Rappels:

2) Notation asymptotique

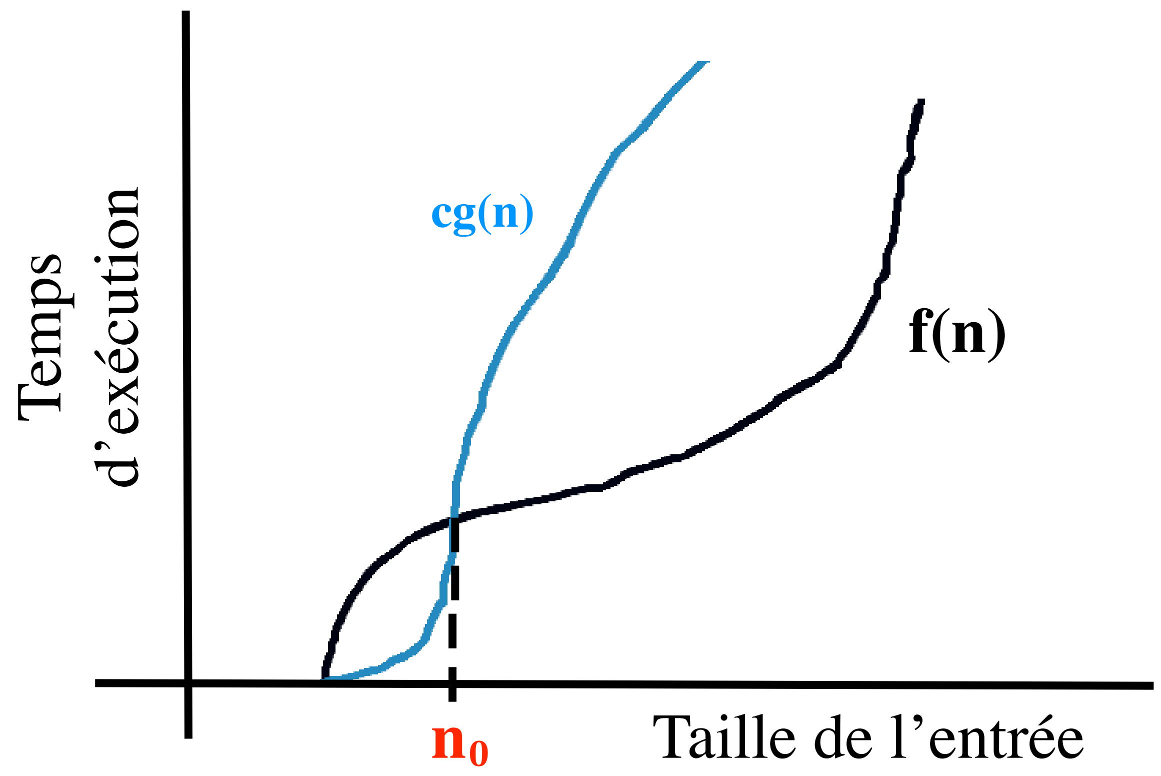
Notation Grand O (§2.4)

Étant donné des fonctions $f(n)$ et $g(n)$, on dit que

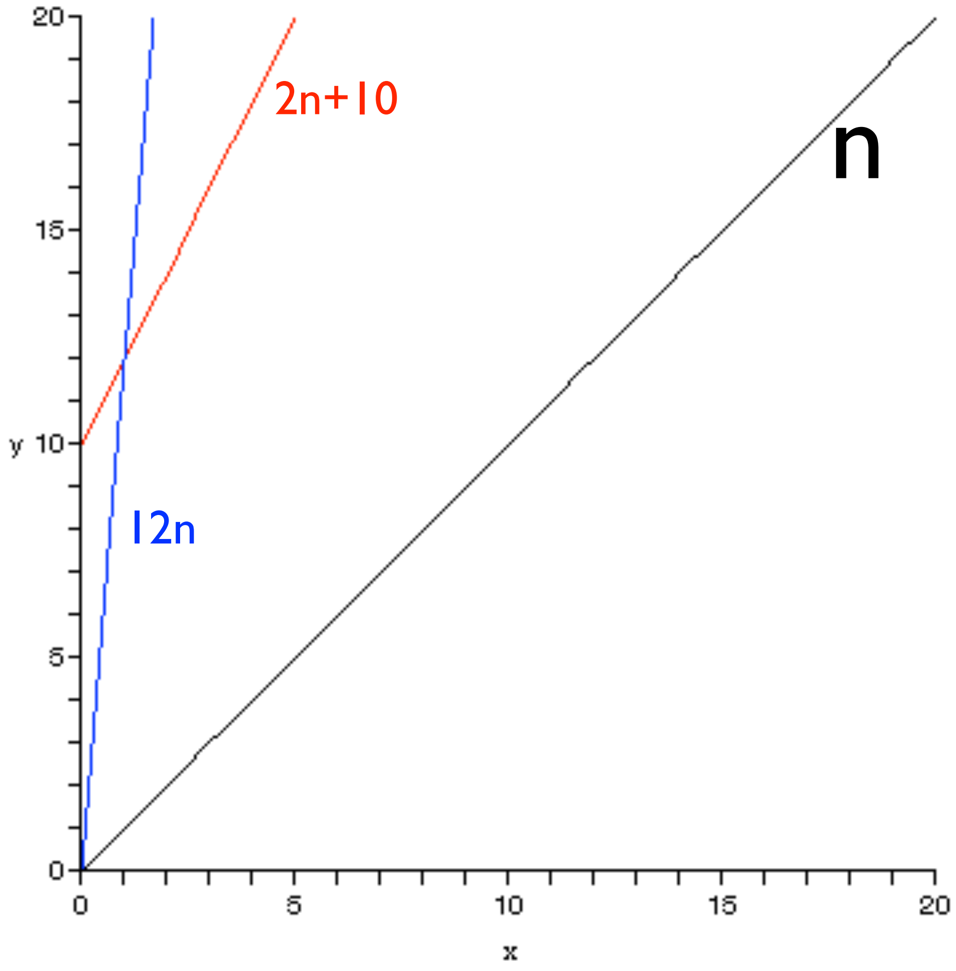
$f(n)$ est $\mathcal{O}(g(n))$

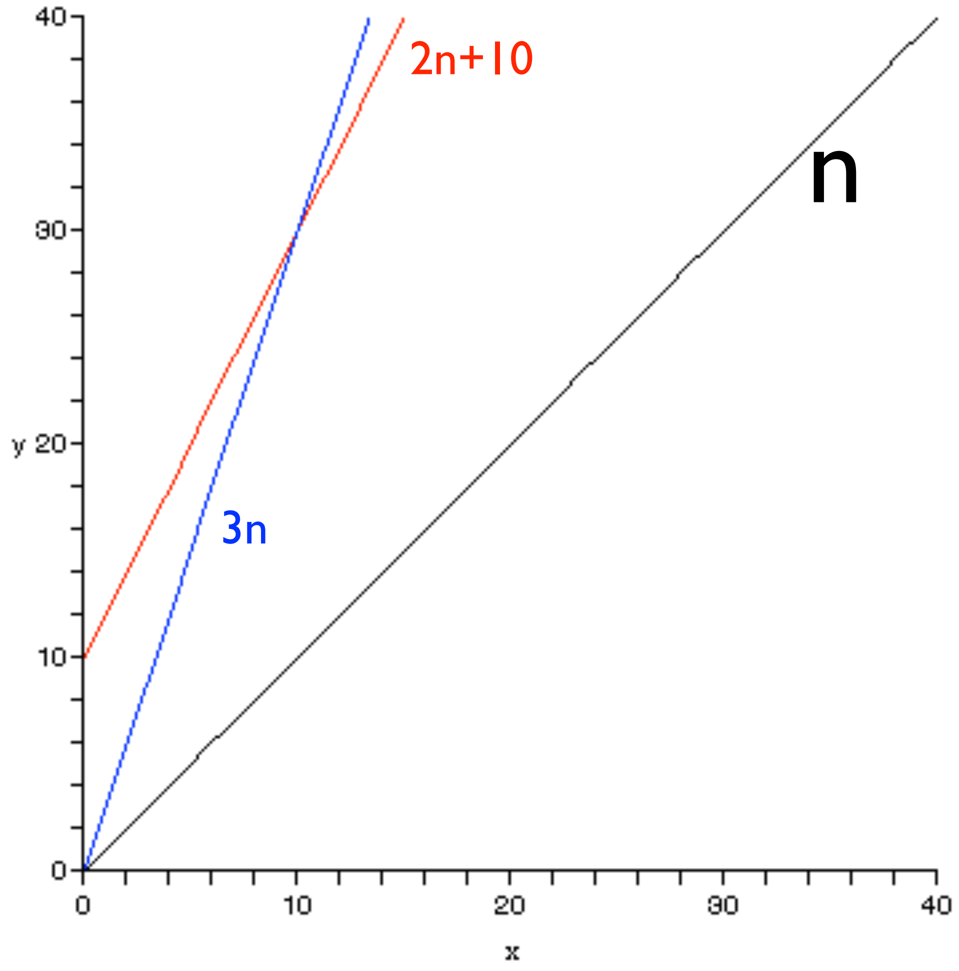
s'il existe des constantes $c > 0$ et $n_0 \geq 1$ telles que

$$f(n) \leq cg(n) \qquad \forall n, \ n \geq n_0$$

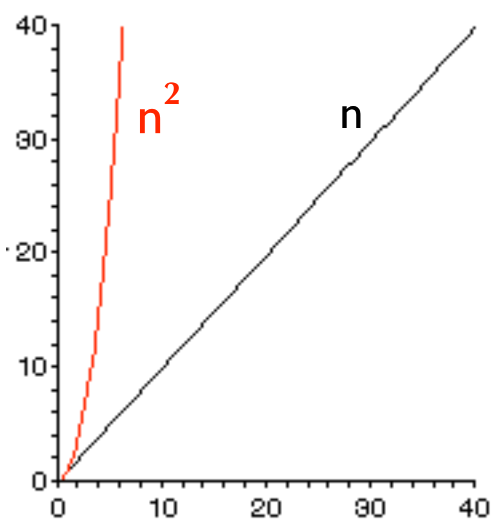


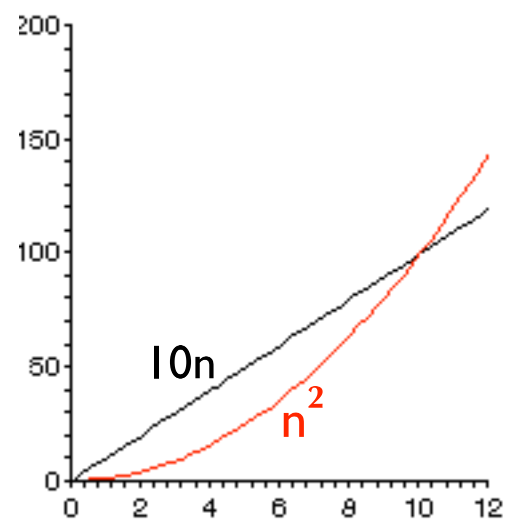
Exemple 1 : 2n + 10 est O(n)

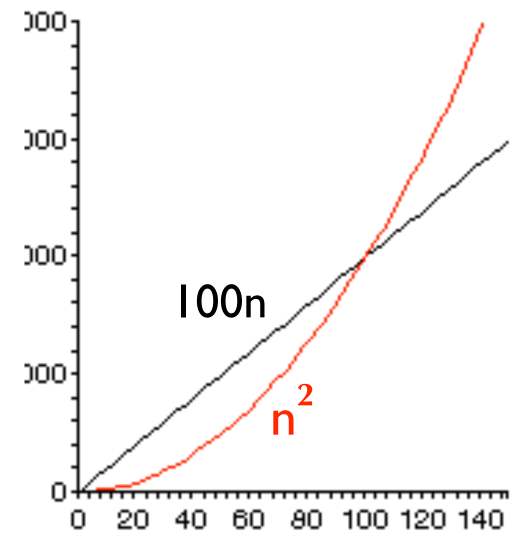




Exemple 2 : n^2 n'est pas $O(n)$







n=10

$10n = n^2 = 100$

n=11

$10n = 110$

$n^2 = 121$

n=100

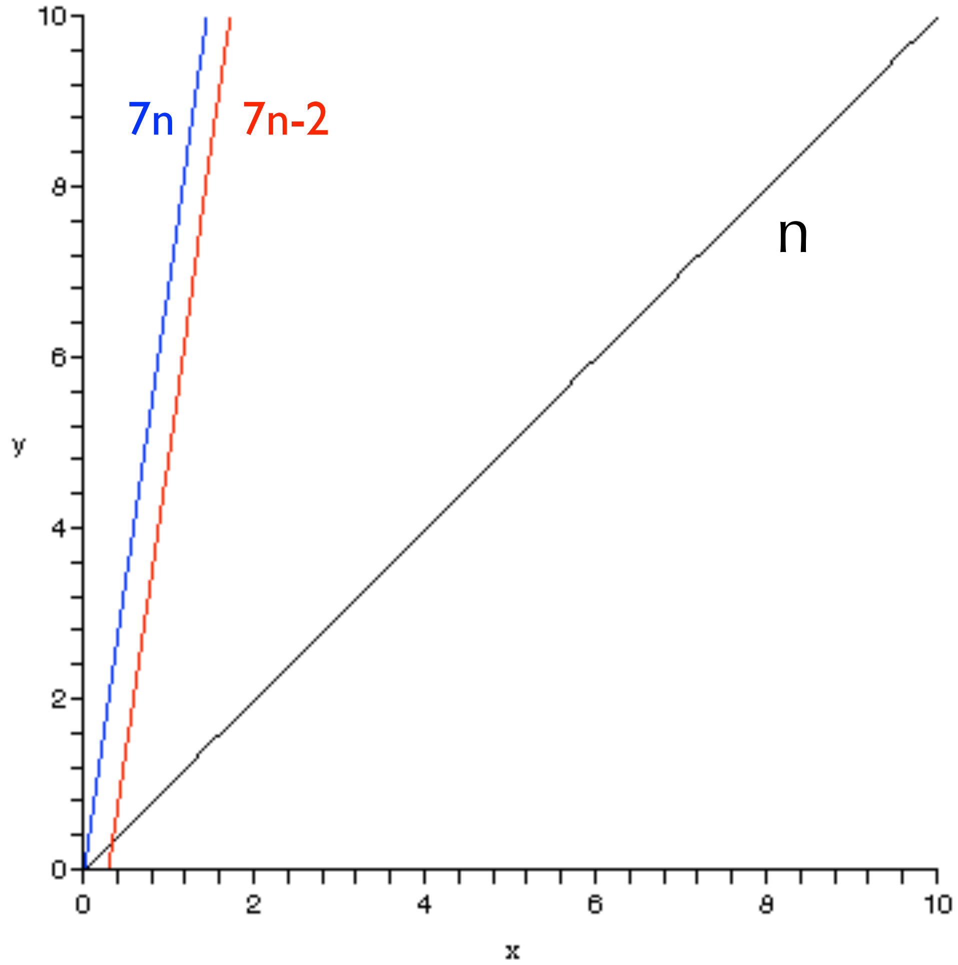
$100n = n^2 = 1000$

n=101

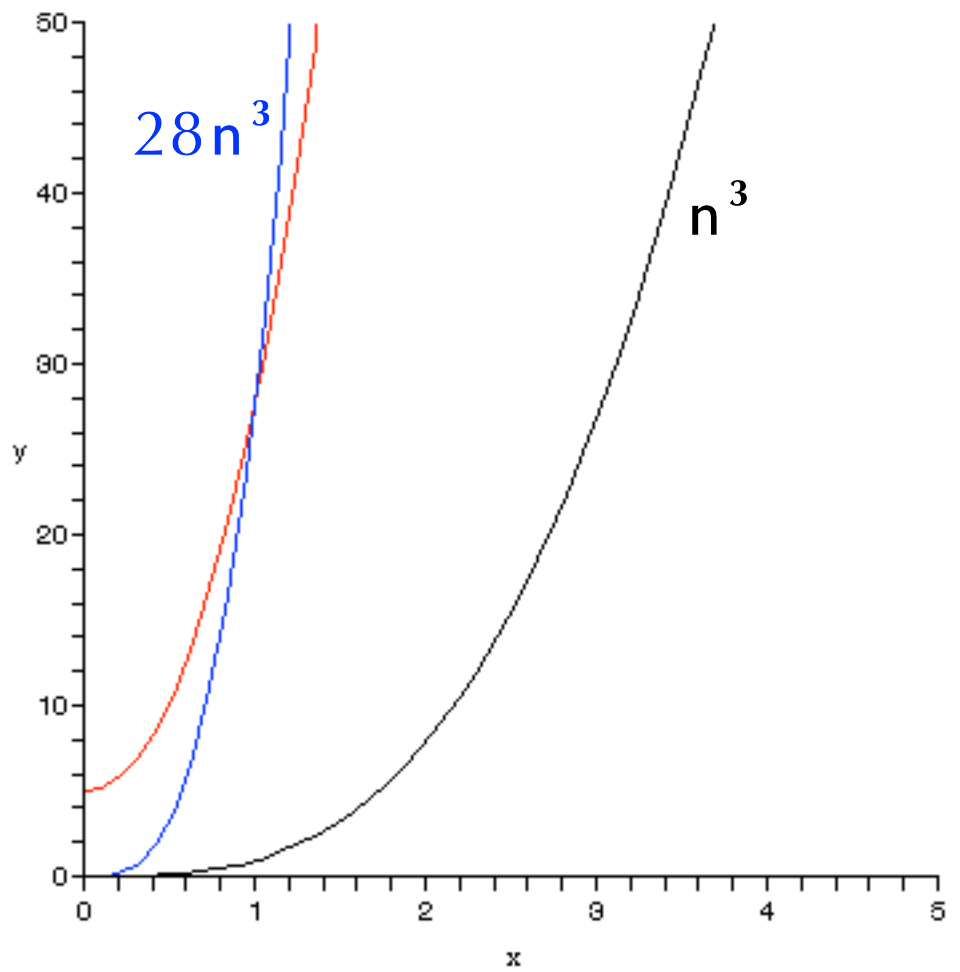
$100n = 10100$

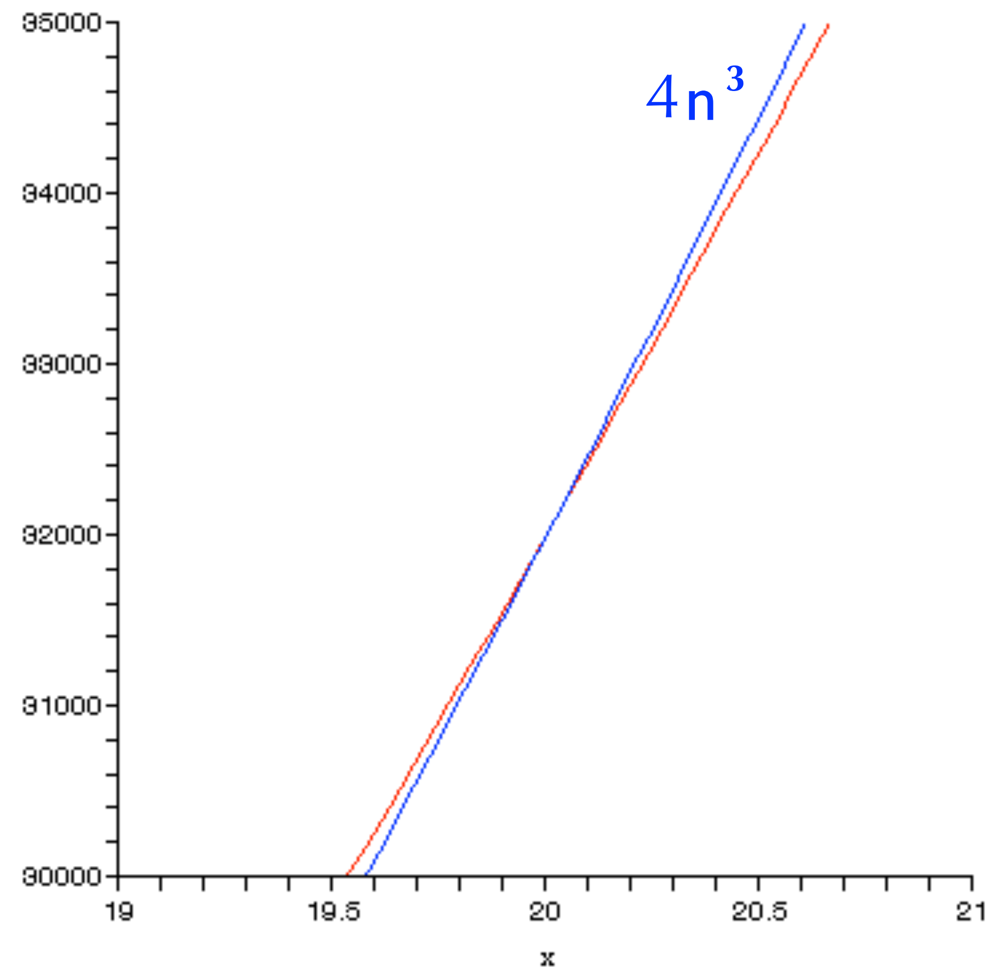
$n^2 = 10201$

Exemple 3 : 7n - 2 est O(n)

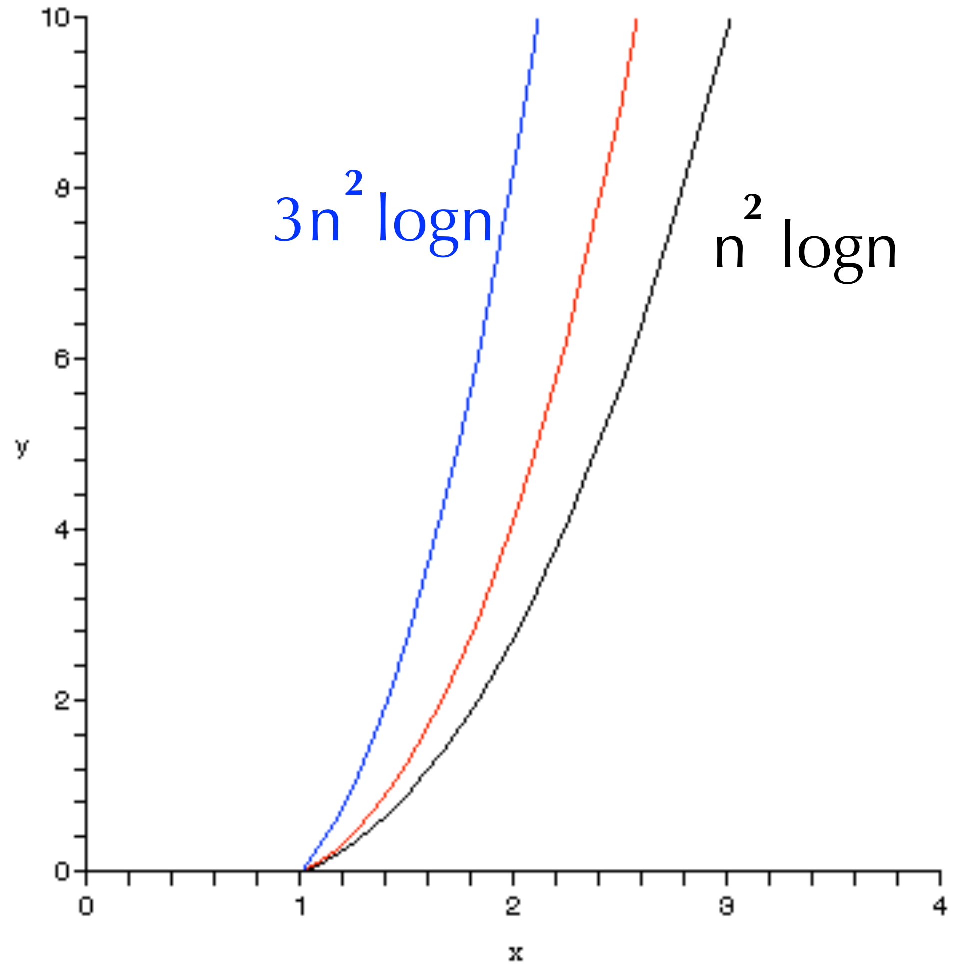


Exemple 4 : $3n^3 + 20n^2 + 5$ est $O(n^3)$





Exemple 5 : $3n\log(n!)$ est $O(n^2\log n)$



Grand *O* et taux de croissance

- La notation grand *O* donne une borne supérieure du taux de croissance d'une fonction.
- La phrase "**f(n)** est *O*(**g(n)**)" signifie donc que le taux de croissance de **f(n)** est plus petit ou égal au taux de croissance de **g(n)**.
- On peut utiliser la notation *O* pour ordonner les fonctions à partir de leur taux de croissance.

$$1 \leq \log n \leq n \leq n\log n \leq n^2 \leq 2^n \leq n^n$$

Règles d'utilisation

- Si **f(n)** est un polynôme de degrée d, alors **f(n)** est $O(n^d)$ i.e.
  - On "oublie" les termes de + petit ordre (exposant)
  - On "oublie" les termes constants
- On utilise toujours la + petite classe de fonctions
  - On dit "2n est $O(n)$" et non "2n est $O(n^2)$"
- On utilise toujours l'expression de la fonction la + simple d'une classe
  - On dit "3n+5 est $O(n)$" et non "3n+5 est $O(3n)$"

Propriétés

1. Si **f1(x)** est *O*(**g1(x)**) et **f2(x)** est *O*(**g2(x)**) alors
   (f1+f2)(x) est *O*(max(**g1(x)**,**g2(x)**))

   ➡ Si **f1(x)** et **f2(x)** sont *O*(**g(x)**), alors **(f1+f2)(x)** est *O*(**g(x)**)

2. Si **f1(x)** est *O*(**g1(x)**) et **f2(x)** est *O*(**g2(x)**) alors
   (f1f2)(x) est *O*(**g1(x)g2(x)**)

Grand Ω et grand Θ

- Grand Ω

  Étant donné des fonctions **f(n)** et **g(n)**, on dit que

  f(n) est $\mathbf{\Omega(g(n))}$

  s'il existe des constantes $c > 0$ et $n_0 \geq 1$ telles que

  $$f(n) \geq cg(n) \qquad \forall \text{entier } n \geq n_0$$

- Grand Θ

  Étant donné des fonctions **f(n)** et **g(n)**, on dit que

  f(n) est $\mathbf{\Theta(g(n))}$

  si **f(n)** est O(**g(n)**) et **f(n)** est Ω(**g(n)**), i.e s'il existe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que

  $$c_1\, \mathbf{g(n)} \leq \mathbf{f(n)} \leq c_2\, \mathbf{g(n)} \qquad \forall\ n \geq n_0$$

Intuition: notation asymptotique

- Grand O

  f(n) est O(**g(n)**) si **f(n)** est asymptotiquement plus petite ou égale à **g(n)**

- Grand Ω

  f(n) est Ω(**g(n)**) si **f(n)** est asymptotiquement plus grande ou égale à **g(n)**

- Grand Θ

  f(n) est Θ(**g(n)**) si **f(n)** est asymptotiquement égale à **g(n)**

Les mathématiques à reviser...

- Sommations
  - Par exemple, on a $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- Techniques de preuve
- Logarithmes et exposants

Propriétés des logarithmes

$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$

$\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$

$\log_b(x^a) = a \log_b(x)$

Propriétés des exposants

$a^{(b+c)} = a^b a^c$

$a^{bc} = (a^b)^c$

$a^b / a^c = a^{b-c}$