

IFT2125: Introduction à l'algorithmique

Exercices pour les travaux pratiques

Notation asymptotique, notation asymptotique conditionnelle et règle de la limite

1. Démontrez qu'il existe $f(n)$ telle que $f(cn) \notin \Theta(f(n))$.
2. **Problème 3.27, p.96, livre Brassard-Bratley:** Étant donnée une fonction b -lisse $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$. Soit c et n_0 des constantes telles que $f(bn) \leq cf(n), \forall n \geq n_0$. Étant donné i un entier positif, démontrez par récurrence que $f(b^i n) \leq c^i f(n), \forall n \geq n_0$.
3. **Problème 3.28, p.96, livre Brassard-Bratley:** Étant donné la fonction $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ définit récursivement par:

$$t(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ 4t(\lceil n/2 \rceil) + bn & \text{sinon} \end{cases}$$

où a et b sont des constantes positives arbitraires. Démontrez par récurrence que $t(n)$ est une fonction éventuellement non décroissante.

4. En utilisant la règle de la limite, déterminer l'ordre relatif des fonctions suivantes:
 - a) $f(n) = n \log^2 n$ et $g(n) = n \log(n^2)$
 - b) $f(n) = n!$ et $g(n) = (n+1)!$
 - c) $f(n) = \log(n!)$ et $g(n) = n^{\log n}$
 - d) $f(n) = \log n$ et $g(n) = n^a$ pour $a > 0$
 - e) $f(n) = 4 \lceil \log_2 n \rceil$ et $g(n) = n$
5. Utilisez les relations " \subset " et " $=$ " pour mettre les ordres des fonctions suivantes en une séquence (du plus petit ordre au plus grand). Utilisez la règle de la limite pour justifier vos réponses.

$$n \log^2 n \quad n! \quad (n+1)! \quad \log(n!) \quad n^2 / \log n \quad n \log(n^2)$$

6. Même question que 5. avec les fonctions suivantes où $a > 1, a \in \mathbb{N}$

$$n^{\log n} \quad \log n \quad n^a \quad n \quad 1/n \quad \sqrt{n}$$