons dans le domaine de la programmation *linéaire* en nombres entiers. Egalement, si $J_I \subset J$, on parle alors d'un modèle de programmation *mixte* en nombres entiers (“mixed integer programming”: MIP).

Méthodes

Supposons qu'on veuille résoudre un modèle de programmation linéaire en nombres entiers. Comment procéder?

Première idée: **Enumération des solutions**

Une énumération complète serait trop coûteuse, mais l'idée est intéressante si on peut se restreindre à une énumération *partielle* qui se veut “intelligente” et qui n'élimine pas de solution optimale, en garantissant l'optimalité (branch-and-bound: section I.4) ou non (heuristiques: section II.4). Ces algorithmes d'énumération sont fort bien adaptés à une résolution en environnements parallèles, où ils gagnent en efficacité, permettant de résoudre des exemplaires de très grande taille.

Deuxième idée: **Utilisation de la programmation linéaire**

Si on résout le programme linéaire obtenu en enlevant les contraintes d'intégralité, on n'obtient une solution optimale pour notre problème que si on a pu identifier un point extrême optimal à valeurs entières. Ce n'est généralement pas le cas, sauf si le polyèdre est *entier*, i.e. si tous ses points extrêmes sont entiers (théorie polyédrale: section I.5). Si, après résolution du programme linéaire, on a obtenu une solution optimale fractionnaire, on peut alors ajouter des inégalités linéaires qui vont éliminer cette solution, sans toutefois éliminer aucun point entier. On pourrait alors résoudre le nouveau programme linéaire ainsi obtenu, et recommencer ce processus jusqu'à l'obtention d'une solution entière (méthodes de coupes: section II.1).

Une autre possibilité de résolution basée sur la programmation linéaire consisterait à décrire l'*enveloppe convexe* des points entiers par des inégalités linéaires. Par la suite, nous pourrions résoudre directement le problème, car une solution optimale entière est atteinte en un point extrême de l'enveloppe convexe des points entiers (théorie polyédrale: section I.5). Cependant, trouver une description algébrique de l'enveloppe convexe des points entiers est

un problème aussi “difficile” (sinon plus) que de résoudre le problème d’optimisation lui-même. De plus, le nombre d’inégalités représentant l’enveloppe convexe des points entiers est généralement “très grand”. Cependant, l’idée a de l’intérêt s’il est possible de décrire partiellement l’enveloppe convexe des points entiers et d’utiliser cette description dans le cadre d’une méthode qui ajoute au fur et à mesure les inégalités ainsi obtenues, et seulement lorsqu’elles sont violées par la solution optimale courante des programmes linéaires associés (méthodes de coupes: section II.1).

Cette discussion illustre l’observation suivante: il y a de nombreuses descriptions algébriques possibles de l’ensemble des contraintes. Laquelle choisir (modélisation: section I.3)? En principe, on choisirait une description qui permet de “cerner” le plus près possible l’enveloppe convexe des points entiers. Mais encore faut-il être en mesure de résoudre le modèle associé à une telle description, qui comporte généralement un grand nombre de contraintes et de variables. De tels modèles peuvent être traités par des méthodes de décomposition (sections II.2 et II.3), qui s’appuient sur la résolution de modèles plus simples (sections I.1, I.2 et II.5).