

Arbre couvrant minimal d'un graphe

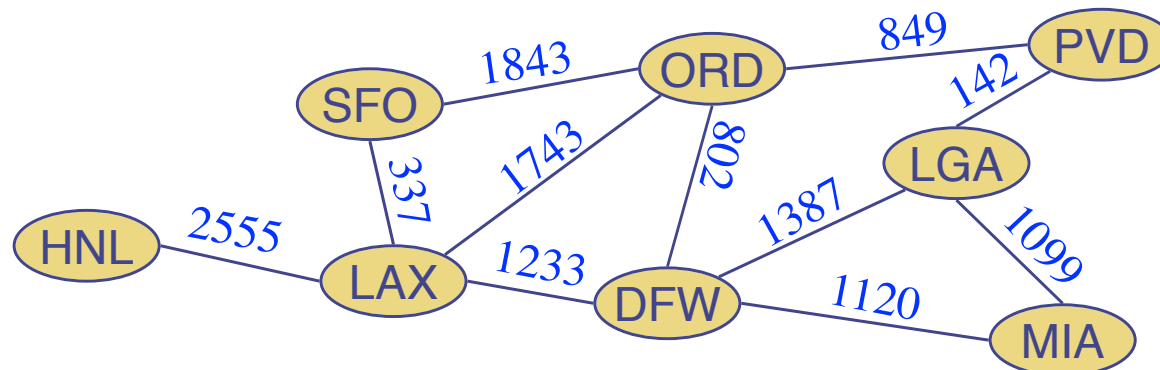
Graphes

○ Un graphe est une paire (N,A) , où

- N est un ensemble de **noeuds** (appelés sommets)
- A est un multi-ensemble de paires de sommets appelées **arêtes**

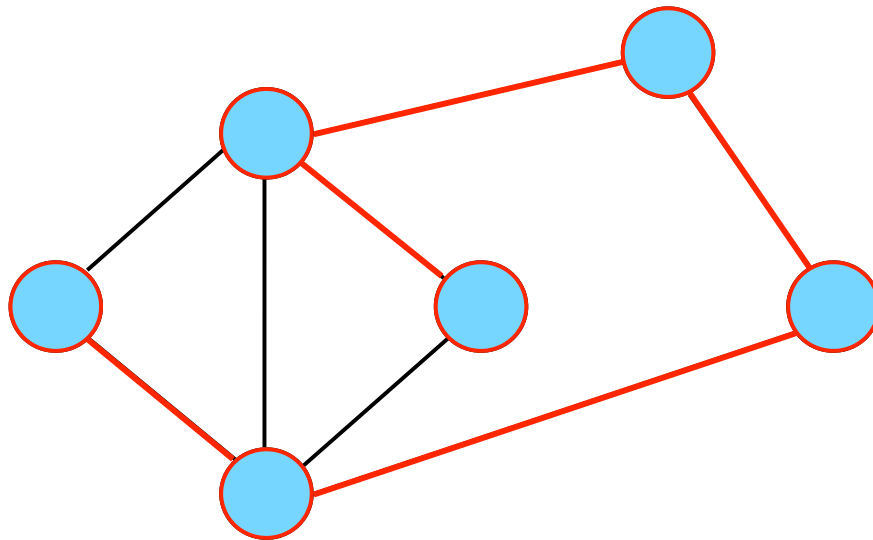
○ Exemple:

- Chaque sommet représente un aéroport et garde en mémoire le code de 3 lettres représentant cet aéroport
- Chaque arête représente une route aérienne entre deux villes et garde en mémoire le longueur de cette route



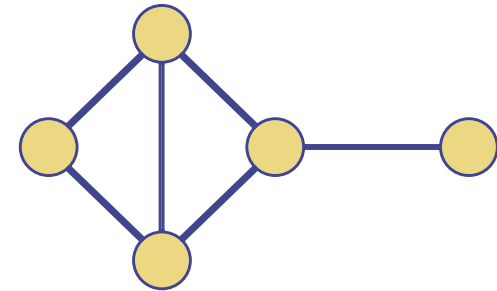
Quelques définitions

- Un **sous-graphe** S d'un graphe G est un graphe tel que:
 - ▣ Les sommets de S forment un sous-ensemble des sommets de G
 - ▣ Les arêtes de S forment un sous-ensemble des arêtes de G
 - ▣ Un sous-graphe est dit **couvrant** (spanning) s'il contient tous les sommets de G



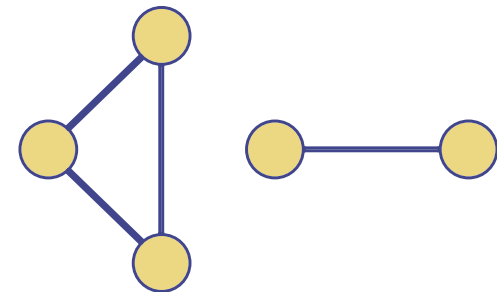
Quelques définitions (suite)

- Un graphe G est dit **connexe** s'il existe un chemin reliant chaque pair de sommets de G



© Goodrich et Tamassia 2004

- Une **composante connexe** d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximal de G

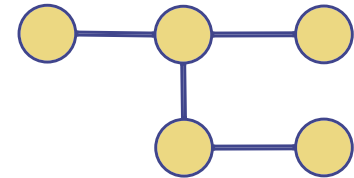


© Goodrich et Tamassia 2004

Quelques définitions (suite)

● Un **arbre** A (non raciné) est un graphe non orienté tel que

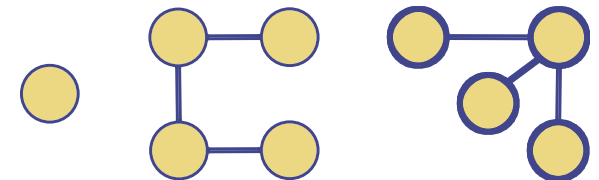
- A est connexe
- A ne contient pas de cycles



© Goodrich et Tamassia 2004

● Une **forêt** est un graphe non orienté ne contenant pas de cycles

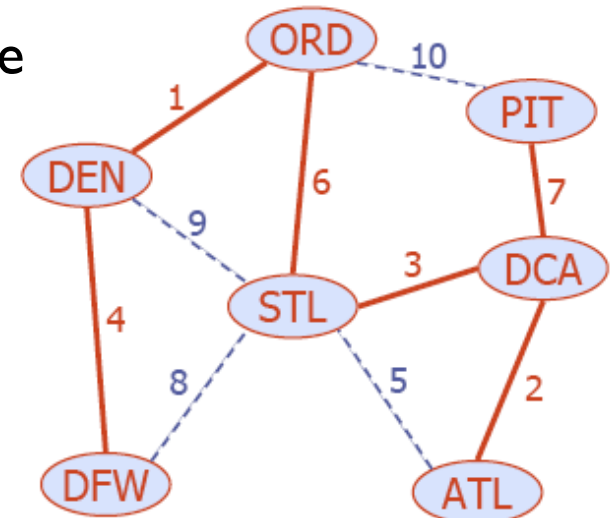
- Les composantes connexes d'une forêt sont donc des arbres



© Goodrich et Tamassia 2004

Arbre couvrant minimal:

- Un arbre couvrant d'un graphe est un sous-graphe couvrant qui est un arbre
- Arbre couvrant minimal (minimum spanning tree):
 - Arbre couvrant d'un graphe avec poids dont le poids total des arêtes est minimal



Propriété de cycles des ACM:

● Propriété de cycles:

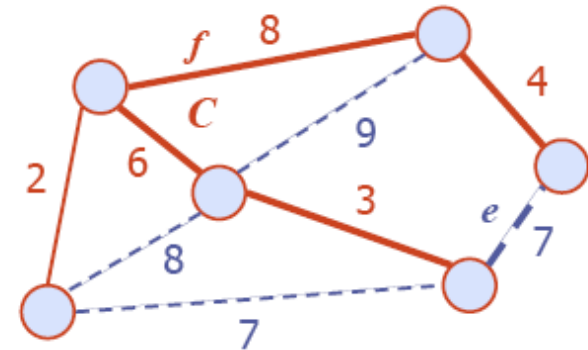
- Soit T un arbre couvrant d'un graphe avec poids G
- Soit e une arête de G n'appartenant pas à T et soit C , le cycle obtenu lorsqu'on ajoute e à T
- Si T est minimal, alors on a que pour toutes arêtes f dans C :

$$\text{poids}(f) \leq \text{poids}(e)$$

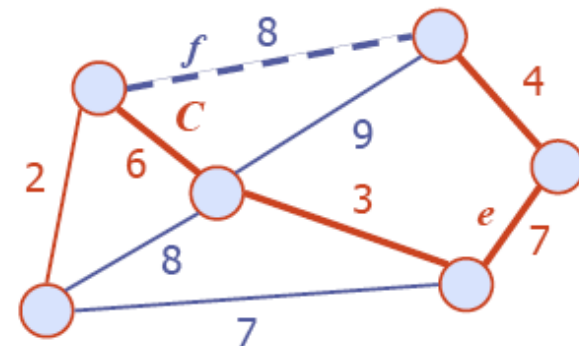
● Preuve:

- Par contradiction.

Si $\text{poids}(f) > \text{poids}(e)$, on obtient un arbre couvrant de plus petit poids en remplaçant l'arête f par l'arête e dans notre arbre T



Remplacer f par e nous donne un arbre couvrant de plus petit poids total ...



Propriété de partition des ACM:

● Propriété de partition:

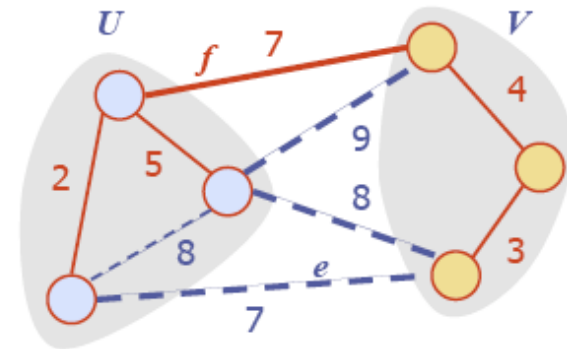
- Considérons une partition des sommets de G en deux ensembles U et V
- Soit e une arête de poids minimal entre U et V
- Alors, il existe un arbre couvrant minimal de G contenant e

● Preuve:

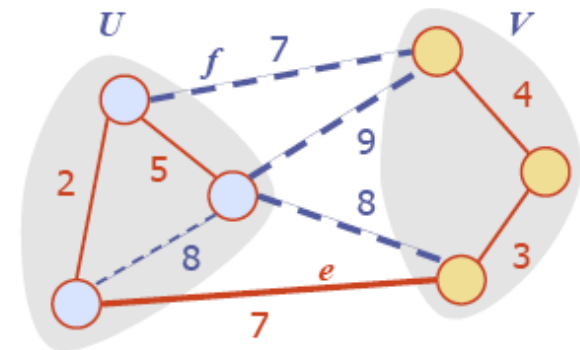
- Soit T un arbre couvrant minimal de G
- Si T ne contient pas e , soit C le cycle formé par l'addition de e à l'arbre T et soit f , une arête entre U et V
- Par la propriété de cycles, on a que

$$\text{poids}(f) \leq \text{poids}(e)$$

- Comme on avait pris e de poids minimal, on a que $\text{poids}(f) = \text{poids}(e)$ et alors on obtient un autre ACM en remplaçant f par e



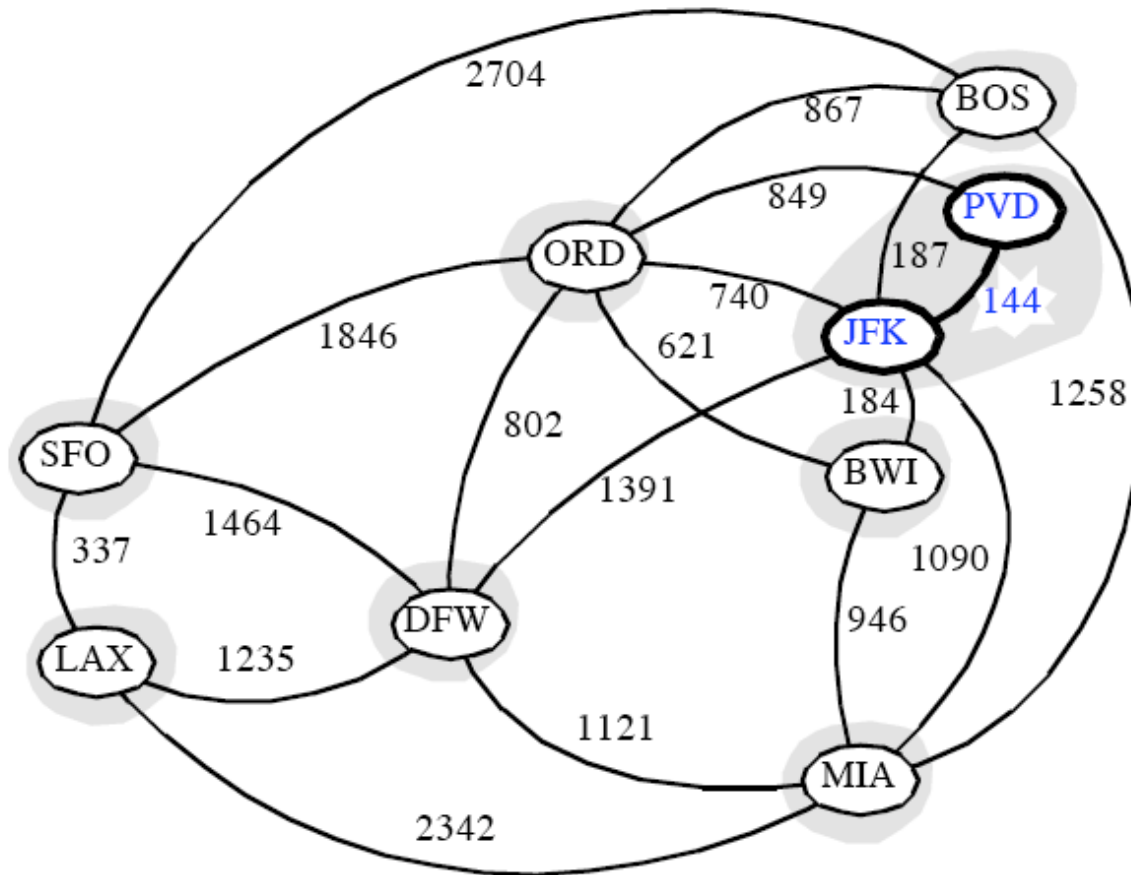
⇓
Remplacer f par e nous donne un autre ACM



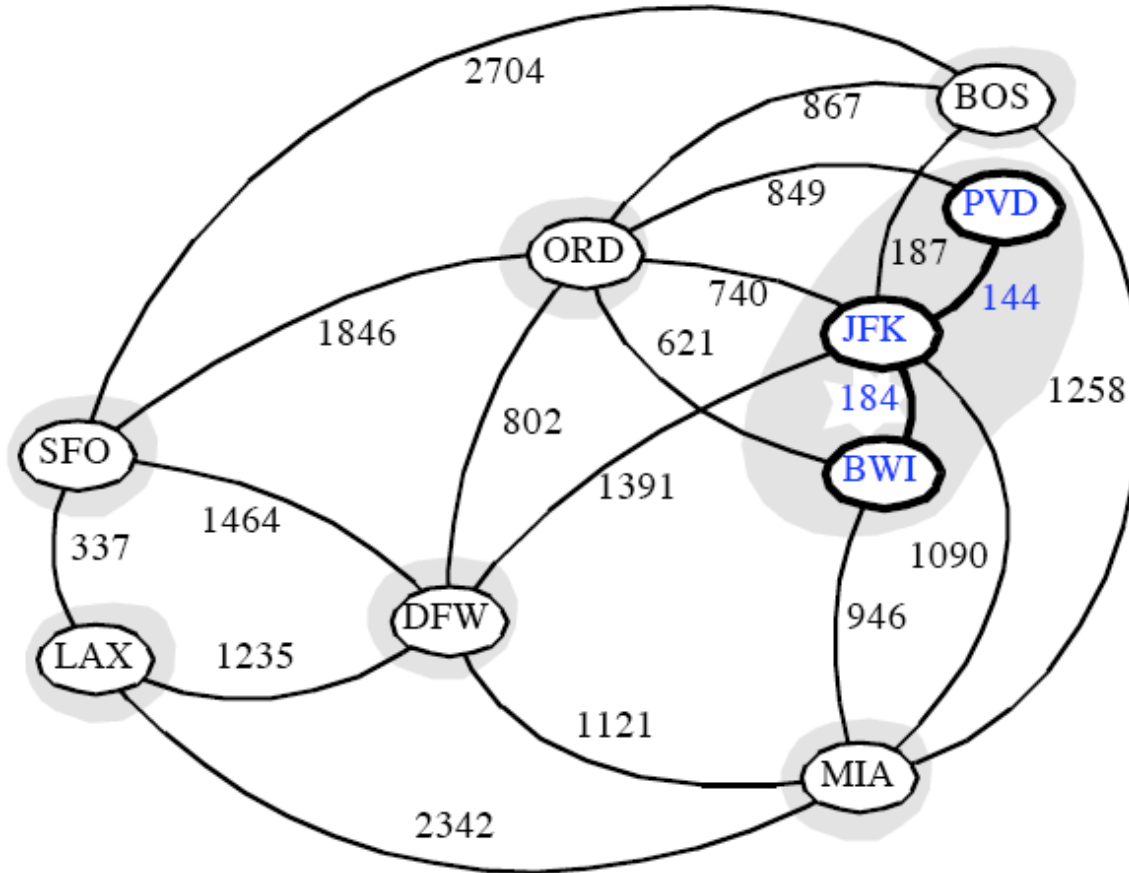
Algorithme Kruskal:

- L'algorithme maintient une forêt d'arbres
- À chaque itération, on choisit l'arête de coût minimal
- Cette arête est acceptée, si elle relie deux arbres distincts, sinon elle est rejetée (pourrait former un cycle)
- L'algorithme se termine lorsqu'on a un seul arbre

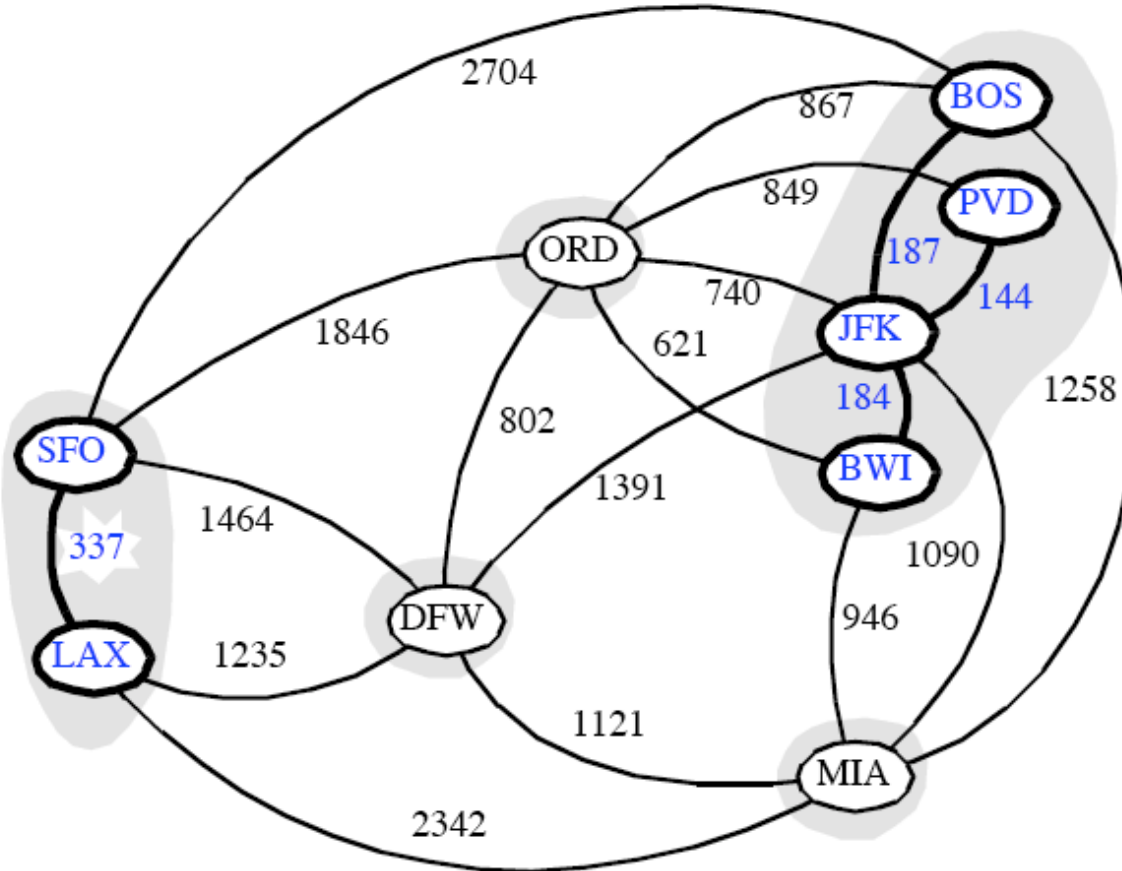
Exemple de Kruskal:



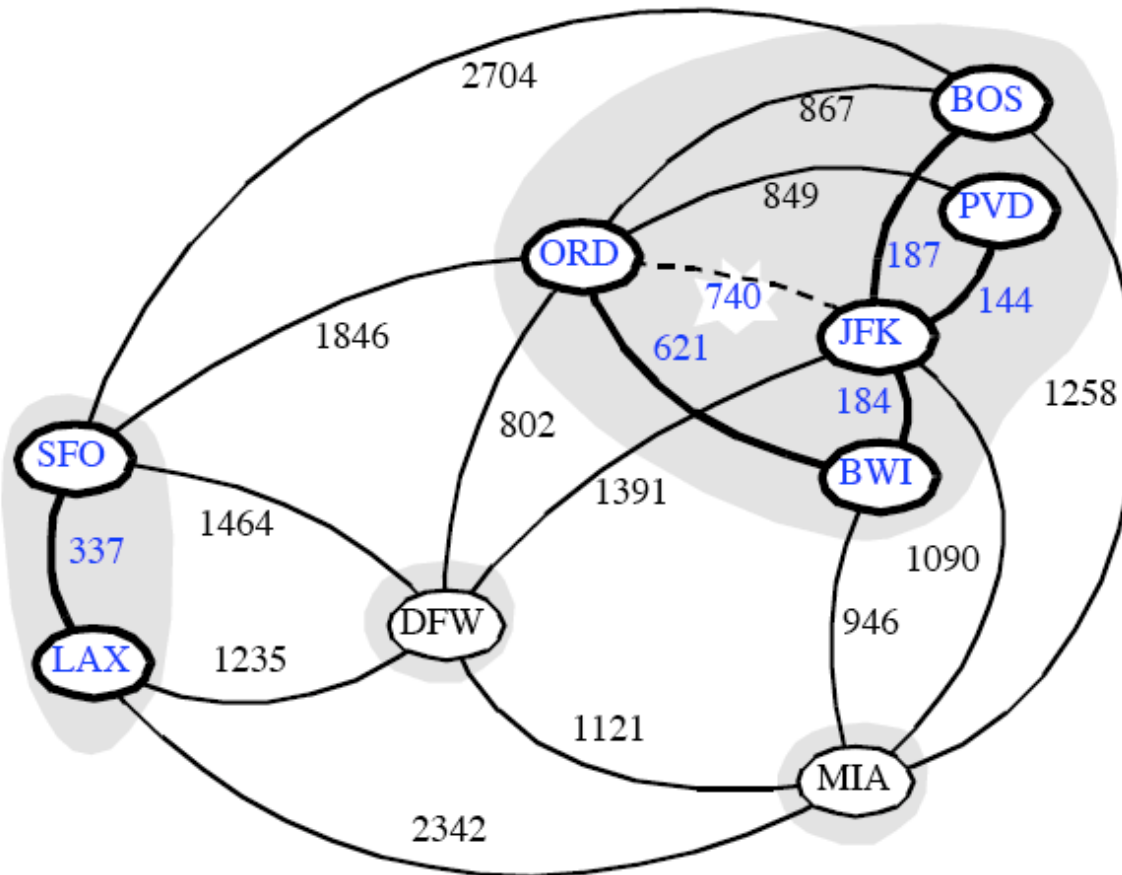
Exemple de Kruskal:



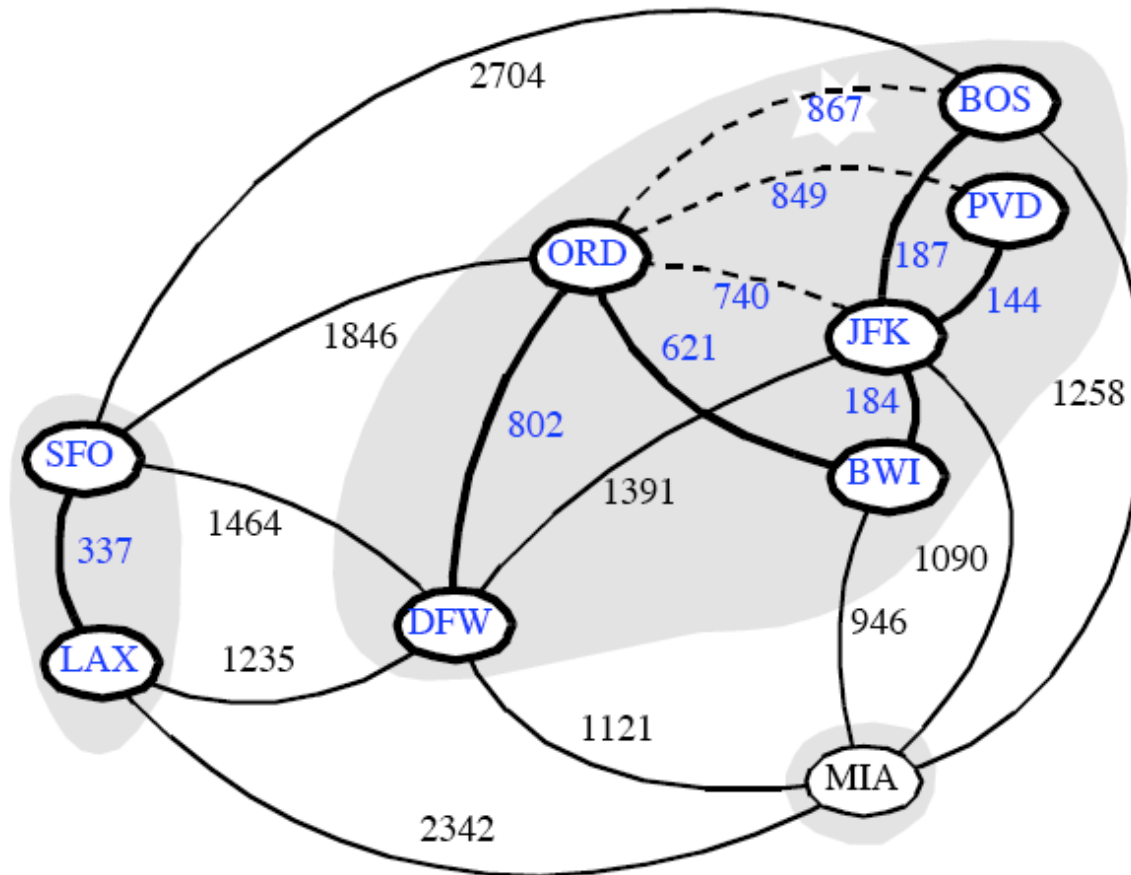
Exemple de Kruskal:



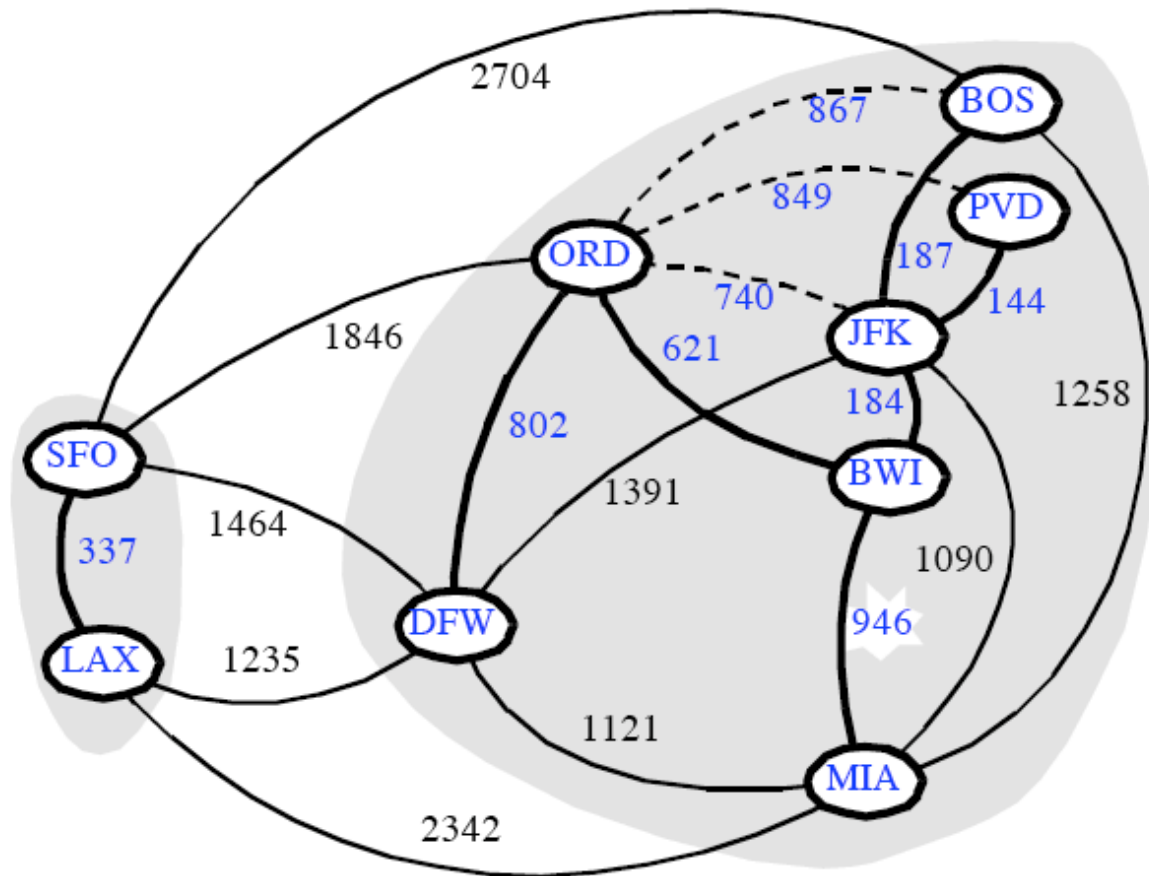
Exemple de Kruskal:



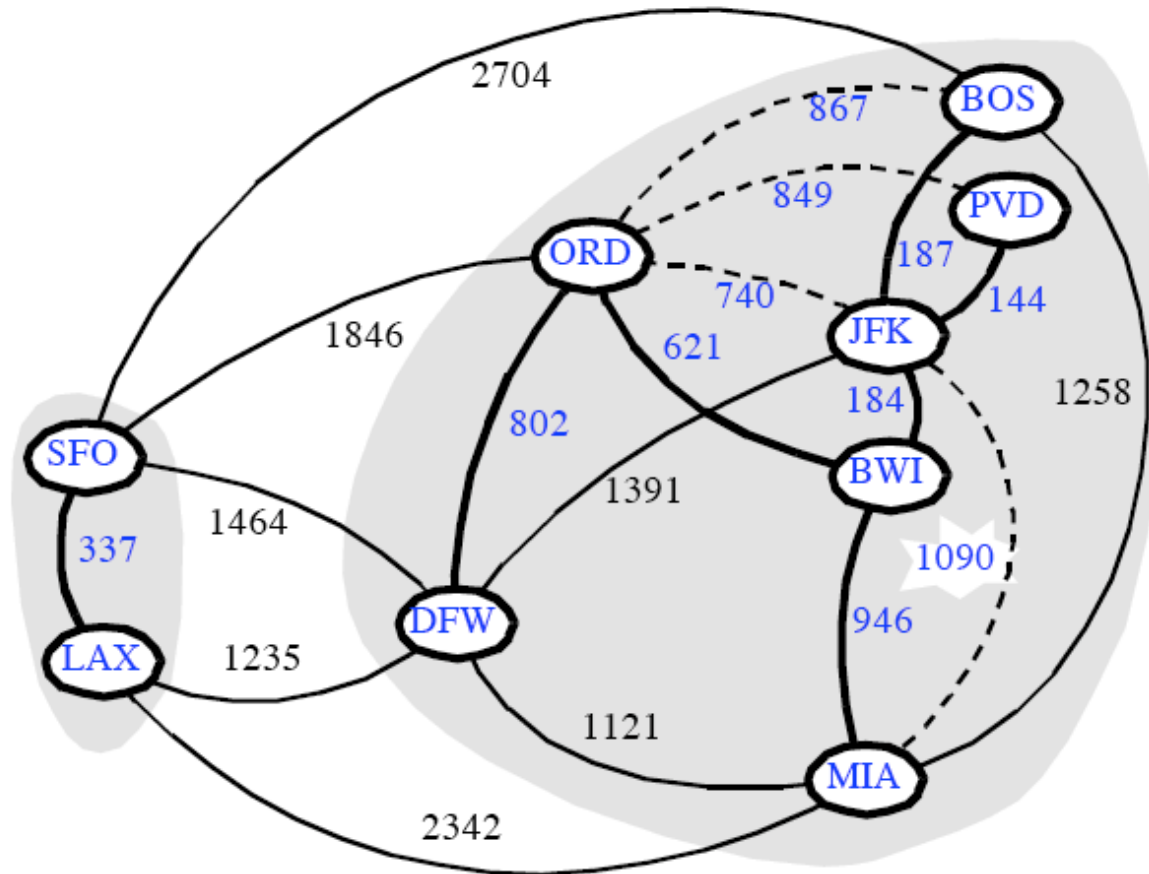
Exemple de Kruskal:



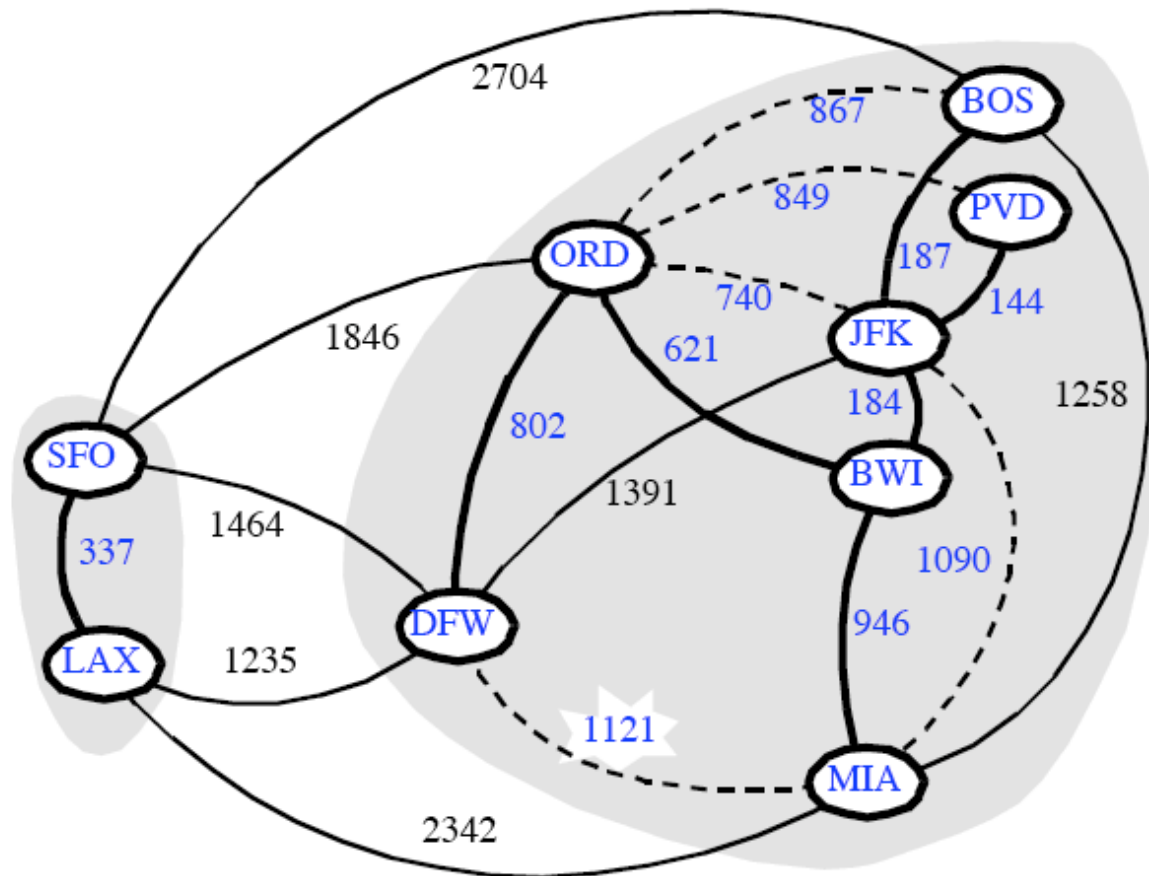
Exemple de Kruskal:



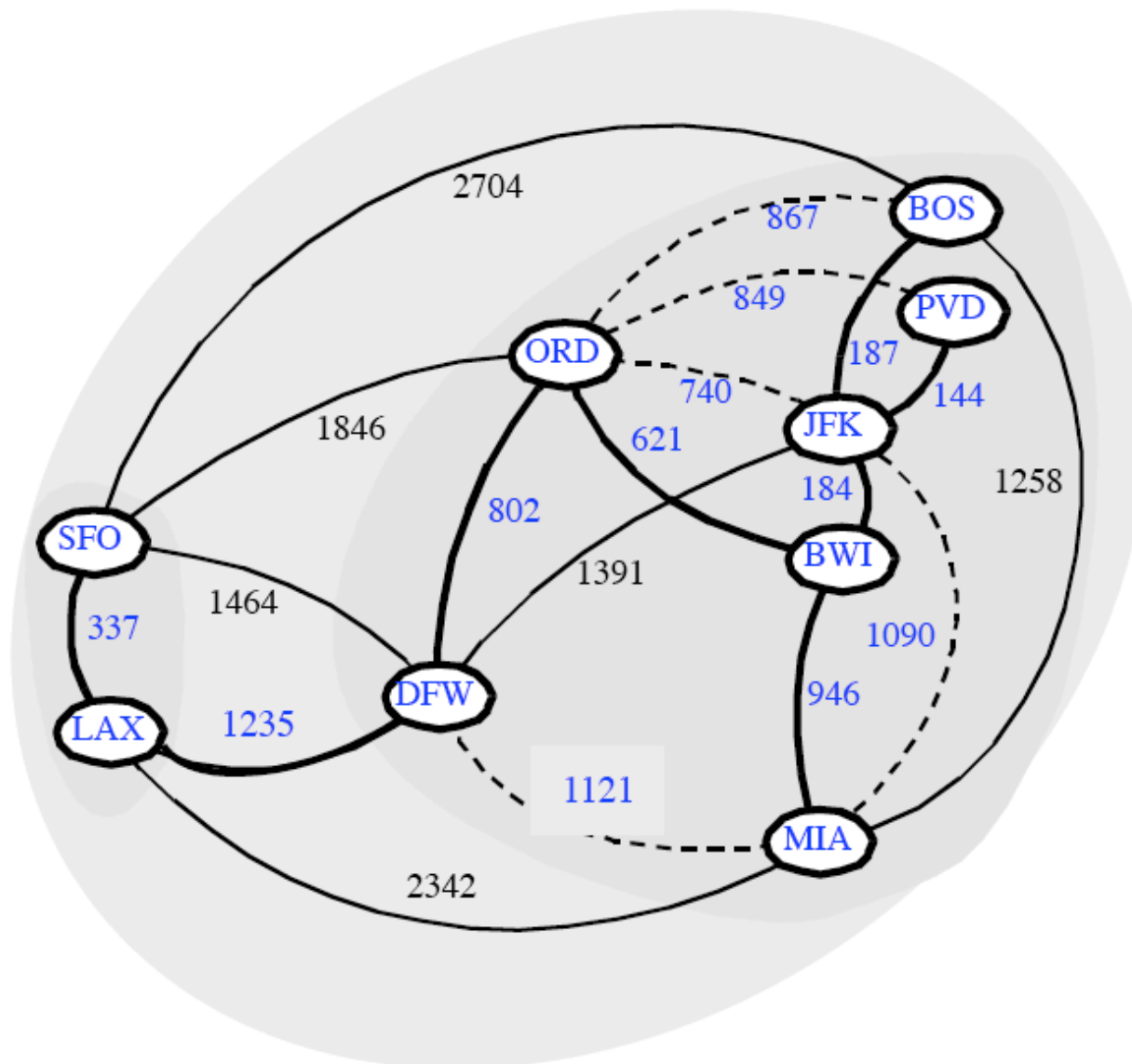
Exemple de Kruskal:



Exemple de Kruskal:



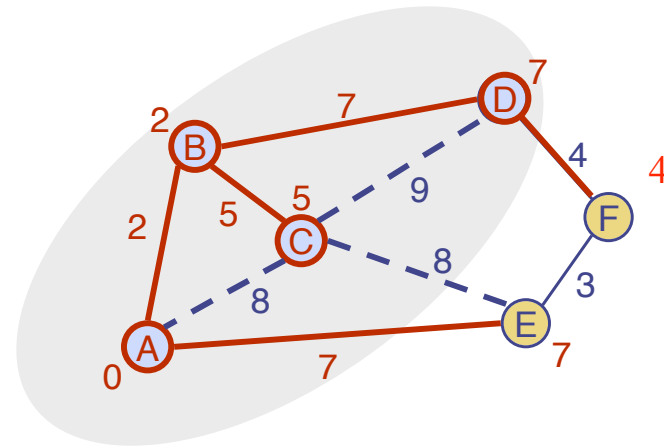
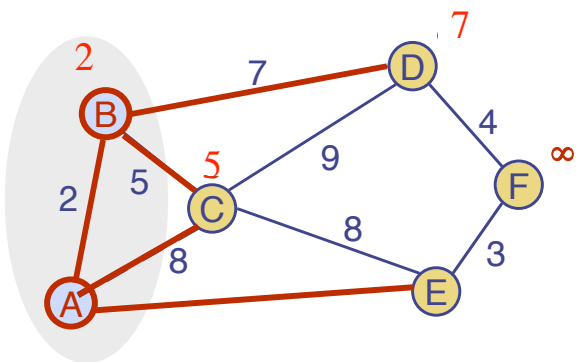
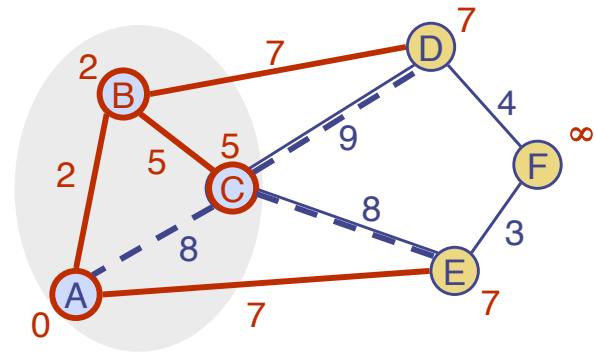
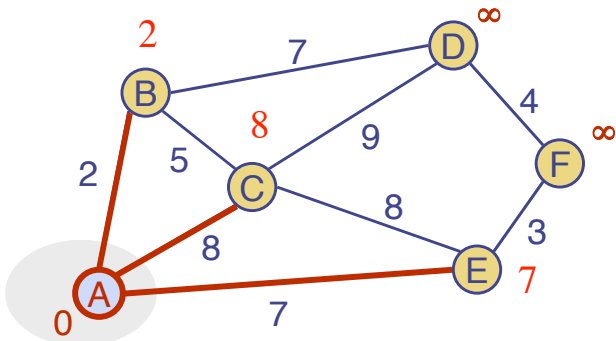
Exemple de Kruskal:



Algorithme de Prim

- On choisit un sommet s aléatoirement qu'on met dans un “nuage” et on construit l'arbre couvrant minimal en faisant grossir le “nuage” d'un sommet à la fois.
- On garde en mémoire à chaque sommet v , une étiquette $d(v)$ qui ici est égale au poids minimal parmi les poids des arêtes reliant v à un sommet à l'intérieur du nuage.
- À chaque étape:
 - ▣ On ajoute au nuage le sommet u extérieur ayant la plus petite étiquette $d(u)$
 - ▣ On met à jour les étiquettes des sommets adjacents à u

Exemple:



Exemple (suite)

