Introduction: Arbres de recherche
+
Rappel: Arbres binaires de recherche

Rappel : Dictionnaires ordonnés:

- Opérations principales:
  - trouver(k): Si le dictionnaire a une entrée de clé k, retourne la valeur
    find(k): associée à cette entrée, sinon retoune NULL.
  - findAll(k): Retourne un itérateur de toutes les entrées de clé k, ou NULL si aucune entrée de clé k
  - insérer(k,v): insérer l'entrée (k,v) dans le dictionnaire
    put(k,v):
  - enlever(k): Si le dictionnaire a une entrée de clé k, l'enlever et
    remove(k): retourner sa valeur associée, sinon retourner NULL
  - removeAll(k): Si le dictionnaire a une ou plusieurs entrées de clé k, les enlever et retourner un itérateur des valeurs associées à chacune de ces entrées, sinon retouner NULL

Dictionnaires ordonnés (suite)

- Opérations principales (suite):

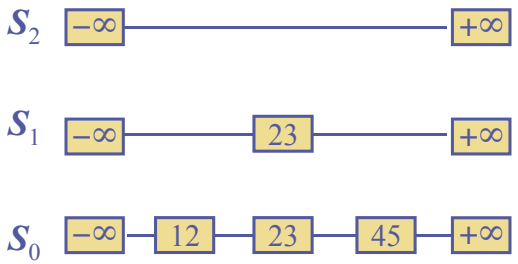
successeurs(k): successors(k):	Retourne un itérateur des entrées dont la clé est plus grande ou égale à k; en ordre croissant
prédécesseurs(k): predecessors(k):	Retourne un itérateur des entrées dont la clé est plus petite ou égale à k; en ordre décroissant
closestKeyBefore(k): closestValBefore(k):	Retourne la clé (ou la valeur) de l'entrée ayant la plus grande clé plus petite ou égale à k
closestKeyAfter(k): closestValAfter(k):	Retourne la clé (ou la valeur) de l'entrée ayant la plus petite clé plus grande ou égale à k

Implémentations Dictionnaires ordonnés:

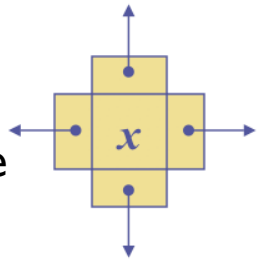
- "Look-up table"

  - Complexité en temps:
    - insérer $O(n)$ enlever $O(n)$ trouver $O(\log n)$: recherche binaire
  - Complexité en espace: $O(n)$

- "Skip List"

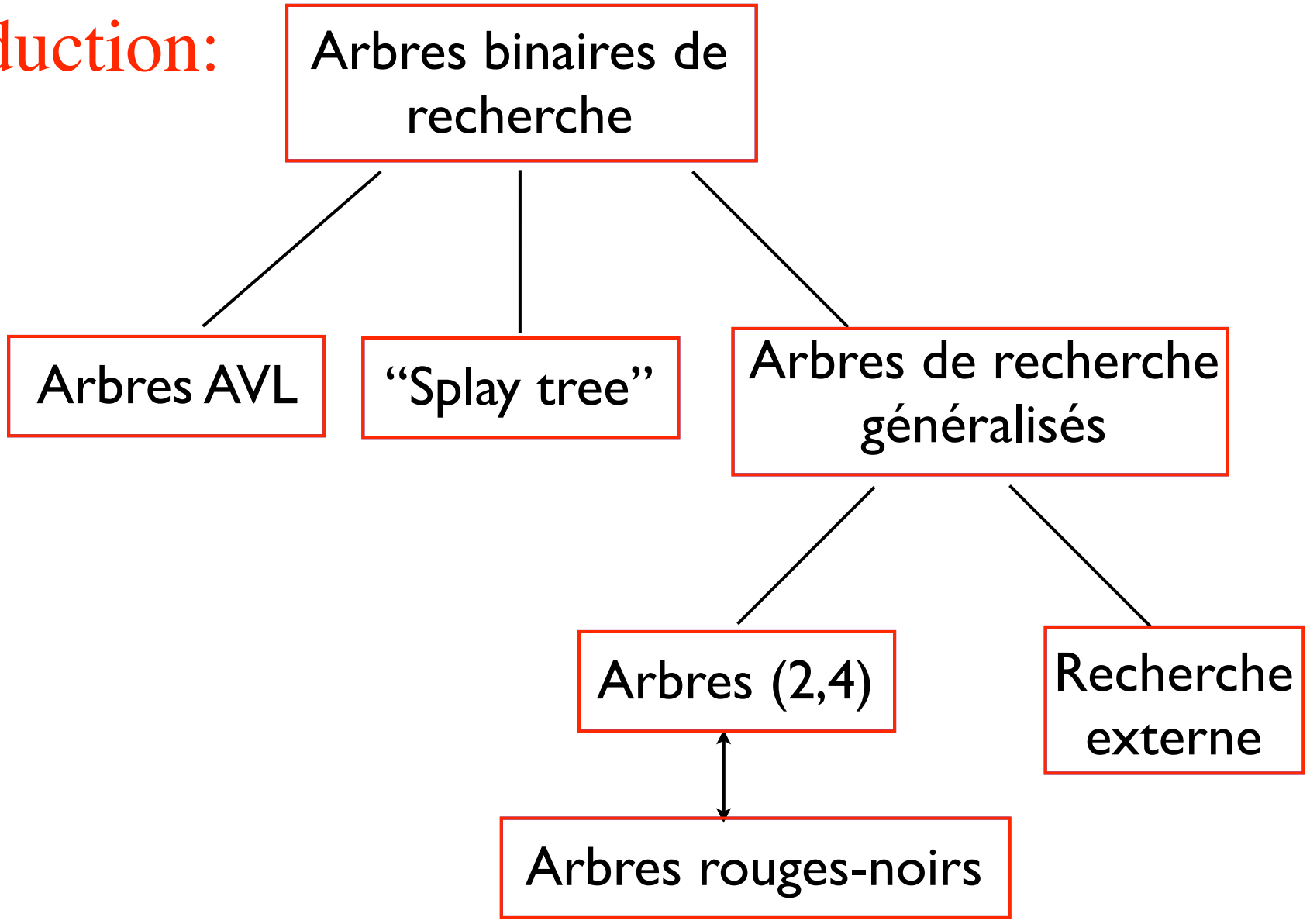


  - Une "skip list" est une structure de données pour les dictionnaires qui utilise un algorithme randomisé pour l'insertion d'éléments
  - L'implémentation d'une skip list se fait à l'aide d'une structure chaînée, composée de noeuds quadruples:



  - On a avec une très haute probabilité les complexités suivantes:
    - insérer $O(\log n)$
    - enlever $O(\log n)$
    - trouver $O(\log n)$
  - Complexité en espace: $O(n)$

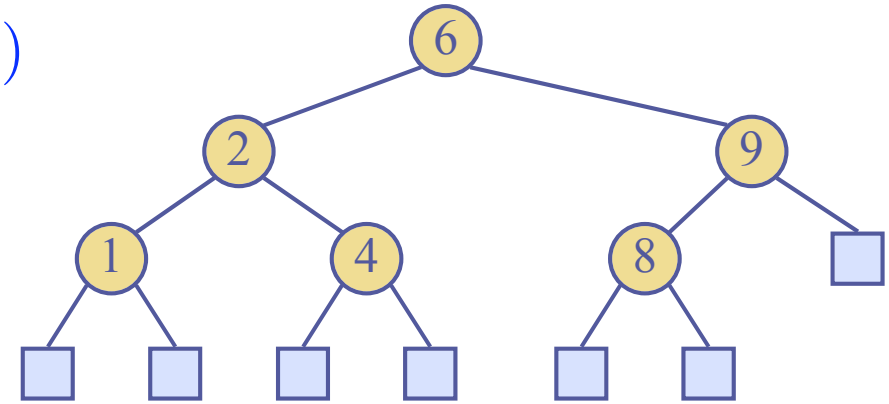
Introduction:



Arbres binaires de recherche

- Un arbre binaire de recherche est un arbre binaire qui garde en mémoire des entrées (clé-valeur) dans ses noeuds internes et qui satisfait la propriété suivante:
  - Soient u, v et w trois noeuds tels que u est dans le sous-arbre gauche de v et w dans son sous-arbre droit. Alors, on a

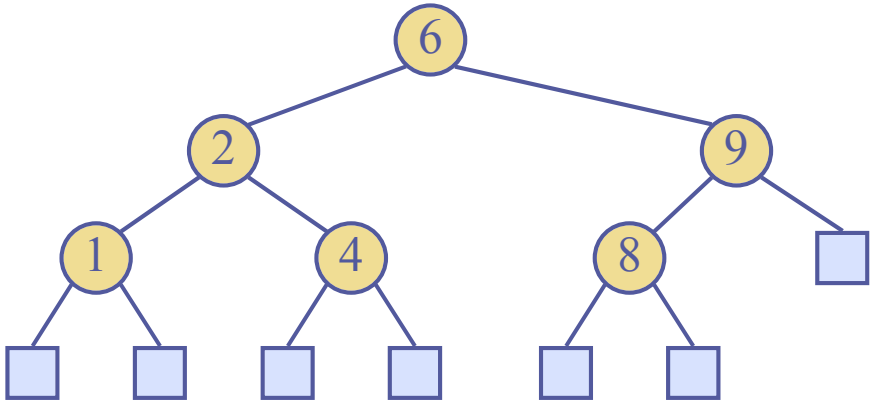
$$\text{clé}(u) < \text{clé}(v) \leq \text{clé}(w)$$

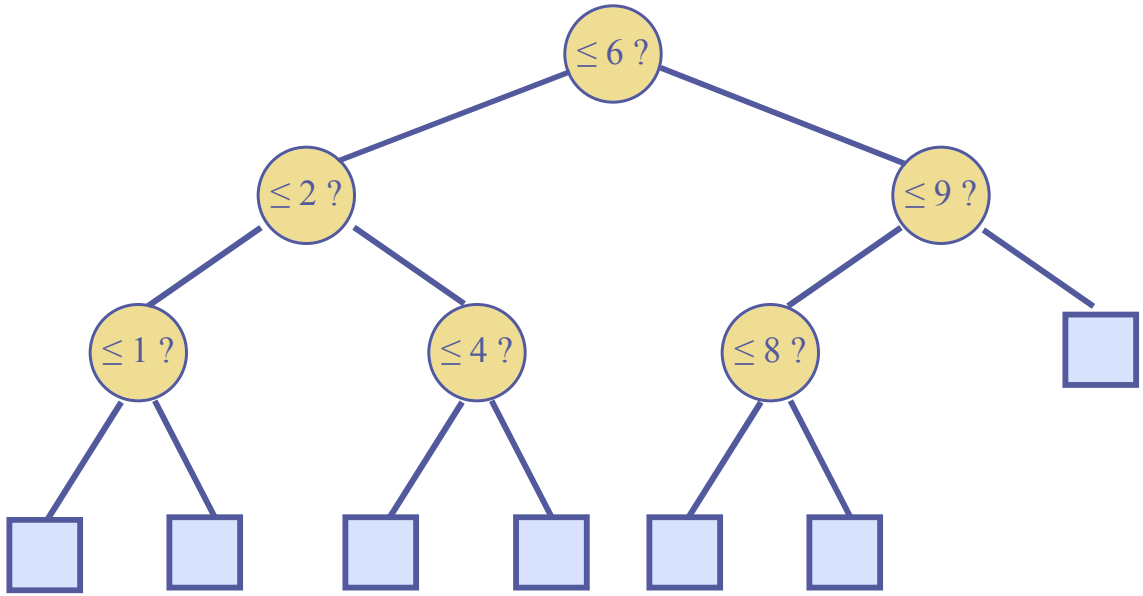


- Les noeuds externes ne gardent en mémoire aucune entrée
- Un parcours symétrique de l'arbre visite les clés en ordre croissant

Chercher dans un arbre binaire de recherche

L'idée:





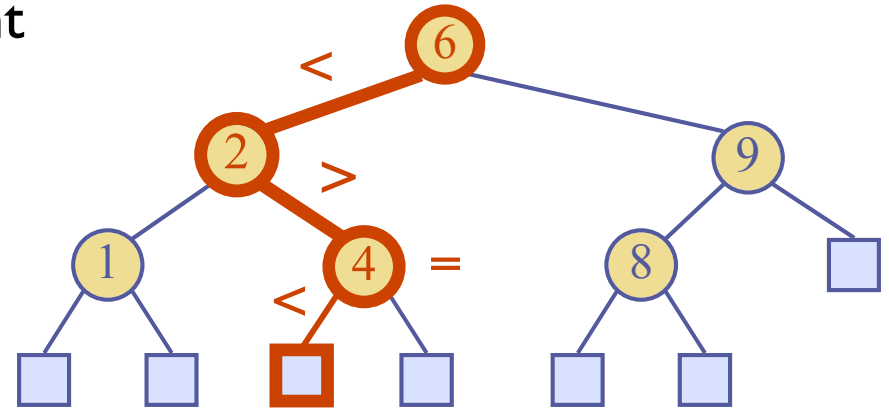
Chercher dans un arbre binaire de recherche

- Pour chercher un élément de clé k dans un arbre binaire de recherche, on va suivre un chemin descendant en commençant la recherche à la racine.
- Exemple 1: Chercher(4)

- Le prochain noeud visité dépend du résultat de la comparaison de k avec la clé du noeud dans lequel on se trouve.

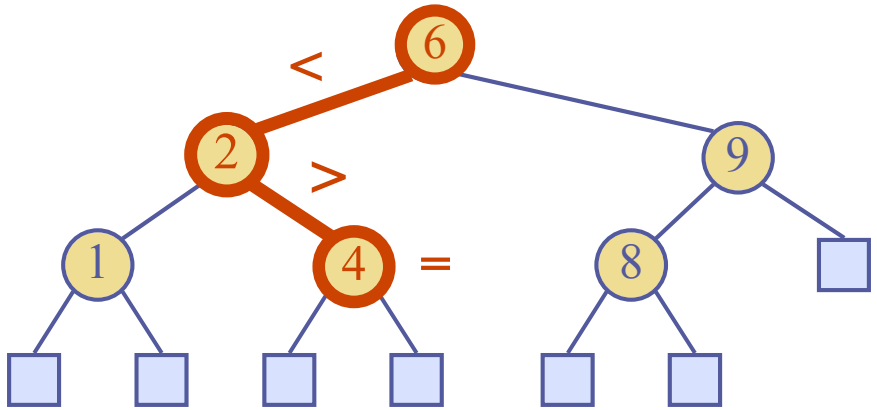
- Si on trouve un noeud interne de clé k, on retourne la valeur correspondant à cette entrée de clé k

- Sinon, on retourne NULL
  - Exemple 1: Chercher(3)



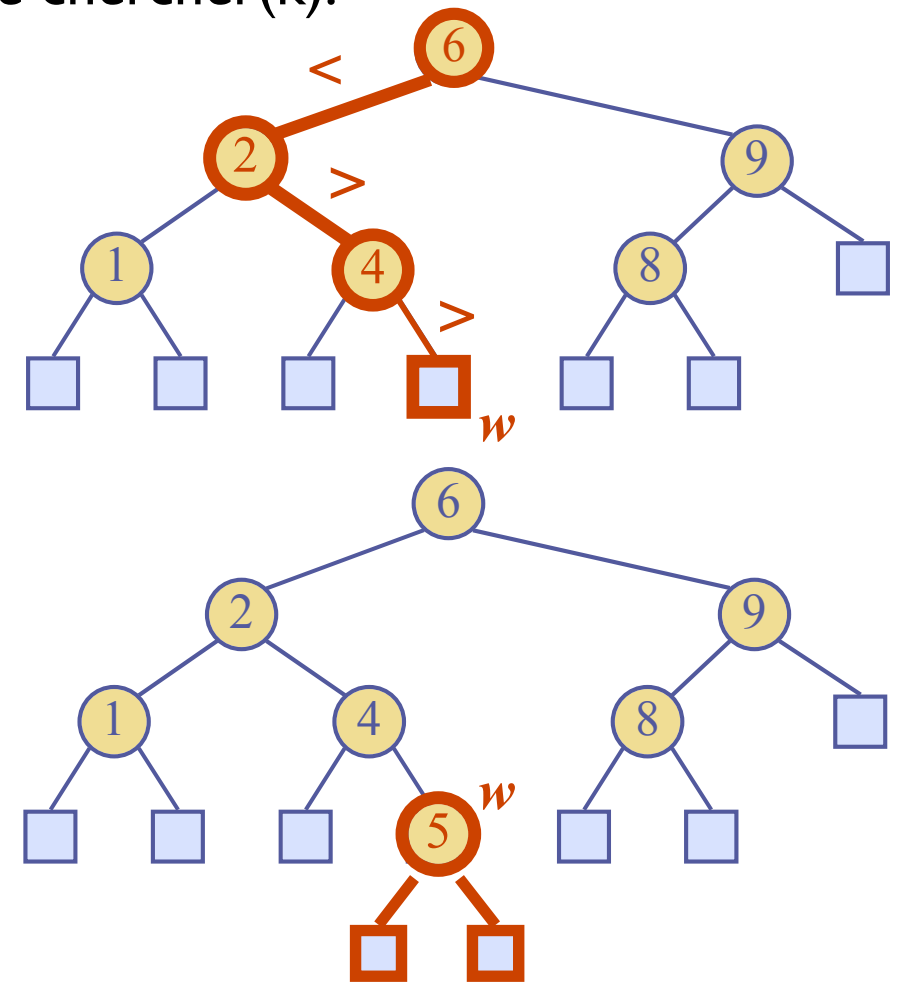
Analyse de la recherche dans le pire des cas

- L'algorithme de recherche dans un arbre binaire est récursif et exécute un nombre constant d'opérations élémentaires à chaque appel
- Chaque appel récursif est exécuté sur un enfant du noeud courant et donc, à chaque appel récursif, on descend d'un niveau dans l'arbre
- Dans le pire des cas, on fera h+1 appels de la fonction.
- La complexité dans le pire des cas est O(h)



Insérer dans un arbre binaire de recherche

- Pour insérer un élément (k,v) dans un arbre binaire de recherche, on commence par exécuter l'algorithme chercher(k).
- Exemple 1: Insérer(5,v)
- Si k n'est pas dans l'arbre l'algorithme chercher(k) se terminera dans une feuille *w*
- On insère k dans *w* et on change *w* en un noeud interne

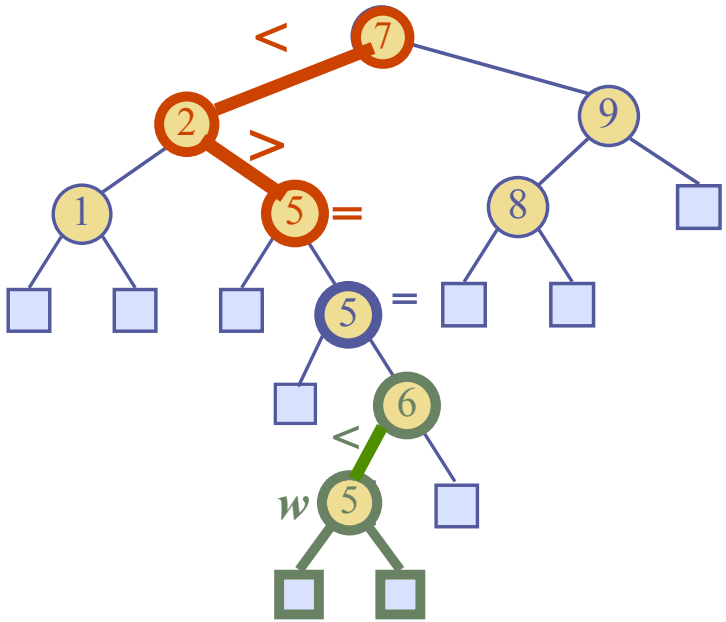


Insérer dans un arbre binaire de recherche

- Si k est dans l'arbre l'algorithme chercher(k) se terminera sur un noeud interne v. On appelle récursivement l'algorithme sur le filsDroit(v), jusqu'à ce qu'on arrive à un noeud externe w

- Exemple 2: Insérer(5,v)

- On insère k dans w et on change w en un noeud interne



Supprimer dans un arbre binaire de recherche

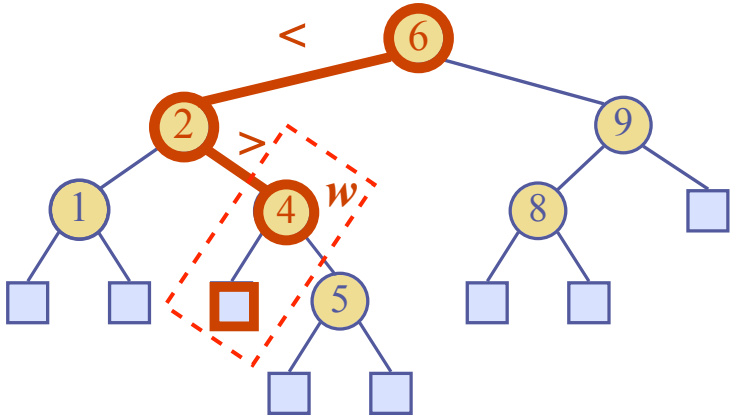
- Pour enlever un élément de clé k dans un arbre binaire de recherche, on commence par exécuter l'algorithme chercher(k).

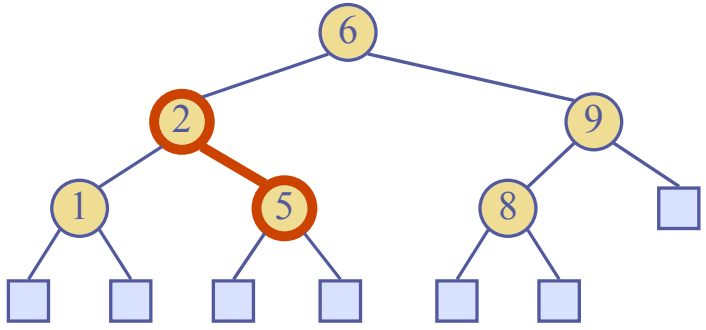
- Exemple 1: Enlever(4)

- Si k est dans l'arbre l'algorithme chercher(k) se terminera dans un noeud interne w

- Si l'un des enfant de w est une feuille, on enlève cette feuille et w

- Sinon...

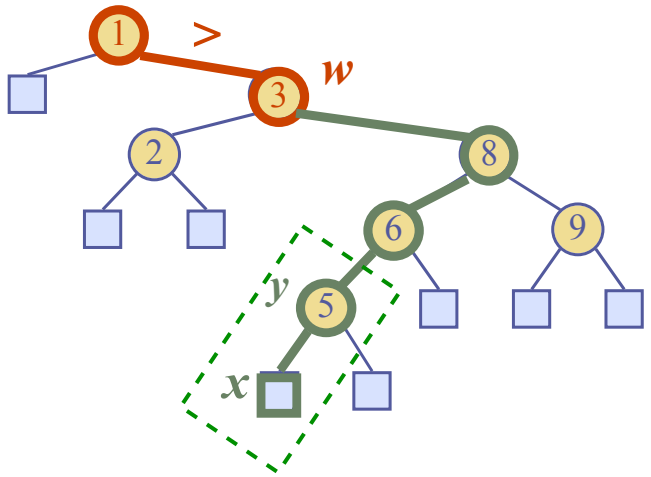


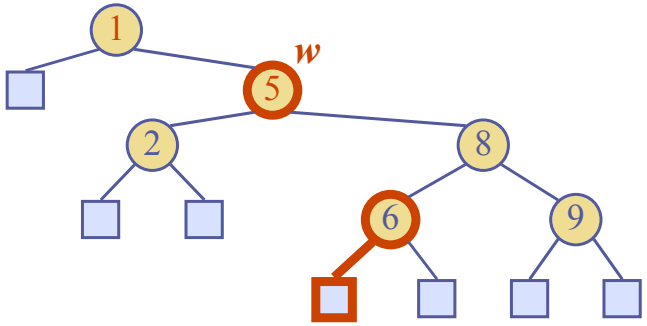


Supprimer dans un arbre binaire de recherche (suite)

- Si k est dans l'arbre, l'algorithme chercher(k) se terminera dans un noeud interne w. Si les fils de w sont tous les deux des noeuds internes alors

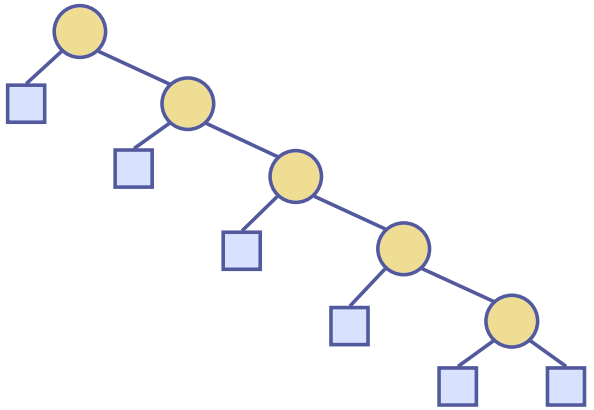
- Exemple 2: Enlever(3)
  - On trouve le noeud interne y qui suit w lors d'un parcours symétrique de l'arbre et son fils gauche x
  - On enlève l'entrée dans w et on la remplace par l'entrée dans y
  - On enlève les noeuds y et x





Performance:

- Considérons un dictionnaire ordonné avec n entrées implémenté à l'aide d'un arbre ordonné de hauteur h
  - L'espace utilisé est en O(n)
  - Les opérations d'insertion, de recherche et de suppressions se font en O(h)



- La hauteur h est O(n) dans le pire des cas et O(log n) dans le meilleur cas