

On définit $r(k, \ell) = \min\{n : \text{tout graphe avec au moins } n \text{ sommets contient soit une clique avec } k \text{ sommets, soit un stable avec } \ell \text{ sommets}\}$. On voit facilement que $r(k, 1) = r(1, \ell) = 1$ et que $r(k, 2) = k$ et $r(2, \ell) = \ell$.

Théorème 1 *Pour $k, \ell \geq 2$, $r(k, \ell) \leq r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1)$. De plus, si $r(k, \ell) \leq r(k-1, \ell), r(k, \ell-1)$ sont tous les deux pairs, $r(k, \ell) < r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1)$.*

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $n = r(k, \ell) \leq r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1)$ sommets et soit v un sommet de G . Le sommet a $n-1$ voisins potentiels, soit $|N(v)| \geq r(k-1, \ell)$, soit $|V \setminus N(v)| \geq r(k, \ell-1)$, par le principe du pigeonier. Dans le premier cas, soit $G[N(v)]$ contient une clique K de taille $k-1$ et alors $K \cup \{v\}$ est une clique de taille k , soit $G[N(v)]$ contient un stable de taille ℓ . Dans le deuxième cas, le graphe $G[V \setminus N(v)]$ contient une clique de taille k , soit $G[V \setminus N(v)]$ contient un stable de taille $\ell-1$ qui, avec v constitue un stable de taille ℓ .

Si $r(k, \ell) \leq r(k-1, \ell), r(k, \ell-1)$ sont tous les deux pairs, un graphe avec $r(k, \ell) \leq r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1) - 1$ sommets a un nombre impair de sommets et donc doit contenir un sommet v de degré pair (cf le corollaire au premier théorème de théorie des graphes). Mais alors $|N(v)| \geq r(k-1, \ell)$ car $r(k-1, \ell) - 1$ est impair, et l'argument plus haut s'applique à ce graphe. \square