Arbres AVL

AV - L

Adel'son - Vel'skii Landis (1962)

Arbres AVL

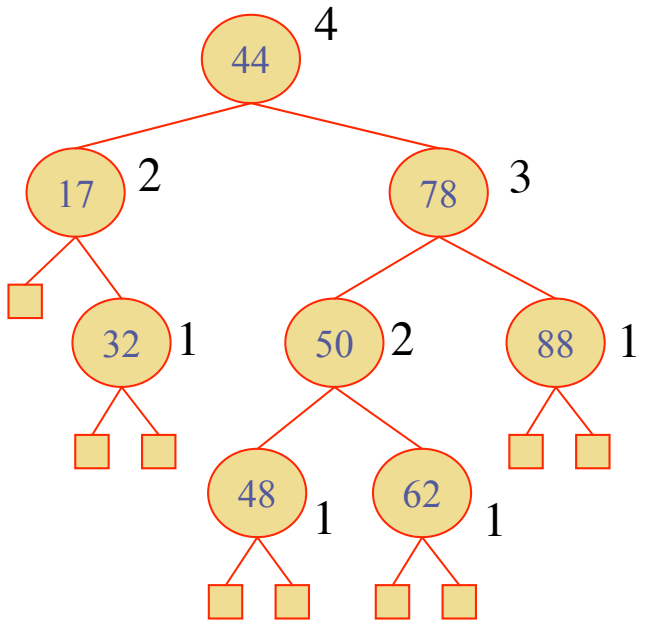
- Un arbre AVL est un arbre binaire de recherche balancé i.e un arbre binaire ayant les propriétés suivantes:

arbres binaires de recherche

- Soient u, v et w trois noeuds tels que u est dans le sous-arbre gauche de v et w dans son sous-arbre droit. Alors, on a

$$clé(u) < clé(v) \leq clé(w)$$

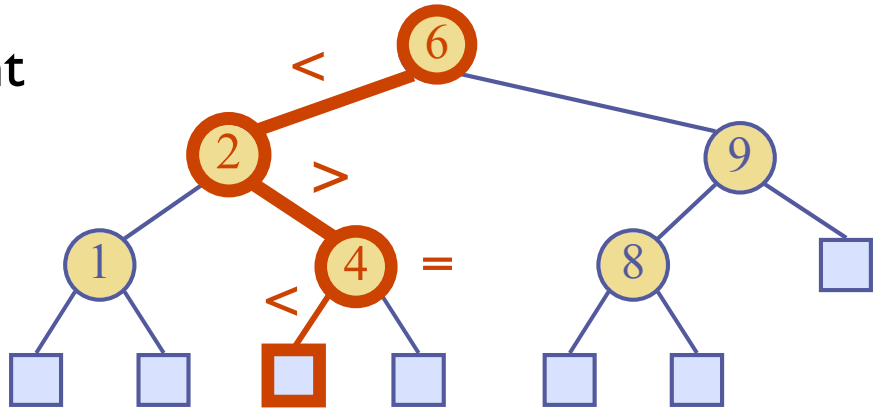
- Les éléments sont gardés en mémoire dans les noeuds internes
- Un parcours symétrique de l'arbre visite les clés en ordre croissant
- Propriété de balance: Pour chaque noeud interne v, la hauteur des enfants de v diffère d'au plus 1



- La hauteur d'un arbre AVL est en $O(\log n)$

Chercher dans les arbres AVL

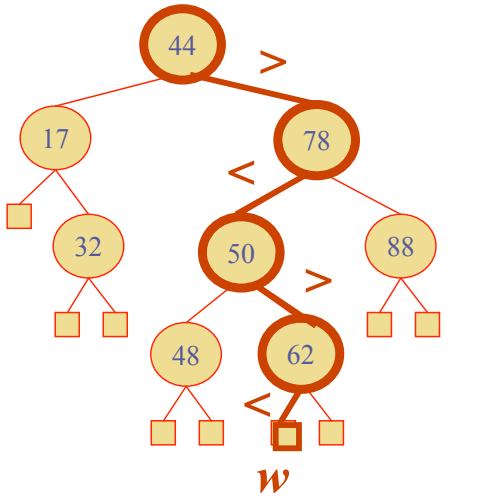
- Pour chercher un élément de clé k dans un arbre AVL, on procède exactement de la même façon que pour la recherche dans les arbres binaires de recherche:
- Exemple 1: Chercher(4)
- Le prochain noeud visité dépend du résultat de la comparaison de k avec la clé du noeud dans lequel on se trouve.
- Si on trouve un noeud interne de clé k, on retourne la valeur correspondant à cette entrée de clé k
- Sinon, on retourne NULL
  - Exemple 1: Chercher(3)

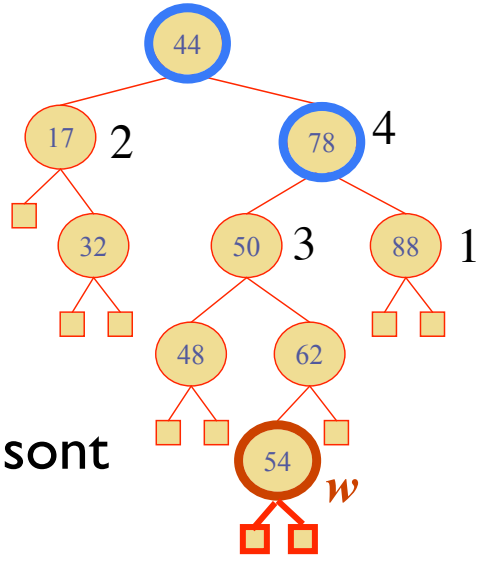


Insérer dans les arbres AVL

- Pour insérer un élément (k,v) dans un arbre AVL, on commence par exécuter l'algorithme d'insertion d'un arbre binaire de recherche.

- Exemple 1: Insérer(54,v)
  - On commence par exécuter chercher(k)
  - Si k n'est pas dans l'arbre l'algorithme chercher(k) se terminera dans une feuille w
  - On insère k dans w et on change w en un noeud interne
  - Si k est dans l'arbre l'algorithme chercher(k) se terminera dans un noeud interne w. On applique alors récursivement l'algorithme chercher(k) sur le filsDroit de w, jusqu'à ce qu'on trouve une feuille.



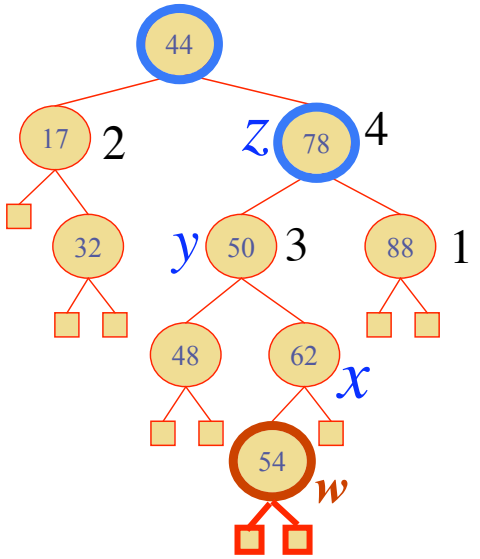


- Après l'insertion de (54,v), certains noeuds ne sont plus balancés!!

Restructuration de l'arbre après une insertion

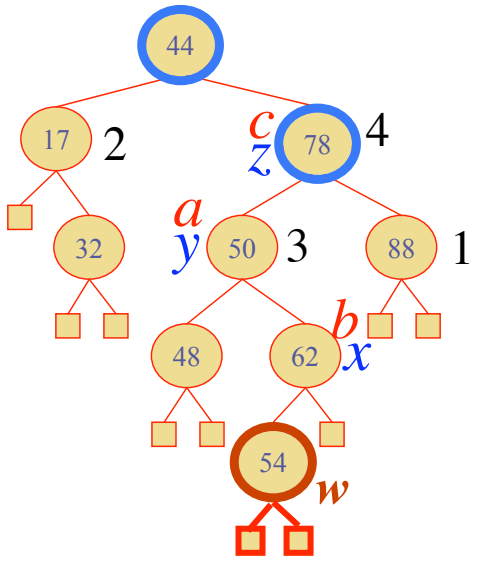
- Après l'insertion d'une entrée dans un arbre AVL, il est possible que certains noeuds internes soient débalancés.

- Pour retrouver la propriété de balance, on va devoir restructurer l'arbre comme suit:
  - Les noeuds débalancés sont situés sur le chemin du noeud w à la racine (pourquoi?)
  - On va nommer z le premier noeud débalancé qu'on trouve sur ce chemin.
  - On va nommer y le fils de z de plus grande hauteur
  - On va nommer x le fils de y de plus grande hauteur (si égalité, on choisit le fils qui est un ancêtre de w)



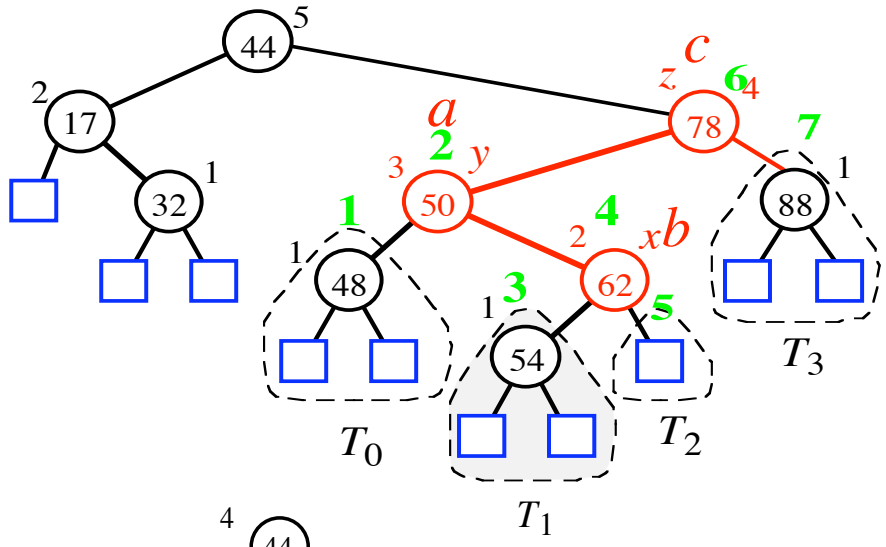
Restructuration de l'arbre après une insertion (suite)

- Étant donné les noeuds internes x, y et z, on renomme par "a" le premier de ces sommets visités lors d'un parcours symétrique de l'arbre, par "b", le deuxième et par "c", le troisième.
- Appliquer un algorithme de restructuration qui va rebalancer le noeud interne z (rebalancement local)
  - Goodrich et Tamassia (tableau)
  - Rotations et lois associatives
- À la fin de la restructuration tous les noeuds internes seront balancés (rebalancement global)

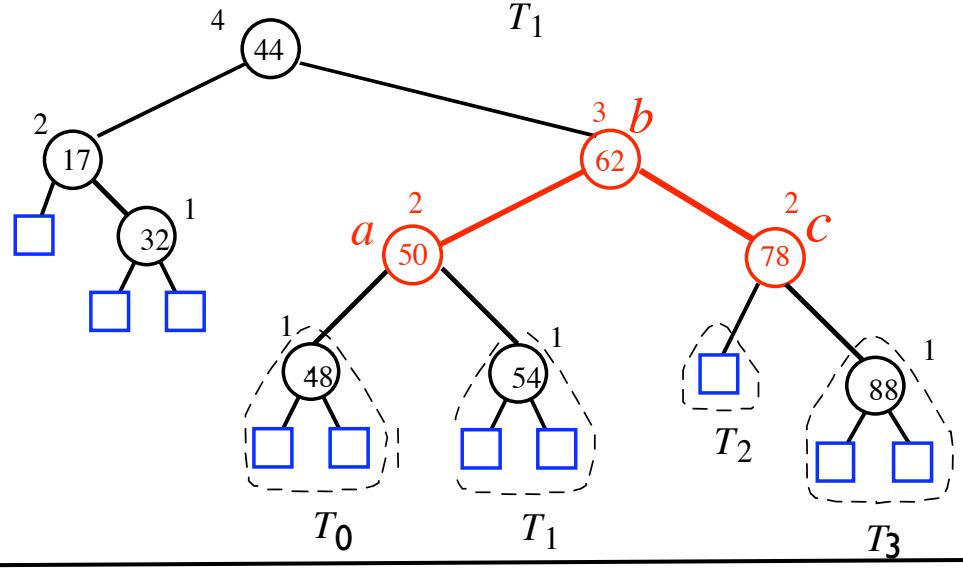


Restructuration de l'arbre après une insertion version Goodrich et Tamassia:

débalancé...



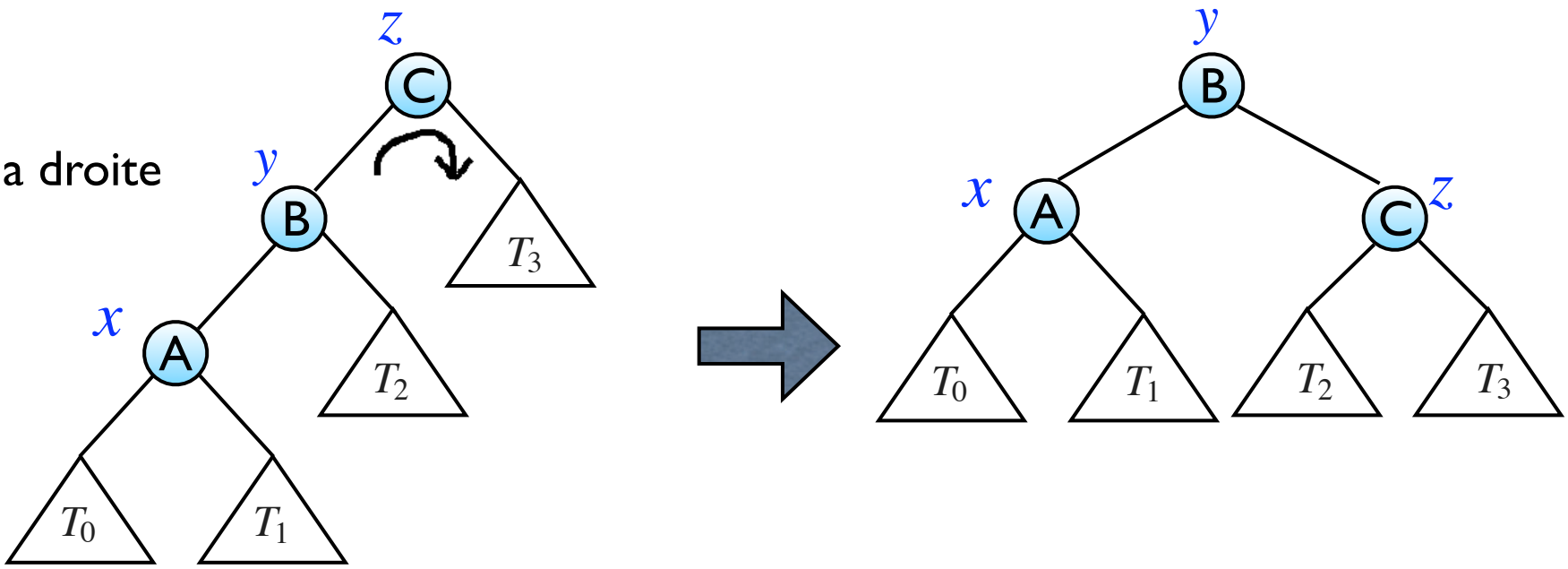
...balancé



Rotations et lois associatives

1) Rotations simples

vers la droite

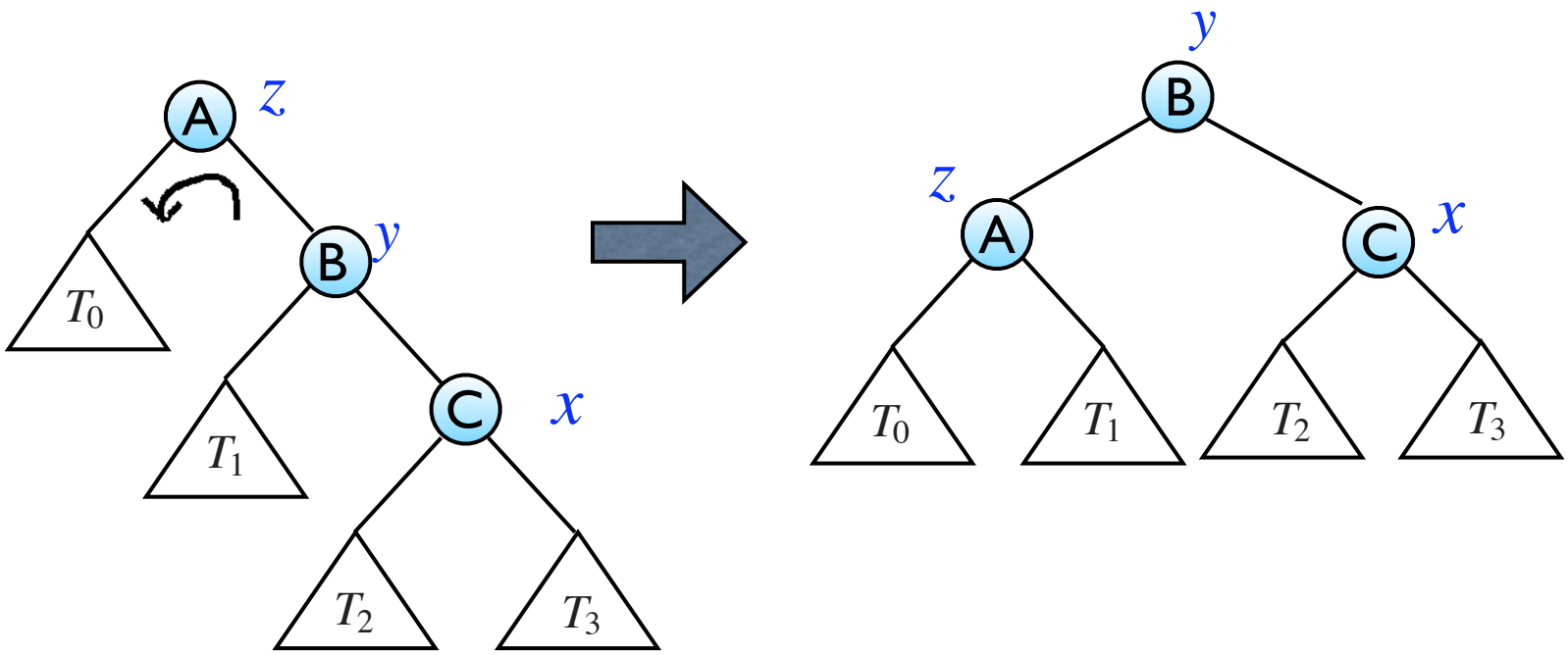


$$((T_0 \,Ⓐ\, T_1) \,Ⓑ\, T_2) \,Ⓒ\, T_3 \qquad (T_0 \,Ⓐ\, T_1) \,Ⓑ\, (T_2 \,Ⓒ\, T_3)$$

Rotations et lois associatives (suite)

1) Rotations simples (suite)

vers la gauche

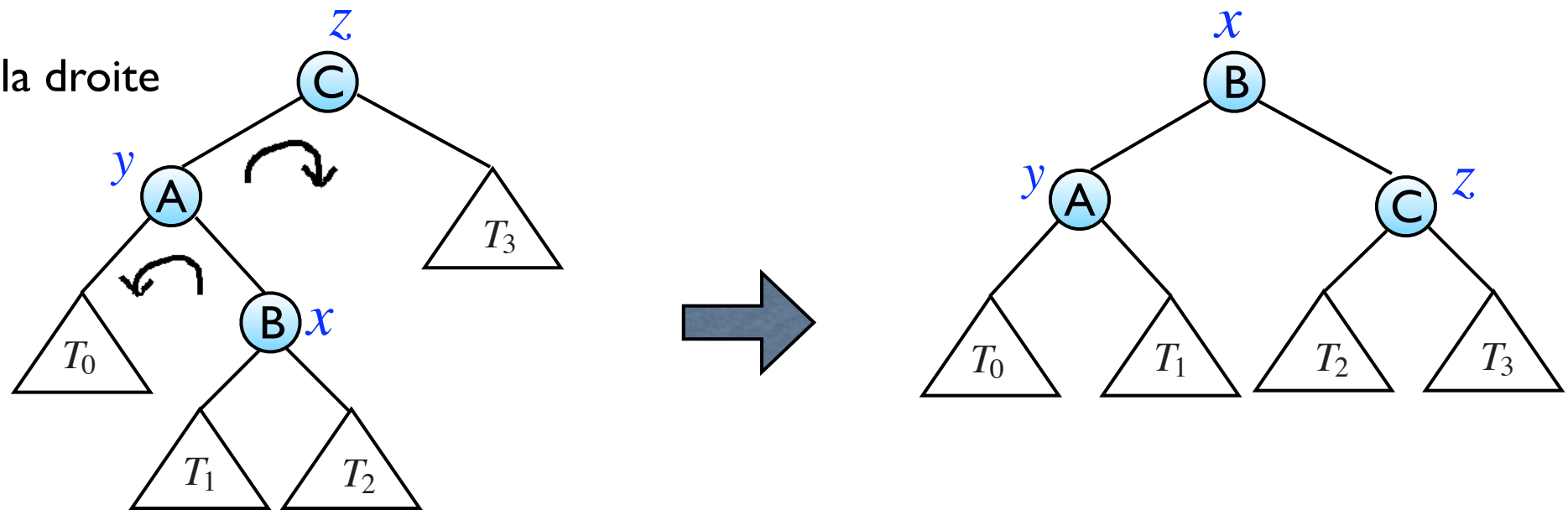


$$T_0 \,Ⓐ\, (T_1 \,Ⓑ\, (T_2 \,Ⓒ\, T_3)) \qquad (T_0 \,Ⓐ\, T_1) \,Ⓑ\, (T_2 \,Ⓒ\, T_3)$$

Rotations et lois associatives

2) Rotations doubles

vers la droite



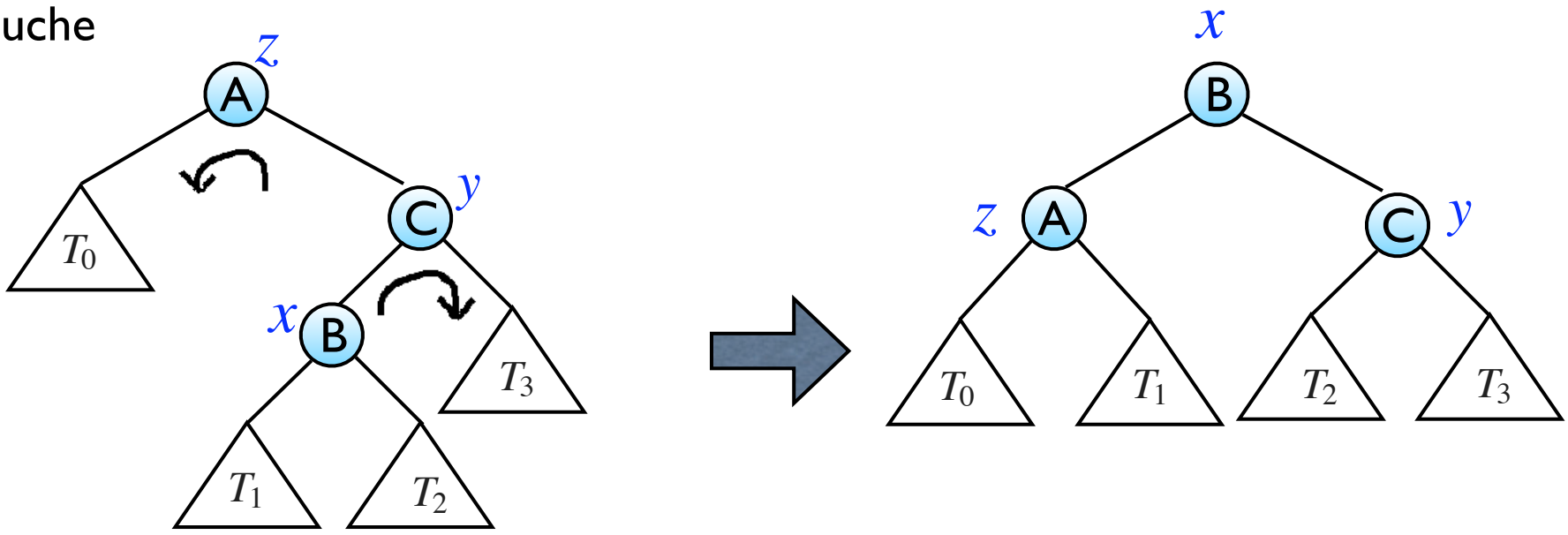
$$(T_0 \,Ⓐ\, (T_1 \,Ⓑ\, T_2)) \,Ⓒ\, T_3$$

$$(T_0 \,Ⓐ\, T_1) \,Ⓑ\, (T_2 \,Ⓒ\, T_3)$$

Rotations et lois associatives (suite)

2) Rotations doubles (suite)

vers la gauche



$$T_0 \,\textcircled{A}\, ((T_1 \,\textcircled{B}\, T_2) \,\textcircled{C}\, T_3)$$

$$(T_0 \,\textcircled{A}\, T_1) \,\textcircled{B}\, (T_2 \,\textcircled{C}\, T_3)$$

Supprimer dans les arbres AVL

- Pour supprimer un élément de clé k dans un arbre AVL, on commence par exécuter l'algorithme de suppression d'un arbre binaire de recherche.

- Après la suppression, il est possible que certains noeuds internes soient débalancés (en fait un seul noeud sera débalancé)

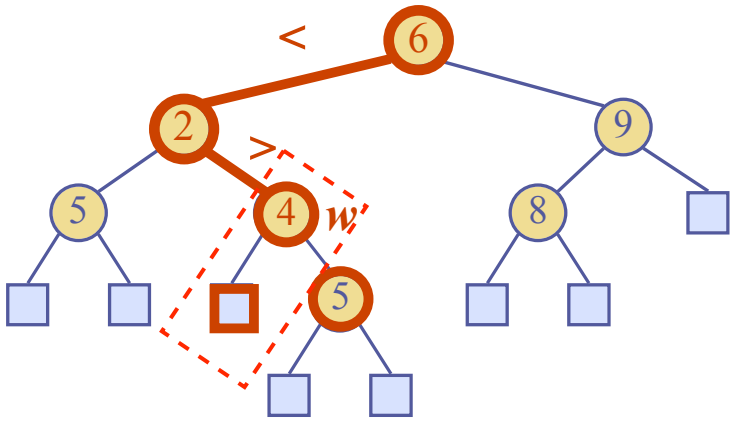
- On va faire une restructuration de l'arbre autour de ce noeud, ce qui causera un rebalancement local. Il est possible que cette restructuration cause le débalancement d'un autre noeud.

- On va restucturer l'arbre tant qu'il y a un noeud débalancé sur le chemin de p à la racine, où p est le parent du noeud enlevé

Supprimer dans un arbre binaire de recherche (rappel)

- Pour enlever un élément de clé k dans un arbre binaire de recherche, on commence par exécuter l'algorithme chercher(k).

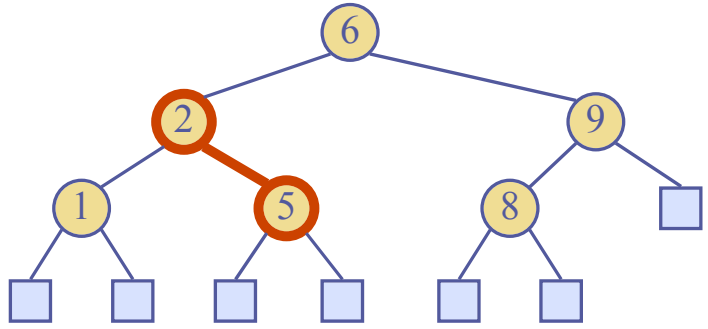
- Exemple 1: Enlever(4)



- Si k n'est pas dans l'arbre l'algorithme chercher(k) se terminera dans une feuille

- Si l'un des enfant de w est une feuille, on enlève cette feuille et w

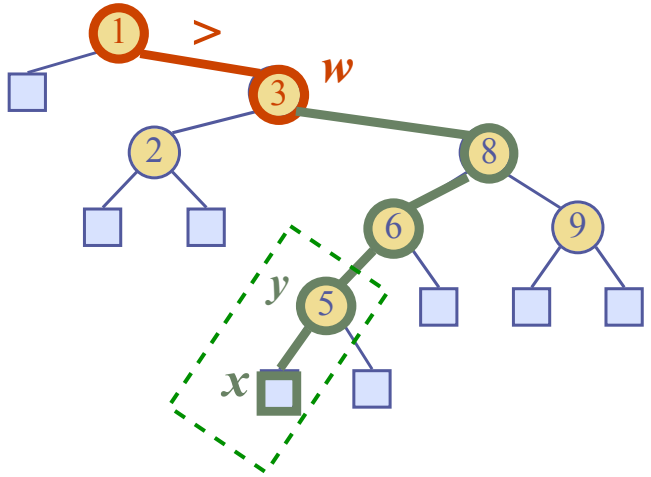
- Sinon...

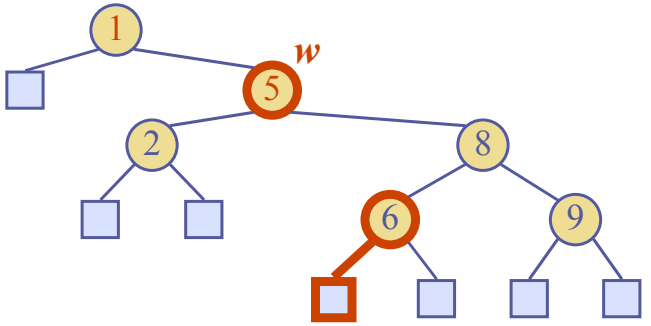


Supprimer dans un arbre binaire de recherche (suite)

- Si k est pas dans l'arbre, l'algorithme chercher(k) se terminera dans un noeud interne w. Si les fils de w sont tous les deux des noeuds internes alors

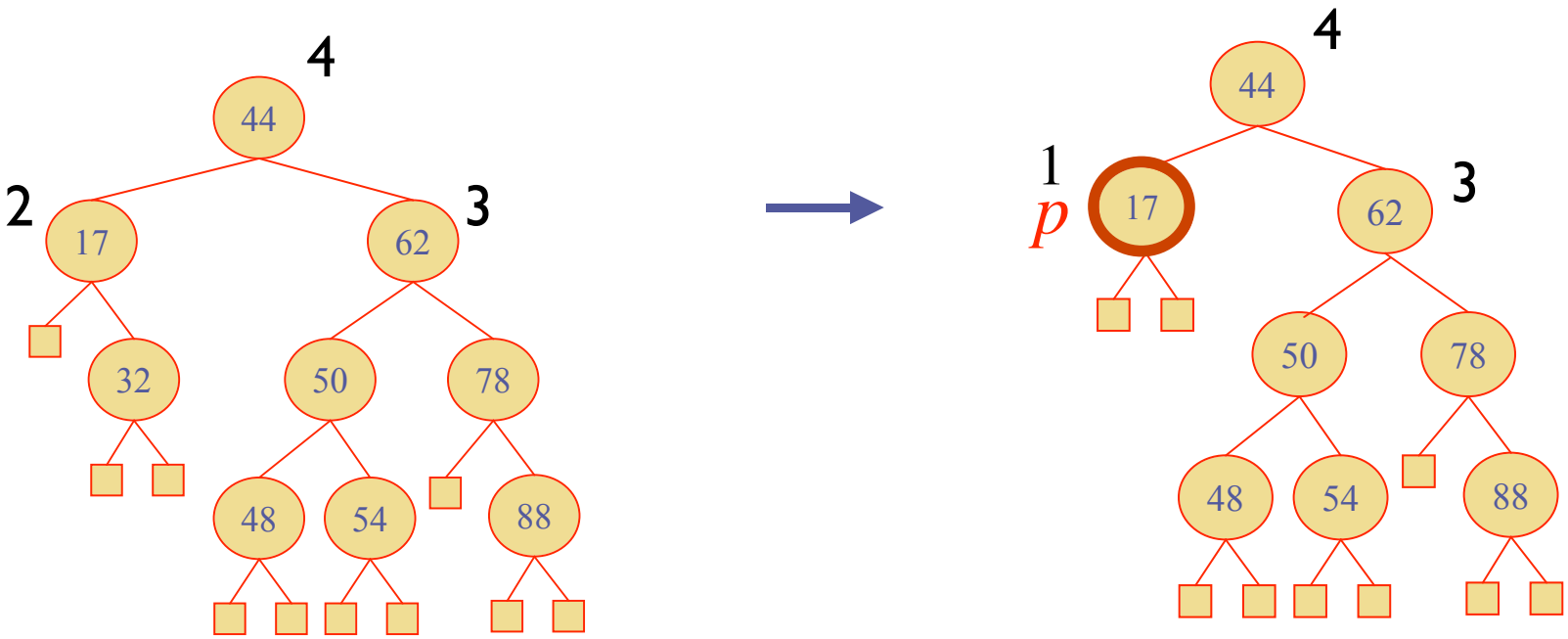
- Exemple 2: Enlever(3)
  - On trouve le noeud interne y qui suit w lors d'un parcours symétrique de l'arbre et son fils gauche x
  - On enlève l'entrée dans w et on la remplace par l'entrée dans y
  - On enlève les noeuds y et x





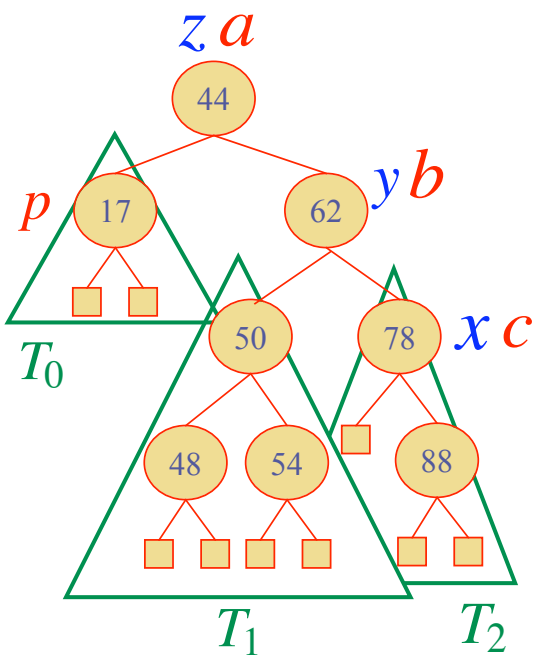
Supprimer dans les arbres AVL

- Après la suppression d'un noeud, il est possible que son parent p cause un débalancement
- Exemple: Enlever(32)

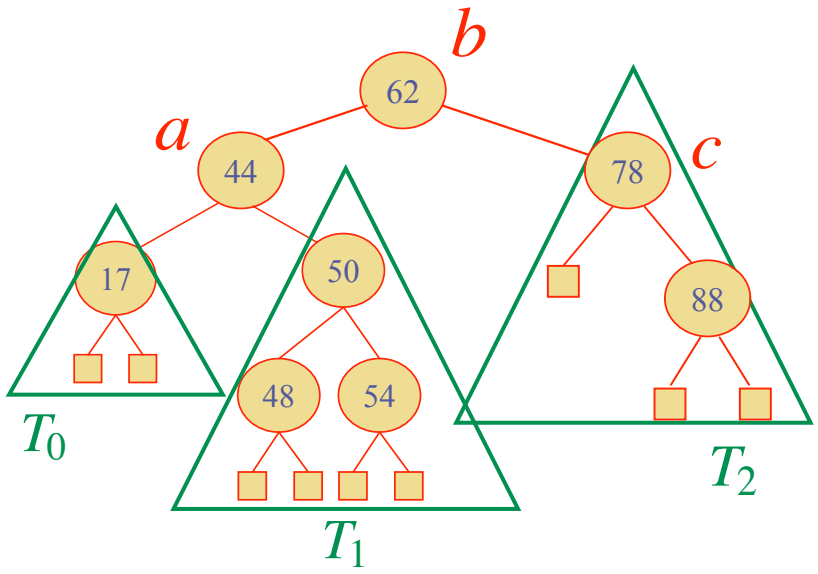


Supprimer dans les arbres AVL (suite)

- Soit z le premier noeud non balancé sur le chemin allant de ce parent p à la racine de l'arbre. Soit y le fils de z de hauteur maximale et soit x, le fils de y de hauteur maximale
- Étant donné les noeuds internes x, y et z, on renomme par a le premier de ces sommets visités lors d'un parcours symétrique de l'arbre, par b, le deuxième et par c, le troisième.



$T_0 \textcircled{a} (T_1 \textcircled{b} T_2)$



$(T_0 \textcircled{a} T_1) \textcircled{b} T_2$

Supprimer dans les arbres AVL (suite)

Attention!! Il est possible qu'après le rebalancement d'un noeud, un autre noeud (sur le chemin allant vers la racine) se retrouve débalancé

On continue donc à balancer l'arbre jusqu'à ce qu'on atteingne la racine

Exemple au tableau!!

Performances pour les arbres AVL

- Rebalancer un noeud prend un temps $O(1)$, si on implémente l'arbre AVL à l'aide d'une structure chaînée
- L'algorithme de recherche prend un temps $O(\log n)$
  - La hauteur de l'arbre est $O(\log n)$ et aucune restructuration est nécessaire
- L'algorithme d'insertion prend un temps $O(\log n)$
  - Chercher l'endroit où insérer prend un temps $O(\log n)$
  - Trouver un noeud non balancé (si il y en a un) prend un temps $O(\log n)$
  - Restructurer l'arbre prend un temps $O(1)$
- L'algorithme de suppression prend un temps $O(\log n)$
  - Chercher le noeud à enlever prend un temps $O(\log n)$
  - On devra faire, au plus, $O(\log n)$ restructuration
  - Chaque restructuration prend un temps $O(1)$