

# IFT3545/MAT 6490

10.02.2024

version 7.5

Ici vous trouverez une collection de problèmes dont la plupart ont un nombre de points attaché. Les problèmes sans points sont plus difficiles et des points seront accordés pour des solutions partielles. *Pour réussir le cours au premier cycle, il vous faut au moins 100 points et il faut faire au moins un problème dans chaque catégorie de points jusque 25 points. Des solutions partielles méritent des points partiels. Certains problèmes peuvent être obligatoires et dans ce cas seront signalés comme tels, avec une date de remise ferme.* Si vous comptez vous faire créditer le cours comme MAT6490, il vous faut 150 points. Voir Evaluation pour plus de détails.

Il faut faire des problèmes au fur et à mesure et en rendre un peu chaque semaine. Rendre tout le paquet de solutions la dernière semaine du cours serait plutôt mal vu - et suicidaire car vous avez besoin du “feedback”. Vous pouvez essayer les problèmes à plus que 10 points plusieurs fois.

**Une solution sans l'énoncé du problème vaut au maximum la moitié des points. Les solutions copiées - et découvertes - mènent automatiquement à un F pour le cours. Pour l'éviter, citez vos sources. Afin de donner le bénéfice du doute, je me réserve donc le droit de demander des explications, peut-être en classe. Tolérance zéro au plagiat.**

**Justifiez ce que vous dites.** Si, par exemple, on vous demande un algorithme polynomial pour résoudre un problème  $P$ , il faut prouver que l'algorithme fait ce qu'il est censé faire et qu'il est, en fait, polynomial. Pour les graphes, “polynomial” veut dire en le nombre de sommets (et d'arêtes, mais cela revient au même pour un graphe simple). Une réponse, même correcte, sans justification ou, mieux, preuve, ne vaut rien. N'oubliez pas que quand on dit *il est clair que* ou *évidemment*, souvent on se trompe... mieux vaut trop de détails que pas assez.

*Conventions.* Sauf indication contraire, un graphe  $G$  a comme ensemble de sommets  $V$  (ou  $V(G)$  si plus de clarté est nécessaire), et comme ensemble d'arêtes  $E$  (ou  $E(G)$ ). L'arête entre les sommets  $u$  et  $v$  est notée  $uv$  ou, parfois pour plus de clarté,  $[u, v]$ . Une famille de graphes  $\{G_i : i \in I\}$  ( $I$  est un ensemble d'indices, souvent  $I = [k] = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$  ou  $I = \mathbb{N}$ ) aura  $G_i = (V_i, E_i)$ . Comme toujours,  $|V| = n$  et  $|E| = m$ . Sauf indication contraire nos graphes sont simple (pas de boucles, pas d'arêtes multiples), non orientés et finis. On distinguera les graphes orientés en les notant  $D = (V, A)$ , avec les mêmes conventions pour  $D_i$ ;  $A$  est l'ensemble d'arcs.

Rappelons que  $P_k$  et  $C_k$  sont des chaînes (chemins) et des cycles (circuits) simples sur  $k$  sommets et de longueur  $k-1$  et  $k$ , respectivement. Les cycles et les circuits sont élémentaires sauf indication contraire.

Une autre convention : on écrit  $\lg n$  pour  $\log_2 n$ .

Quelques définitions se trouvent ici.

**Si le problème n'est qu'un simple énoncé, il est à prouver ou, parfois, infirmer (i.e. il faut trouver un contre-exemple).** A vous de découvrir la bonne réponse. Il se peut également que l'énoncé soit vrai avec une supposition supplémentaire (e.g. graphe connexe, ou au moins quatre sommets) mais faux en général. Dans ce cas il faut donner un contre-exemple au cas général et une preuve pour le cas modifié. Parfois il faut regarder le cas de graphe connexe et le cas graphe non connexe.

**Les problèmes apparaissent dans un ordre presque aléatoire. Il se peut donc que pour résoudre un problème à 5 points il faut en avoir résolu un à 10 (ou 15 ou 25). Par contre, si vous croyez que l'énoncé d'un problème  $X.Y$  est vrai et qu'il vous permet de résoudre un autre problème, vous pouvez dire *En supposons  $X.Y$ , ...*. Mais il vaut toujours mieux prouver  $X.Y$  d'abord, si on peut.**

Bien sûr, si un problème est fait en classe, il ne peut pas contribuer à la somme de vos points. Les problèmes obligatoires ont des dates limite et apparaissent sur la page web, s'il y a lieu.

## 1 2 points

**Problème 1.1** *La relation  $G \rightarrow H$  est transitive.*

**Problème 1.2** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe et soit  $L(G)$  son graphe représentatif des arêtes. Donnez un exemple (avec explications!) pour montrer qu'un cycle eulérien de  $L(G)$  ne donne pas forcément un cycle hamiltonien de  $G$ .*

**Problème 1.3** *Prouvez que le produit  $\square$  est commutatif (i.e.  $G \square H \simeq H \square G$ ).*

**Problème 1.4** *Prouvez que le produit lexicographique n'est pas commutatif i.e.  $G[H] \not\simeq H[G]$ .*

**Problème 1.5** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Soit  $c : V(G) \rightarrow [k]$  une coloration des sommets de  $G$  telle que les voisins d'un sommet reçoivent des couleurs distinctes (plus précisément, si  $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$  alors  $c(u) \neq c(v)$ ). Alors  $k \geq \Delta(G)$ .*

**Problème 1.6** *Donnez un exemple d'un graphe orienté sans noyau.*

**Problème 1.7** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe et soit  $A = \{\phi : V \rightarrow V : \phi \text{ est un automorphisme de } G\}$ . Alors  $\text{Aut}(G) = (A, \circ)$  est un groupe ( $\circ$  est la composition des fonctions).*

**Problème 1.8** *Prouvez que le produit  $\times$  est commutatif (i.e.  $G \times H \simeq H \times G$ ).*

**Problème 1.9** *Prouvez que le produit  $\square$  est associatif (i.e.  $(G \square H) \square K \simeq G \square (H \square K)$ ).*

**Problème 1.10** Prouvez que le produit  $\times$  est associatif (i.e.  $(G \times H) \times K \simeq G \times (H \times K)$ ).

**Problème 1.11** Prouvez que dans un graphe simple avec au moins deux sommets il y a toujours deux sommets d'un même degré. Donnez un exemple de graphe pas simple dans lequel tous les degrés sont distincts.

**Problème 1.12** Si  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$  alors  $\text{diam}(G) \leq 2$ .

**Problème 1.13** Si  $G \rightarrow H$  et  $H \rightarrow G$  alors  $G \simeq H$ .

## 2 5 points

**Problème 2.1** Prouvez que si  $G \simeq \overline{G}$  alors  $|V(G)| \equiv 0$  ou  $1 \pmod{4}$ .

**Problème 2.2** Prouver que si  $\text{diam}(G) > 3$  alors  $\text{diam}(\overline{G}) < 3$ .

**Problème 2.3** Soit  $cc(G)$  le nombre de composantes connexes de  $G$ . Si  $m > n - cc(G)$  alors  $G$  contient un cycle.

**Problème 2.4**  $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$

**Problème 2.5** Donnez un exemple de graphe sommet-transitif mais pas arête-transitif.

**Problème 2.6** Donnez un exemple de graphe arête-transitif mais pas sommet-transitif.

**Problème 2.7** Dans un graphe  $G = (V, E)$   $k$ -arête-connexe  $|E| \geq \frac{k|V|}{2}$ .

**Problème 2.8** Tout graphe orienté  $D$  contient un chemin orienté simple de longueur au moins  $\max\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}$  si ce maximum est positif.

**Problème 2.9** Si  $d^+(u) = d^+(v)$  pour tout  $u, v \in V$  dans un graphe orienté simple, alors  $d^-(u) = d^-(v)$  pour tout  $u, v \in V$  également.

**Problème 2.10** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Il existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , quelque soit le coloriage de  $V(K_n)$  avec deux couleurs, le graphe  $K_n$  colorié contient un (graphe isomorphe à)  $G$  monochromatique, pas forcément induit.

**Problème 2.11** Pour tout  $2 < k \in \mathbb{N}$ ,  $C_{2k} \rightarrow C_{2k-2}$ .

**Problème 2.12** Pour tout  $2 \leq k \in \mathbb{N}$ ,  $C_{2k+1} \rightarrow C_{2k-1}$ .

**Problème 2.13** Dans un graphe simple connexe  $G$ ,  $\text{diam}(G) + \Delta(G) \leq n + 1$ .

**Problème 2.14** Est-ce que si  $G \rightarrow H$  mais  $H \not\rightarrow K$  alors  $G \not\rightarrow K$ ?

**Problème 2.15** Soit  $C_n$  un cycle de longueur  $n$ . Alors  $\text{Aut}(C_n) \simeq D_n$ , le groupe diédral.

**Problème 2.16** Soit  $G$  soit  $\overline{G}$  est connexe et le “ou” n’est pas exclusif.

**Problème 2.17** Soit  $G, H$  deux graphes, orientés ou non, simples ou pas. Soit  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$  un isomorphisme. Alors pour tout  $u \in V(G)$ ,  $d_G(u) = d_H(\phi(u))$ .

**Problème 2.18** Soient  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 0, 1$ , deux graphes simples et soit  $G = G_0 \square G_1$  leur produit. Soient  $x_i$  les paramètres de  $G_i$ : le nombre de sommets  $n_i$ , le nombre d arêtes  $m_i$ , le degré minimum  $\delta_i$ , le degré maximum  $\Delta_i$ . En termes de  $n_0, n_1, m_0, m_1, \delta_i, \Delta_i$  :

- quel est le nombre de sommets de  $G$ ?
- quel est le nombre d’arêtes de  $G$ ?
- quel est son degré minimum?
- quel est son degré maximum?

**Problème 2.19** Soient  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 0, 1$ , deux graphes simples et soit  $G = G_0 \times G_1$  leur produit. Soient  $x_i$  les paramètres de  $G_i$ : le nombre de sommets  $n_i$ , le nombre d arêtes  $m_i$ , le degré minimum  $\delta_i$ , le degré maximum  $\Delta_i$ . En termes de  $n_0, n_1, m_0, m_1, \delta_i, \Delta_i$  :

- quel est le nombre de sommets de  $G$ ?
- quel est le nombre d’arêtes de  $G$ ?
- quel est son degré minimum?
- quel est son degré maximum?

**Problème 2.20** Soient  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 0, 1$ , deux graphes simples et soit  $G = G_0[G_1]$  leur produit. Soient  $x_i$  les paramètres de  $G_i$ : le nombre de sommets  $n_i$ , le nombre d arêtes  $m_i$ , le degré minimum  $\delta_i$ , le degré maximum  $\Delta_i$ . En termes de  $n_0, n_1, m_0, m_1, \delta_i, \Delta_i$  :

- quel est le nombre de sommets de  $G$ ?
- quel est le nombre d’arêtes de  $G$ ?
- quel est degré minimum?
- quel est son degré maximum?

**Problème 2.21** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et soit  $\text{vc}(G)$  le nombre minimum de cliques dans  $G$  dont la réunion est  $V$ , i.e.  $\text{vc}(G) = \min\{k : \text{il existe des cliques } C_1, \dots, C_k \text{ telles que } \cup_{i=1}^k C_i = V\}$ . Prouver que  $\text{vc}(G) = \chi(\overline{G})$ . Comparer avec le problème 5.11.

**Problème 2.22** Un graphe  $G$  avec  $\alpha(G) = 2$  est de diamètre au plus 3.

**Problème 2.23** Prouvez que les deux définitions de “connexe”, Définitions 8 et 9 dans les définitions, sont équivalentes.

**Problème 2.24** Trouvez une classe infinie de graphes qui sont arête-transitifs mais pas sommet-transitifs.

**Problème 2.25** Si  $\delta(G) \geq k$  alors  $G$  contient une chaîne de longueur  $k$ .

**Problème 2.26** Soit  $G$  un graphe et soit  $A$  sa matrice d'adjacence. Que peut-on dire de l'entrée  $A^k[u, v]$ ,  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ ? Prouvez votre réponse.

**Problème 2.27** Soit  $N = (D, A, c)$  un réseau avec une source  $s$  et un puit  $p$ . Prouvez que si  $c : A \rightarrow \mathbb{N}$  alors tout flot maximum  $\hat{f} : A \rightarrow \mathbb{N}$ .

### 3 10 points

**Problème 3.1** Soit  $Q_n$  l'hypercube de dimension  $n$ . Supposons qu'il est possible de colorier ses sommets avec  $n$  couleurs en s'assurant que deux sommets qui ont un voisin en commun aient des couleurs différentes. Alors  $n$  est une puissance de 2.

**Problème 3.2** Prouver qu'un policier ne peut pas capturer un voleur sur un graphe connexe infini mais localement fini.

**Problème 3.3** Soit  $G$  et  $H$  deux graphes (finis ou infinis). Alors  $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$  si  $\max\{\chi(G), \chi(H)\} \leq |\mathbb{N}| = \omega = \aleph_0$ .

**Problème 3.4** Prouvez que l'hypercube est un graphe sommet-transitif.

**Problème 3.5** Prouvez que l'hypercube est un graphe de Cayley.

**Problème 3.6** Tout graphe  $G$  avec  $\delta(G) \geq k$  contient comme sous-graphe tout arbre avec  $k + 1$  sommets ( $k \in \mathbb{N}$ ).

**Problème 3.7** Donnez un algorithme polynomial qui décide si un graphe contient un cycle impair.

**Problème 3.8** Tout graphe orienté simple  $D$  contient un cycle (simple) orienté de longueur au moins  $1 + \max\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}$  pourvu que  $\max\{\delta^+(D), \delta^-(D)\} > 0$ .

**Problème 3.9**

1. Pour tout  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ ,  $C_{2k+1} \rightarrow K_3$ .
2. Pour tout  $2 \leq k \in \mathbb{N}$ ,  $C_{2k} \leftrightarrow K_2$ .

3. Pour tout  $2 \leq k, \ell \in \mathbb{N}$ ,  $C_{2k} \leftrightarrow C_{2\ell}$ .

4. Pour tout  $1 \leq k < \ell \in \mathbb{N}$ ,  $C_{2k+1} \not\leftrightarrow C_{2\ell+1}$

**Problème 3.10** Soit  $m_i(G)$  la longueur d'un plus court cycle impair dans un graphe non-biparti  $G$ . Alors  $G \rightarrow H$  alors  $m_i(G) \geq m_i(H)$  pour  $G, H$  non-biparti.

**Problème 3.11** Pour tout graphe  $G = (V, E)$  simple, non-vide, régulier et avec  $|V|$  impair on a  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ .

**Problème 3.12** Prouver que  $\chi'(G \square K_2) = 1 + \Delta(G)$  pour tout graphe  $G$  simple.

**Problème 3.13** Soit  $G, H$  deux graphes. Soit  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$  un isomorphisme. Alors pour  $u \in V(G)$ ,  $G \langle N_G(u) \rangle \simeq H \langle (N_H(\phi(u))) \rangle$ . Comment généraliser aux graphes pas simples? Orientés?

**Problème 3.14** Si  $h : V(G) \rightarrow V(H)$  et  $g : V(H) \rightarrow V(G)$  sont des homomorphismes surjectifs alors  $G \simeq H$ .

**Problème 3.15** Donnez un exemple d'un tournoi dont les arêtes sont coloriées en 3 couleurs et dont l'ensemble absorbant minimum a au moins 3 sommets.

**Problème 3.16** Dans un jeu de policier-voleur standard, le voleur gagne sur un graphe fini régulier sauf si le graphe est complet.

**Problème 3.17** Soit  $G, H$  deux graphes. Soit  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$  un isomorphisme. Pour  $u \in V(G)$ , le nombre de cycles élémentaires de longueur  $k$  passant par  $u$  est égal au nombre de cycles élémentaires de longueur  $k$  passant par  $\phi(u)$ .

**Problème 3.18** Prouvez que les deux définitions (15, 16) de l'hypercube sont équivalentes, i.e.  $Q_n \simeq H_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

**Problème 3.19** Un graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, S)$  est connexe si et seulement si  $S$  est un ensemble générateur de  $G$ .

**Problème 3.20** Prouvez que l'hypercube  $Q_n$  est biparti en utilisant la définition 16.

**Problème 3.21** L'hypercube  $Q_n$  est un graphe hamiltonien pour  $n \geq 2$ .

**Problème 3.22** Soit  $G = (V, E)$  un graphe régulier de degré  $d$ . Soit  $c : V(G) \rightarrow [d]$  un coloriage des sommets de  $G$  tel que les voisins d'un sommet reçoivent des couleurs distinctes (plus précisément, si  $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$  alors  $c(u) \neq c(v)$ ). Alors  $n$  est pair.

**Problème 3.23** Expliquer pourquoi la notion de cardinalité est interdite dans les problèmes 4.6 et 5.7.

**Problème 3.24** Prouvez qu'un graphe  $G$  est 2-arête-connexe si et seulement si entre chaque paire de sommets il existe 2 chaînes arêtes-disjointes.

**Problème 3.25** Prouvez que la bipartition d'un graphe biparti connexe est unique.

**Problème 3.26** Tout graphe  $G$  biparti avec  $\delta(G) > 0$  possède une  $\delta(G)$ -arête-coloration telle que toute couleur apparaît à tout sommet.

**Problème 3.27** Soit  $A$  une matrice avec entrées dans  $\{0, 1\}$  (i.e. une matrice sur  $GF(2)$ ). Appelons ligne de  $A$  une rangée ou une colonne. Prouvez que le nombre minimum de lignes contenant tous les 1 est égal au nombre maximum de 1 telles qu'aucune paire n'est sur la même ligne.

**Problème 3.28** Soit  $G$  un graphe et soit  $A$  sa matrice d'adjacence. Soit  $R = A + I$ , avec  $I$  la matrice identité de la taille appropriée,  $n \times n$ . Supposons que les puissances  $R^k$  sont calculées avec l'addition redéfinie:  $a_1 + a_2 \dots + a_n = \max\{a_i : i = 1, \dots, n\}$ . Que peut-on dire de l'entrée  $R^k[u, v]$ ? Prouvez votre réponse.

## 4 15 points

**Problème 4.1** Prouvez que sur un graphe connexe infini mais localement fini il faut un nombre infini de policiers pour appréhender un voleur.

**Problème 4.2** Soit  $G = (V, E)$  le graphe défini par  $V = \{u_i : i = 0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{v_i : i = 0, 1, 2, 3, 4\}$  et  $E = \{u_i v_i : i = 0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{u_i u_{i+1} : i = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ addition modulo } 5\} \cup \{v_i v_{i+2} : i = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ addition modulo } 5\}$ . Prouvez que  $G$  n'est pas hamiltonien.

**Problème 4.3** Soit  $G = (V, E)$  un graphe régulier de degré  $d$ . Soit  $c : V(G) \rightarrow [d]$  un coloriage des sommets de  $G$  tel que les voisins d'un sommet reçoivent des couleurs distinctes (plus précisément, si  $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$  alors  $c(u) \neq c(v)$ ). Alors  $d|n$ .

**Problème 4.4** Soit  $1 \leq k, \ell, n \in \mathbb{N}$  et soit  $c_k : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$  un coloriage des arêtes de  $K_n$  tel que  $|c^{-1}(i)| \leq k$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Un coloriage  $c_k$  est  $(k, \ell)$ -arc-en-ciel si  $K_n$  colorié par  $c_k$  contient un  $K_\ell$  dont toutes les arêtes ont des couleurs distincts. Prouvez que pour tout  $1 \leq k, \ell \in \mathbb{N}$  il existe un plus petit  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  tout coloriage  $c_k$  de  $K_n$  est  $(k, \ell)$ -arc-en-ciel.

**Problème 4.5** Soit  $G$  et  $H$  deux graphes simples. Prouvez que  $\chi'(G \square H) = \Delta(G \square H)$  si  $\chi'(H) = \Delta(H)$  et  $E(H) \neq \emptyset$ . Donnez des exemples pour montrer que les conditions  $\chi'(H) = \Delta(H)$  et  $E(H) \neq \emptyset$  sont nécessaires.

**Problème 4.6** Utilisez les graphes pour prouver le théorème de Cantor-Bernstein pour les ensembles finis (une preuve classique ne compte pas, vous devez utiliser les graphes et leurs propriétés) :

Soit  $X, Y$  deux ensembles et soit  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  des fonctions injectives. Alors il existe une bijection entre  $X$  et  $Y$ . N'oubliez pas le cas où  $X$  et  $Y$  ne sont pas disjoints!

Vous n'avez pas le droit d'utiliser la cardinalité dans votre preuve, en, particulier le théorème de Hall.

**Problème 4.7** Un tournoi avec  $n > 0$  sommets dont les arêtes sont coloriées avec  $k > 0$  couleurs contient un ensemble absorbant d'au plus  $\lceil \lg n \rceil$  sommets.

**Problème 4.8** Tout graphe connexe arête-transitif mais pas sommet-transitif est biparti. Est-ce que "connexe" est important dans l'énoncé?

**Problème 4.9** Soit  $G$  un groupe commutatif et  $S \subset G$ ,  $S^{-1} = S$ ,  $e \notin S$ . Soit  $K = \text{Cay}(G, S)$ . Alors  $K \rightarrow \text{Ind}(K)$ .

**Problème 4.10** Soit  $K = \text{Cay}(D_4, S)$  un graphe de Cayley sur le groupe diédral  $D_4$  et  $S$  un ensemble générateur de  $D_4$ ,  $e \notin S$ . Est-ce que  $K \rightarrow \text{Ind}(K)$ ?

**Problème 4.11** Soit  $G$  un graphe et soit  $T_G$  avec  $V(T_G) = \{T : T \text{ est un arbre couvrant de } G\}$  et  $E(T_G) = \{[T, T'] : |E(T) \Delta E(T')| = 2\}$ . Prouvez que  $T_G$  est connexe.

**Problème 4.12** Soit  $G$  un graphe 3-régulier. Alors  $\kappa(G) = \kappa'(G)$ .

**Problème 4.13** Soit  $G, H$  deux graphes. Pour  $u \in V(G)$  notons  $\nu_G(u, H)$  le nombre de sous-graphes induits de  $G$  isomorphes à  $H$  contenant  $u$ . De manière analogue, on définit  $\mu_G(e, H)$  pour une arête (un arc)  $e$  de  $G$ .

Soit  $G, H$  deux graphes. Soit  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$  un isomorphisme et soit  $K$  un troisième graphe de la même sorte (orienté ou pas, simple ou pas). Alors  $\nu_G(u, K) = \nu_H(\phi(u), K)$  et  $\mu_G(e, K) = \mu_H(\hat{\phi}(e), K)$ .

Indiquez comment étendre ce résultat aux graphes orientés ainsi qu'aux graphes non simple (orientés ou pas).

**Problème 4.14** Soit  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Prouvez pour tout  $a \in G$  et tout symbole  $S \subseteq G$ , le sous-graphe engendré par  $aH$  (le translaté à gauche de  $H$ ) dans  $\text{Cay}(G, S)$  est isomorphe à celui engendré par  $H$ .

**Problème 4.15** Prouvez le théorème de Hall à partir le théorème de König (les théorème 5.2 et 5.3 dans Bondy et Murty).

**Problème 4.16** Soit  $T$  un arbre infini, localement fini et soit  $u \in V(T)$ . Il existe, dans  $T$ , un rayon dont le sommet initial est  $u$ .

**Problème 4.17** Le graphe  $K_3 \square K_3$  est autocomplémentaire.

**Problème 4.18** Le noyau d'un graphe sommet-transitif est également sommet-transitif. (noyau dans le sens homomorphisme).

**Problème 4.19** Si  $G$  a au moins trois sommets et si  $\alpha(G) \leq \kappa(G)$  alors  $G$  est hamiltonien.

**Problème 4.20** Trouvez deux graphes  $G$  et  $H$  tels que  $G \not\rightarrow H$  et  $H \not\rightarrow G$ .



## 5 20 points

**Problème 5.1** *Le plus petit (nombre de sommets) sous-graphe  $H$  de  $G$  tel que  $G \rightarrow H$  est unique à l'isomorphie près.*

**Problème 5.2** *Soit  $H$  le plus petit sous-graphe de  $G$  tel que  $G \rightarrow H$ . Alors il existe un homomorphisme  $h : VG \rightarrow V(H)$  tel que  $h(u) = u$  pour tout  $u \in V(H)$ .*

**Problème 5.3** *Prouvez que  $G$  du problème 4.2 est sommet-transitif. Vous n'avez pas le droit d'utiliser le problème 5.9*

**Problème 5.4** *Prouvez qu'un graphe connexe infini et dénombrable possède un arbre couvrant sans utiliser le problème 6.5.*

**Problème 5.5** *Soit  $G$  un graphe avec  $\aleph_0$  sommets. Alors  $\chi(G) \leq k$  si et seulement si pour tout sous-graphe  $H$  fini,  $\chi(H) \leq k$  (et donc  $\chi(G) = k$  si et seulement si  $\chi(H) \leq k$  pour tout sous-graphe fini  $H$  et il existe un sous graphe  $H$  fini tel que  $\chi(G) = k$ ).*

**Problème 5.6** *Soit  $T$  un tournoi orienté infini, avec les arcs coloriés avec  $k$  couleurs sans créer un rayon (orienté) monochromatique. Alors  $T$  contient un ensemble absorbant fini.*

**Problème 5.7** *Utilisez les graphes pour prouvez le théorème de Cantor-Bernstein pour les ensembles infinis (une preuve classique ne compte pas, vous devez utiliser les graphes et leurs propriétés) :*

*Soit  $X, Y$  deux ensembles et soit  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  des fonctions injectives. Alors il existe une bijection entre  $X$  et  $Y$ .*

*Vous ne pouvez pas utiliser la notion de cardinalité dans votre preuve. N'oubliez pas le cas où  $X$  et  $Y$  ne sont pas disjoints!*

**Problème 5.8** *Soit  $G$  un graphe avec  $10^{10}$  sommets et une seule arête. Soit  $G^k = G^{k-1} \square G$  pour  $k > 1$  et  $G^1 = G$ . Trouver une expression qui donne le nombre de stabilité  $\alpha(G^k)$  de  $G^k$ . Concluez que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(G^k)}{n^k} = \frac{1}{2}$ .*

**Problème 5.9** *Soit  $G$  le graphes dont l'ensemble de sommets est  $\binom{[5]}{2}$  et dans le quel deux sommets  $X$  et  $Y$  sont adjacents si  $X \cap Y = \emptyset$ . Prouvez que le graphe est isomorphe au graphe du problème 4.2. Utiliser ce fait pour refaire le problème 5.3.*

**Problème 5.10** *Un graphe connexe non complet est  $k$ -connexe si et seulement si entre chaque paire de sommets à distance 2 il existe  $k$  chaînes indépendantes.*

**Problème 5.11** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et soit  $ec(G) = \min\{k : \text{il existe des cliques } C_1, \dots, C_k \text{ telles que } \cup_{i=1}^k E(G[C_i]) = E\}$ . Prouver que si  $\alpha(G) = 2$  et  $\text{diam}(G) = 3$  alors  $ec(G) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ . Comparer avec le problème 2.21.*

**Problème 5.12** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et soit  $ec(G) = \min\{k : \text{il existe des cliques } C_1, \dots, C_k \text{ telles que } \cup_{i=1}^k E(G[C_i]) = E\}$ . Prouver que si  $\alpha(G) = 2$  alors  $ec(G) \leq 2n$ . Comparer avec les problèmes 5.11 et 8.9.*

## 6 25 points

**Problème 6.1** Soit  $G$  tel que chaque pair de sommets a exactement 1 voisin en commun ( $|N(u) \cap N(v)| = 1$  pour tout  $u \neq v \in V$ ). Alors  $G$  n'a aucun cycle de longueur 5 sans cordes si et seulement si  $V = \{u, u_0, \dots, u_{2k-1}\}$  et  $E = \{u_{2i}u_{2i+1} : i = 0, \dots, k-1\} \cup \{uu_i : i \in [2k]\}$ .

**Problème 6.2** Soit  $T = (V, A)$  un tournoi dont les arcs sont coloriés avec 2 couleurs. Alors  $T$  contient un sommet absorbant, i.e. un sommet  $u$  tel que pour tout sommet  $v \in V$  il existe un chemin orienté monochromatique de  $v$  vers  $u$ .

**Problème 6.3** Généralisez le théorème de Ramsey vu en classe: Si les arêtes du graphe  $K_\omega$  complet infini dénombrable (sans perte de généralité, supposons que  $V(K_\omega) = \mathbb{N}$ ) sont coloriées en  $k$  couleurs alors le graphe colorié contient un  $K_\omega$  (i.e. une clique infinie) monochromatique.

**Problème 6.4** Soit  $G = G^1$  un graphe avec  $n \geq 1$  sommets et soit  $G^k = G^{k-1} \square G$  pour  $k > 1$ . Prouvez que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(G^k)}{n^k}$  existe (les problèmes 2.4 et 3.3 peuvent être utiles).

**Problème 6.5** Prouvez que tout graphe connexe infini possède un arbre couvrant.

**Problème 6.6** Si  $G$  est un graphe connexe sommet-transitif de degré  $d$  alors  $\kappa'(G) = d$ .

**Problème 6.7** Soit  $X$  un ensemble infini,  $k, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , et soit  $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_k$  une partition de  $\binom{X}{m}$  en  $k$  classes. Prouvez qu'il existe  $Y \subseteq X$ ,  $|Y| = \aleph_0$ , et  $i \in \{1, \dots, k\}$  tels que  $\binom{Y}{m} \subseteq X_i$ .

## 7 50 points

**Problème 7.1** Soit  $T = (V, A)$  un tournoi et soit  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ . Supposons que les arcs de  $T$  sont coloriés avec  $k$  couleurs sans qu'un sous graphe (induit) à trois sommets reçoive trois couleurs. Alors  $T$  contient un sommet absorbant, i.e. un sommet  $u$  tel que pour tout sommet  $v \in V$  il existe un chemin orienté monochromatique de  $v$  vers  $u$ .

**Problème 7.2** Prouvez que si  $n = 2^k$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ , alors il existe  $c : V(Q_n) \rightarrow [2^k]$  telle que pour tout  $u \neq v \in V(Q_n)$ , si  $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$ , alors  $c(u) \neq c(v)$ .

**Problème 7.3** Prouvez la version finie du théorème de Ramsey à partir de sa version infinie (une preuve pourtant correcte disant C'est trivial par compacité n'est pas acceptable, il ne faut pas utiliser cette notion de logique mathématique.)

**Problème 7.4** On pourrait croire que si les arêtes d'un graphe complet avec  $\alpha$  sommets ( $\alpha$  infini) sont coloriées en 2 couleurs alors il y existe un sous-graphe monochromatique de taille  $\alpha$ . Après tout, c'est vrai pour  $\alpha = \aleph_0$ . Prouvez que cela peut ne pas être le cas pour  $\alpha = c = |\mathbb{R}|$ .

**Problème 7.5** Soit  $Q_n$  le hypercube de dimension  $n$ .

1. Quel est le nombre de policiers nécessaire est suffisant pour qu'ils puissent y capturer un voleur?
2. Combien de tours faut-il aux policiers de la première partie de ce problème pour capturer le voleur?

## 8 Sans points

**Problème 8.1** Soit le graphe  $G$  défini dans le problème 6.1. Alors il ne contient aucun cycle de longueur 5 sans cordes. La preuve ne peut pas utiliser la structure décrite dans le problème 6.1.

**Problème 8.2** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soient  $K_n^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  une collections de graphes complets à  $n$  sommets tels que  $|V(K_n^i) \cap V(K_n^j)| = 1$  pour  $i \neq j$  (i.e. deux graphes différents partagent exactement un sommet). Soit  $K = \cup_{i=1}^n K_n^i$ . Alors  $\chi(K) = n$ .

**Problème 8.3** Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $n = 4m + 1$ . Soit  $V_i = \{i\} \times [n]$  pour  $i = 0, 1$  et soit  $D_0 = \{d_1, \dots, d_k : 1 \leq d_i \leq 2m\}$ ,  $D_1 = [2m] \setminus (D_0 \cup \{0\})$ . Soit  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 0, 1$ , défini par  $E_i = \{uv : |u - v| \in D_i\}$ . On constate que  $G_0$  et  $G_1$  sont des graphes complémentaires si on identifie  $(0, u)$  et  $(1, u)$  pour tout  $u \in [n]$ , et que les deux sont réguliers de degré  $2k$ . Soit  $G = (V_0 \cup V_1, E_0 \cup E_1 \cup \{(0, u), (1, u) : u \in [n]\})$ ; ce graphe est régulier de degré  $n$ . Prouvez que  $E$  peut être colorié avec  $n$  couleurs sans que deux arêtes incidentes reçoivent la même couleur (i.e.  $G$  est classe 1 dans le sens de Vizing).

**Problème 8.4** Il existe une constante  $c_3$  telle que si les arcs d'un tournoi  $T = (V, A)$  sont coloriés avec 3 couleurs, alors il existe une partie  $S \subseteq V$ ,  $|S| \leq c_3$  telle que pour tout  $u \in V \setminus S$  il existe  $v \in S$  et un chemin orienté monochromatique de  $u$  vers  $v$  (voir aussi les problèmes 7.1 et 6.2).

**Problème 8.5** Etant donné  $n \in \mathbb{N}$ , quel est le  $k \in \mathbb{N}$  minimum pour qu'il existe une coloration  $c : V(Q_n) \rightarrow [k]$  telle que pour tout  $u \neq v \in V(Q_n)$ , si  $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$ , alors  $c(u) \neq c(v)$ .

**Problème 8.6** Prouvez que dans un graphe orienté simple avec  $n$  sommets il existe toujours un demi-noyau  $S$  tel que  $|N^-[S]| \geq \frac{n}{2}$ .

**Problème 8.7** Soit  $W_5 = ([6], \{[i, 6] : i \in [5]\} \cup \{[i, i + 1] : i \in [5]\})$ , addition modulo 5 (i.e.  $W_5$  est un roue constituée d'un cycle de longueur 5 et un sommet central adjacents aux 5 autres). Quel sont  $\alpha(W_5^k)$  et  $I(W_5)$ ?

**Problème 8.8** Soit  $T = (V, E)$  un arbre avec la racine  $r$  et pour  $u \in V$ , soit  $T_u$  le sous-arbre de  $T$  dont la racine est  $u$ , i.e. le sous-arbre de  $T$  contenant  $u$  et tous les sommets  $v$  de  $T$  tels que l'unique chaîne de  $r$  vers  $v$  passe par  $u$ .

Soit  $T_0 = (V_0, E_0)$  un arbre fini avec racine  $r$ . Supposons que l'on ait défini  $T_i$ . Soit  $L_i$  l'ensemble des feuilles (sommets de degré 1) de  $T_i$ . Soit  $x_i \in L_i$  et soit  $r_i$  l'unique sommet sur la chaîne de  $r$  vers  $x_i$  tel que  $d_{T_i}(x_i, r_i) = 2$ . Soit  $s_i$  le sommet à distance 1 de  $x_i$  et de  $r_i$ . Soit  $T_{r_i}^{s_i}$  le sous arbre de  $T_i$  obtenu en ajoutant le sommet  $r_i$  et l'arête  $r_i s_i$  à  $T_i - x_i$ . Soit  $T_{i+1}$  l'arbre obtenu en ajoutant  $i$  copies de  $T_{r_i}^{s_i}$  à  $T_i - x_i$ , toutes disjointes sauf pour leur racines, qui sont identifiées à  $r_i$ . Prouvez qu'il existe un  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $T_k \simeq K_1 = (\{r\}, \emptyset)$ .

**Problème 8.9** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et soit  $ec(G) = \min\{k : \text{il existe des cliques } C_1, \dots, C_k \text{ telles que } \cup_{i=1}^k E(G[C_i]) = E\}$ . Prouver que si  $\alpha(G) = 2$  alors  $ec(G) \leq n = |V|$ . Comparer avec le problème 5.11.

**Problème 8.10** Si  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$  alors il existe une coloration des arêtes en deux couleurs telle que entre chaque paire de sommets il y a une chaîne de longueur deux en deux couleurs.