

Théorèmes de Ramsey  
version 2.2  
28 février 2025

On va prouver les versions graphes et deux couleurs, les plus connues des célèbres théorèmes de Ramsey.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. On dira que  $G$  est *2-colorié* par  $c : E \rightarrow \{0, 1\}$ . C'est-à-dire, on donne à chaque arête une des deux couleurs 0 et 1 (pensez rouge et bleu si vous préférez). Rappelons que l'on dit que  $G$  *contient* un graphe  $H = (U, F)$  si  $H$  est un sous-graphe de  $G$ , i.e.  $U \subseteq V$  et  $F \subseteq E$ , et on écrit  $H \leq G$ . Un sous-graphe  $H = (U, F)$  du graphe  $G$  *2-colorié* par  $c : E \rightarrow \{0, 1\}$  est *monochromatique* si  $c \upharpoonright U$  est constante, i.e.  $c(u) = c(v)$  pour  $u, v \in U$ .

Une définition souvent utilisée d'un ensemble *infini*  $X$  est qu'il existe une partie propre  $Y \subsetneq X$  de la même cardinalité, i.e. il y existe une bijection entre  $X$  et  $Y$ . Puisque la réunion d'un nombre fini d'ensembles finis reste finie (preuve?) il est clair que si  $X$  est un ensemble infini et si  $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_k$  est une partition (vous vous souvenez de ce que c'est?), alors il existe un  $1 \leq i \leq k$  tel que  $X_i$  est infini. Ceci est l'observation essentielle pour le premier théorème.

Rappelons aussi que la cardinalité de l'ensemble des naturels est  $|\mathbb{N}| = \aleph_0 = \omega$ . On utilisera  $\omega$  dans les indices afin d'éviter des indices doubles, et  $\aleph_0$  ailleurs.

**Théorème 1** [*Ramsey*] Soit  $K = (V, \binom{V}{2})$  un graphe complet infini 2-colorié. Alors il existe un  $X \subseteq V$  de cardinalité  $\aleph_0$  tel que le graphe  $K[X]$  induit par  $X$  est monochromatique.

Avant de le prouver, voici quelques formulations différentes mais équivalentes du théorème; cela devrait clarifier ce qu'il dit.

**Théorème 2** Tout graphe complet infini 2-colorié contient un  $K_\omega$  monochromatique.

**Théorème 3** Soit  $K = (V, \binom{V}{2})$  un graphe complet infini 2-colorié par les couleurs 0, 1. Soit  $E_i$  l'ensemble des arêtes coloriées en couleur  $i$ . Il existe  $X \subseteq V$  de cardinalité  $\aleph_0$  et  $i \in \{0, 1\}$  tels que  $\binom{X}{2} \subseteq E_i$ .

On peut aussi regarder les arêtes d'une couleur comme les arêtes d'un graphe  $G$  et les arêtes de l'autre couleur comme celle du complémentaire  $\overline{G}$ . Le théorème devient alors :

**Théorème 4** *Soit  $G$  un graphe infini. Alors soit  $G$  soit  $\overline{G}$  contient  $K_\omega$ .*

Puisque les sommets d'un graphe complet dans  $\overline{G}$  induisent un stable dans  $G$ , on a une autre formulation. Notons un stable avec  $\omega$  sommets (cela marche aussi avec  $n \in \mathbb{N}$ )  $\overline{K}_\omega$ .

**Théorème 5** *Soit  $G$  un graphe infini. Alors  $G$  contient soit  $K_\omega$  soit  $\overline{K}_\omega$ .*

Passons maintenant à la preuve du théorème 1. On dira que une couleur apparaît au sommet  $u$  s'il existe une arête de cette couleur incidente à  $u$  (plus précisément, la couleur  $j$  apparaît à  $u$  s'il existe  $v \in N(u)$  tel que  $c(uv) = j$ ). On dit qu'une couleur est *infinie* à  $u$  si elle apparaît un nombre infini de fois (i.e  $j$  est infinie à  $u$  si  $|\{v \in V : c(uv) = j\}| \geq \aleph_0$ ). Si on définit  $N^j(u) = \{v \in V : c(uv) = j\}$  et  $d^j(u) = |N^j(u)|$ , on peut dire plus simplement que  $j$  est infinie à  $u$  si  $d^j(u)$  est infini.

*Démonstration.* (version 1, intuitive) Soit  $H = (V, E)$  un graphe infini complet 2-colorié en rouge et bleu (rappel, on colorie les arêtes). Soit  $u_0$  un sommet de  $H$ . Une des deux couleurs doit être infinie à  $u_0$ ; soit  $c_0$  cette couleur. Considérons maintenant le sous-graphe  $H_1$  de  $H$  induit par les sommets adjacents à  $u_0$  par les arêtes de couleur  $c_0$  (i.e. le graphe  $H_1$  induit par  $N^{c_0}(u)$ ). C'est un graphe complet infini et on peut choisir un sommet arbitraire  $u_1$  dedans. Soit  $c_1$  une couleur qui est infinie à  $u_1$  **dans**  $H_1$ . On choisira  $u_2$  dans le sous-graphe  $H_2$  de  $H_1$  induit par sommets adjacents à  $u_1$  **dans**  $H_1$  par les arêtes de couleur  $c_1$ . On continue ce jeu pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  - choisir  $u_n$  arbitrairement dans  $H_n$  trouver une couleur  $c_n$  infinie à  $u_n$  **dans**  $H_n$  et définir  $H_{n+1}$  comme le sous-graphe de  $H_n$  induit par les arêtes de couleur  $c_n$  incidentes à  $u_n$  **dans**  $H_n$ .

Puisque  $H_n$  est un sous-graphe de  $H_{n-1}$  pour tout  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n$  est un sous-graphe de  $H_m$  pour tout  $m \leq n$ . Donc tous les sommets de  $H_n$  sont adjacents à  $u_m$  par des arêtes de couleur  $c_m$ , c'est comme cela que les  $u_i$  ont été choisis. En d'autres mots,  $c(u_m u_n) = c_m$  pour tout  $0 \leq m \leq n$ . Maintenant on se souvient que chacune des couleurs  $c_n$  est soit rouge, soit bleu. Une des deux apparaît donc un nombre infini de fois dans la suite  $c_0, c_1, \dots$ , disons  $c_k$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ . Si on prend comme  $X$  l'ensemble de  $u_n$  tels que  $c_n = c_k$ , on aura le sous-graphe infini recherché.  $\square$

*Démonstration.* (version 2) Pour faire des choses explicites, soit  $K = (V, \binom{V}{2})$  le graphe complet infini colorié par  $c : E(K) \longrightarrow \{0, 1\}$ . Nous allons construire une suite de sommets  $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  dans laquelle on choisira une sous-suite qui donnera le graphe complet monochromatique. On procède récursivement.

Soit  $K = (V, \binom{V}{2})$  et soit  $V_0 = V$ . Soit  $u_0 \in V_0$  un sommet arbitraire. Soit, pour  $j = 0, 1$ ,  $N^j(u_0) = \{v \in V_0 : c(u_0v) = j\}$ , i.e.  $N^j(u_0)$  est l'ensemble de sommets adjacents à  $u_0$  par une arête de couleur  $j$ . Un de ces deux ensembles est infini, par l'argument donné plus haut. Soit  $j_0 = j$  tel que  $N^{j_0}(u_0)$  est infini (on choisi arbitrairement si les deux ensembles sont infinis).

Supposons que la suite  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} = \{u_i\}_{i \in [n]}$ , la suite  $\{V_i\}_{i \in [n]}$  et la suite  $\{j_i\}_{i \in [n]}$  sont déjà construites. Soit  $V_n = N^{j_0}(u_{n-1})$  et soit  $u_n \in V_n$  arbitraire. Soit, pour  $j = 0, 1$ ,  $N^j(u_n) = \{v \in V_n : c(u_nv) = j\}$ . Au moins un des deux ensembles est infini et on définit  $j_n = j$  tel que  $N^{j_n}(u_n)$  est infini (choisi arbitrairement si les deux ensembles sont infinis).

Nous avons donc défini  $V_n, u_n$  et  $j_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La suite  $\{j_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de 0 et 1 infinie. Soit 0 soit 1 doit apparaître dans la suite un nombre infini de fois. Soit  $k$  une telle couleur (avec un choix arbitraire si les deux apparaissent un nombre infini de fois). Soit  $X = \{u_i : j_i = k\}$ . Pour que la preuve soit complète, ils suffit d'observer que par les choix de  $u_i$  et  $V_i$ ,  $c(u_iu_j) = j_i$  pour tout  $i \leq j$  et donc  $c(u_iu_j) = k$  pour tout  $u_i, u_j \in X$ .  $\square$

*Démonstration.* (version 3, compacte) Soit  $G = (V, \binom{V}{2})$  un graphe complet infini colorié par  $c : \binom{V}{2} \longrightarrow \{0, 1\}$ . Soit  $V_0 = V$ ,  $E_0 = \binom{V_0}{2}$ ,  $G_0 = (V_0, E_0)$ . Supposons que  $G_i = (V_i, E_i)$  est défini pour tout  $i \in [n]$ . Soit  $u_n \in V_i$  arbitraire. Pour  $j \in \{0, 1\}$  soit  $N_n^j(u) = \{v \in V_n : c(uv) = j\}$  et  $d_n^j(u) = |N_n^j(u)|$ . Soit  $j_n = \min\{i : d_n^i(u_0) \text{ est infini}\}$ ;  $j_n$  est bien défini par le principe du pigeonier. Soit  $V_n = N_n^{j_n}(u_n)$ ,  $E_n = \binom{V_n}{2}$ ,  $G_n = (V_n, E_n)$ .

Nous venons de définir, en plus de la suite  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , les suites  $U = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $J = \{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Puisque  $j_n \in \{0, 1\}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un plus petit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $j_k$  apparaît un nombre infini de fois dans  $J$ . Soit  $X = \{u_n : j_n = j_k\}$ . Cet ensemble de sommets est infini et, par construction,  $c(u_iu_j) = j_k$  pour tout  $u_i, u_j \in X$ .  $\square$