

On va prouver les versions graphes et deux couleurs, les plus connues des célèbres théorèmes de Ramsey.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dira que G est *2-colorié* par $c : E \rightarrow \{0, 1\}$ - on donne à chaque arête une des deux couleurs 0 et 1 (pensez rouge et bleu si vous préférez). Rappelons que l'on dit que G *contient* un graphe $H = (U, F)$ si H est un sous-graphe de G , i.e. $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$, et on écrit $H \leq G$.

Une définition souvent utilisée d'un ensemble *infini* X est qu'il existe une partie propre $Y \subsetneq X$ de la même cardinalité, i.e. il y existe aussi une bijection entre X et Y . Puisque la réunion d'un nombre fini d'ensembles finis reste finie (preuve?) il est clair que si X est un ensemble infini et si $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_k$ est une partition (vous vous souvenez de ce que c'est?), alors il existe un $1 \leq i \leq k$ tel que X_i est infini. Ceci est l'observation essentielle pour le premier théorème.

Rappelons aussi que la cardinalité de l'ensemble des naturels est $|\mathbb{N}| = \aleph_0 = \omega$. On utilisera ω dans les indices afin d'éviter des indices doubles, et \aleph_0 ailleurs.

Théorème 1 [Ramsey] *Soit $K = (V, \binom{V}{2})$ un graphe complet infini 2-colorié. Alors il existe un $X \subseteq V$ de cardinalité \aleph_0 tel que le graphe $K\langle X \rangle$ induit par X est monochromatique.*

Avant de le prouver, voici quelques formulations différentes mais équivalentes du théorème; cela devrait clarifier ce qu'il dit.

Théorème 2 *Tout graphe complet infini 2-colorié contient un K_ω monochromatique.*

Théorème 3 *Soit $K = (V, \binom{V}{2})$ un graphe complet infini 2-colorié par les couleurs 0, 1. Soit E_i l'ensemble des arêtes coloriées en couleur i . Il existe $X \subseteq V$ de cardinalité \aleph_0 et $i \in \{0, 1\}$ tels que $\binom{X}{2} \subseteq E_i$.*

On peut aussi regarder les arêtes d'une couleur comme les arêtes d'un graphe G et les arêtes de l'autre couleur comme celle du complémentaire \overline{G} . Le théorème devient alors :

Théorème 4 *Soit G un graphe infini. Alors soit G soit \overline{G} contient K_ω .*

Puisque les sommets d'un graphe complet dans \overline{G} induisent un stable dans G , on a une autre formulation. Notons un stable avec ω sommets (cela marche aussi avec $n \in \mathbb{N}$) \overline{K}_ω .

Théorème 5 *Soit G un graphe infini. Alors G contient soit K_ω soit \overline{K}_ω .*

Passons maintenant à la preuve du théorème 1. On dira que une couleur *apparaît* au sommet u s'il existe une arête de cette couleur incidente à u (plus précisément, la couleur j apparaît à u s'il existe $v \in N(u)$ tel que $c(uv) = j$). On dit qu'une couleur est *infinie* à u si elle apparaît un nombre infini de fois (i.e j est infinie à u si $|\{v \in V : c(uv) = j\}| \geq \aleph_0$). Si on définit $N^j(u) = \{v \in V : c(uv) = j\}$ et $d^j(u) = |N^j(u)|$, on peut dire plus simplement que j est infinie à u si $d^j(u)$ est infini.

Démonstration. (version 1, intuitive) Soit $K = (V, E)$ un graphe infini complet 2-colorié en rouge et bleu (rappel, on colorie les arêtes). Soit u_0 un sommet de K . Une des deux couleurs doit être infinie à u_0 ; soit c_0 cette couleur. Considérons maintenant le sous-graphe K_1 de K induit par les sommets adjacents à u_0 par les arêtes de couleur c_0 (i.e. le graphe K_1 induit par $N^{c_0}(u)$). C'est un graphe complet infini et on peut choisir un sommet arbitraire u_1 dedans. Soit c_1 une couleur qui est infinie à u_1 **dans** K_1 . On choisira u_2 dans le sous-graphe K_2 de K_1 induit par sommets adjacents à u_1 **dans** K_1 par les arêtes de couleur c_1 . On continue ce jeu pour chaque $n \in \mathbb{N}$ - choisir u_n arbitrairement dans K_n trouver une couleur c_n infinie à u_n **dans** K_n et définir K_{n+1} comme le sous-graphe de K_n induit par les arêtes de couleur c_n incidentes à u_n **dans** K_n .

Puisque K_n est un sous-graphe de K_{n-1} pour tout $1 \leq n \in \mathbb{N}$, K_n est un sous-graphe de K_m pour tout $m \leq n$. Donc tous les sommets de K_n sont adjacents à u_m par des arêtes de couleur c_m , c'est comme cela que les u_i ont été choisis. En d'autres mots, $c(u_m u_n) = c_m$ pour tout $0 \leq m \leq n$. Maintenant on se souvient que chacune des couleurs c_n est soit rouge, soit bleu. Une des deux apparaît donc un nombre infini de fois dans la suite c_0, c_1, \dots , disons c_k pour un $k \in \mathbb{N}$. Si on prend comme X l'ensemble de u_n tels que $c_n = c_k$, on aura le sous-graphe infini recherché. \square

Démonstration. (version 2) Pour faire des choses explicites, soit $K = (V, \binom{V}{2})$ le graphe complet infini colorié par $c : E(K) \rightarrow \{0, 1\}$. Nous allons construire une suite de sommets $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dans laquelle on choisira une sous-suite qui donnera le graphe complet monochromatique. On procède récursivement.

Soit $K = (V, \binom{V}{2})$ et soit $V_0 = V$. Soit $u_0 \in V_0$ un sommet arbitraire. Soit, pour $j = 0, 1$, $N_j(u_0) = \{v \in V_0 : c(u_0 v) = j\}$, i.e. $N_i(u_0)$ est l'ensemble de sommets adjacents à u_0 par une arête de couleur j . Un de ces deux ensembles est infini, par l'argument donné plus haut. Soit $j_0 = j$ tel que $N_{j_0}(u_0)$ est infini (on choisi arbitrairement si les deux ensembles sont infinis).

Supposons que la suite $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} = \{u_i\}_{i \in [n]}$, la suite $\{V_i\}_{i \in [n]}$ et la suite $\{j_i\}_{i \in [n]}$ sont déjà construites. Soit $V_n = N_{j_0}(u_{n-1})$ et soit $u_n \in V_n$ arbitraire. Soit, pour $j = 0, 1$, $N_j(u_n) = \{v \in V_n : c(u_n v) = j\}$. Au moins un des deux ensembles est infini et on définit $j_n = j$ tel que $N_{j_n}(u_n)$ est infini (choisi arbitrairement si les deux ensembles sont infinis).

Nous avons donc défini V_n , u_n et j_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $\{j_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de 0 et 1 infinie. Soit 0 soit 1 doit apparaître dans la suite un nombre infini de fois. Soit k une telle couleur (avec un choix arbitraire si les deux apparaissent un nombre infini de fois). Soit $X = \{u_i : j_i = k\}$. Pour que la preuve soit complète, ils suffit d'observer que par les choix de u_i et V_i , $c(u_i u_j) = j_i$ pour tout $i \leq j$ et donc $c(u_i u_j) = k$ pour tout $u_i, u_j \in X$. \square

Démonstration. (version 3, compacte) Soit $G = (V, \binom{V}{2})$ un graphe complet infini colorié

par $c : \binom{V}{2} \longrightarrow \{0,1\}$. Soit $V_0 = V$, $E_0 = \binom{V_0}{2}$, $G_0 = (V_0, E_0)$. Supposons que $G_i = (V_i, E_i)$ est défini pour tout $i \in [n]$. Soit $u_n \in V_i$ arbitraire. Pour $j \in \{0,1\}$ soit $N_n^j(u) = \{v \in V_n : c(uv) = j\}$ et $d_n^j(u) = |N_n^j(u)|$. Soit $j_n = \min\{i : d_n^i(u_0) \text{ est infini}\}$; j_n est bien défini par le principe du pigeonier. Soit $V_n = N_n^{j_n}(u_n)$, $E_n = \binom{V_n}{2}$, $G_n = (V_n, E_n)$.

Nous venons de définir, en plus de la suite $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, les suites $U = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $J = \{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Puisque $j_n \in \{0,1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que j_k apparaîât un nombre infini de fois dans J . Soit $X = \{u_n : j_n = j_k\}$. Cet ensemble de sommets est infini et, par construction, $c(u_i u_j) = j_k$ pour tout $u_i, u_j \in X$. \square