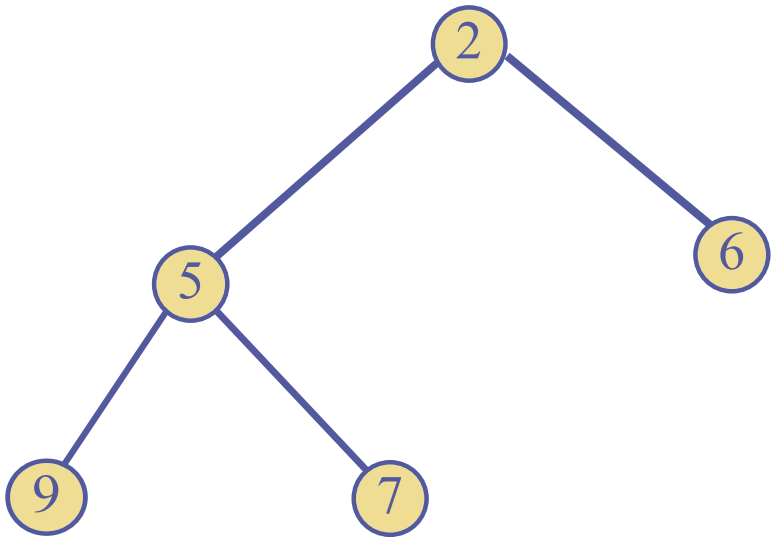
Monceaux (§9.2)



Rappel: TAD: Files avec priorité (§9.1)

- Une file avec priorités garde en mémoire une collection d'entrées (items)
- Chaque item est une paire (clé, élément)
- Opérations principales:
  - insérer(k,x): insère un entrée ayant la clé k et l'élément x
  - enleverMin(): enlève et retourne une entrée de clé minimale
- Opérations additionnels:
  - minElement(): retourne, sans enlever, un élément de clé minimale
  - minCle(): retourne la clé minimale
  - taille() , estVide()

Rappel: Trier en utilisant une file avec priorités

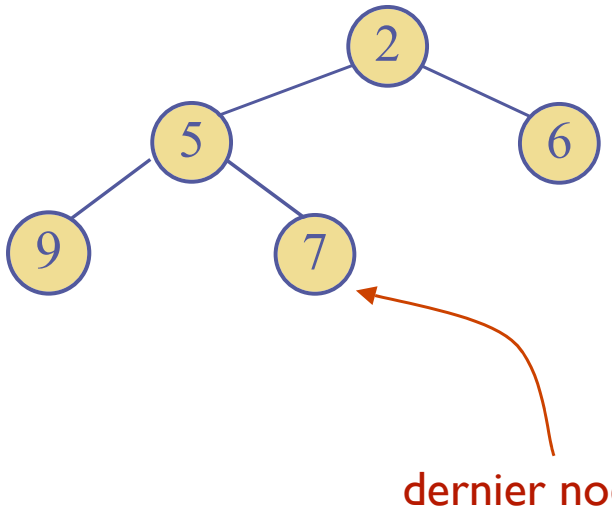
- On peut utiliser une file avec priorités pour trier un ensemble d'éléments comparables
  1) Insérer les éléments un par un dans la file avec une série d'opérations insérer(e,e)
  2) Enlever les éléments dans l'ordre croissant avec une série d'opérations enleverMin()
- Le temps d'exécution dépend de l'implémentation de la file avec priorités:
  - séquences non ordonnées:
    Tri-Sélection: complexité $O(n^2)$
  - séquences ordonnées:
    Tri-Insertion: complexité $O(n^2)$

➡ Peut-on faire mieux ?

Algorithme TriFP(*S*, *C*)
Entrée séquence *S*, comparateur *C* pour les éléments de *S*
Sortie séquence *S* triée en ordre croissant selon *C*
P ← file avec priorité utilisant le comparateur *C*
while ¬*S.estVide* ()
e ← *S.enlevePremier* ()
P.insérer (*e*, *e*)
while ¬*P.estVide*()
e ← *P.enleverMin*()
S.insérerFin(*e*)

Monceaux (§9.2)

- Un monceau est un arbre binaire gardant des clés en mémoire dans ses noeuds et satisfaisant les propriétés suivantes:
  - Ordre de monceau: pour chacun des noeuds internes v différents de la racine, on a
    $$\textbf{clé(v)} \leq \textbf{clé(fils(v))}$$
  - Arbre binaire complet: soit **h** la hauteur du monceau, alors
    - Pour $i = 0, \ldots, h-1$, il y a 2^i noeuds de profondeur i
    - Au niveau (profondeur) $h-1$, les noeuds internes sont situés à la gauche des noeuds externes
- Le dernier noeud d'un monceau est le noeud le plus à droite du niveau **h**



Hauteur d'un monceau

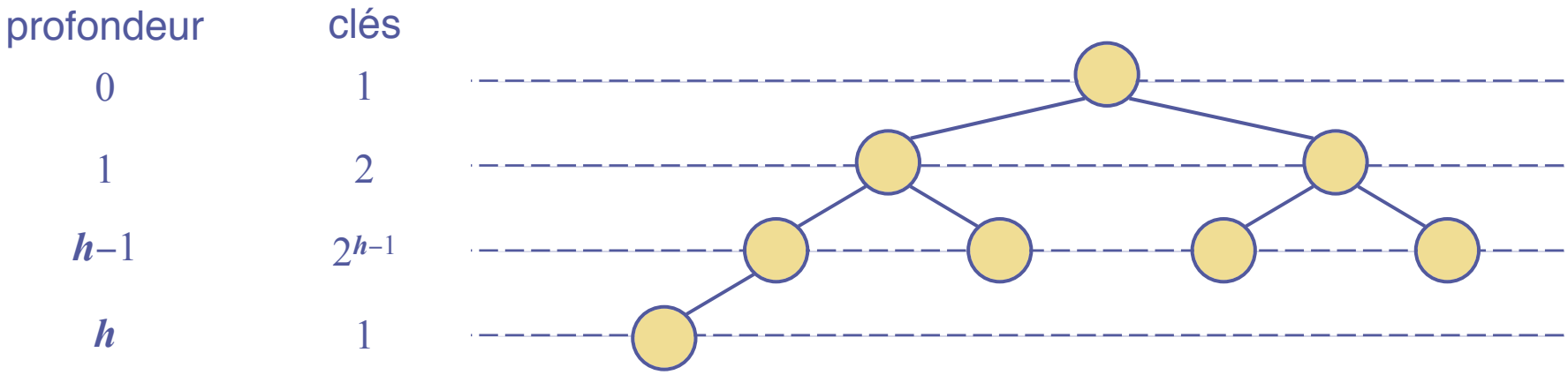
- **Théorème:** Un monceau gardant en mémoire n clés à une hauteur $O(\log n)$

  Preuve: On utilise le fait qu'un monceau est un arbre binaire complet:

  - Soit h la hauteur du monceau gardant en mémoire n clés
  - Comme on a 2^i clés de profondeur i, pour $i = 0, \ldots, h-1$ et au moins 1 clé de profondeur h, on a

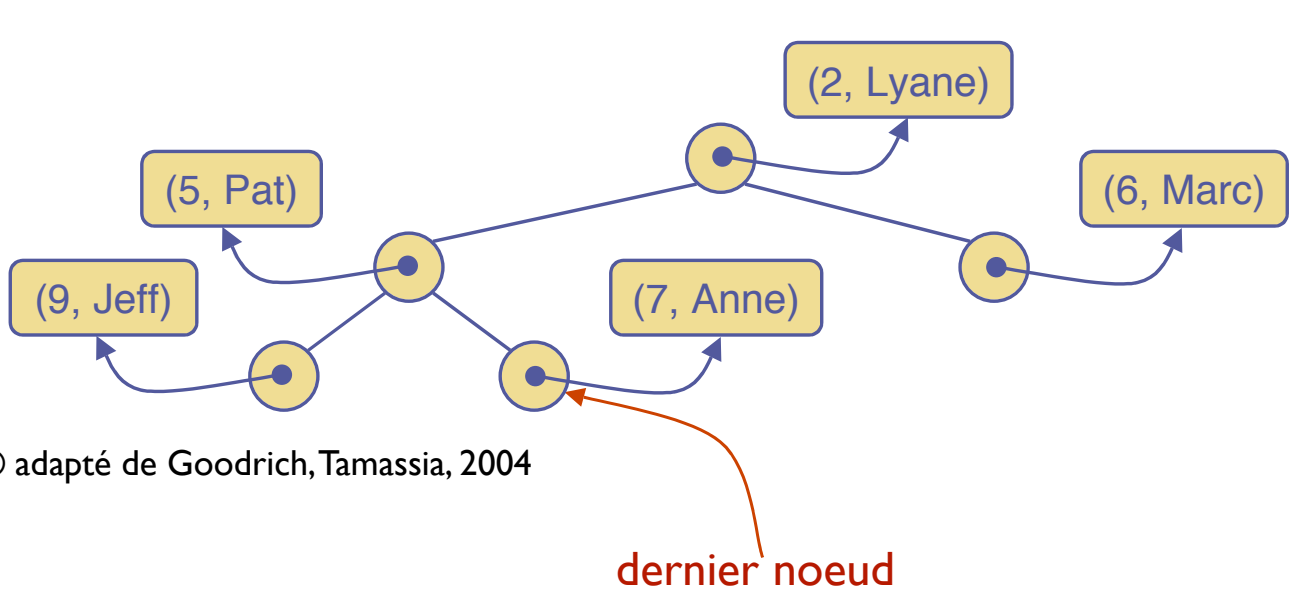
$$n \geq (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{h-1}) + 1 = (\sum_{i=0}^{h-1} 2^i) + 1$$

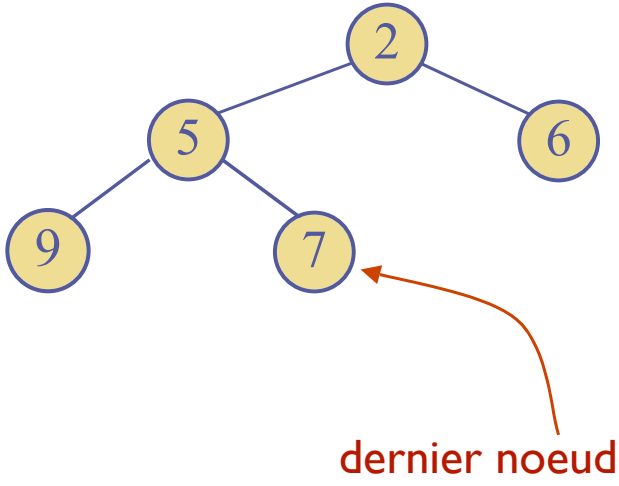
  - On a donc $n \geq 2^h$, i.e $h \leq \log n$



Monceaux et files avec priorités

- On peut utiliser un monceau pour implémenter une file avec priorités
- On garde en mémoire dans les noeuds de l'arbre les items (clé, élément)
- On garde en mémoire la position du dernier noeud
- Pour simplifier, on ne montre que la partie clé des entrées dans les dessins





Insertion d'éléments dans un monceau

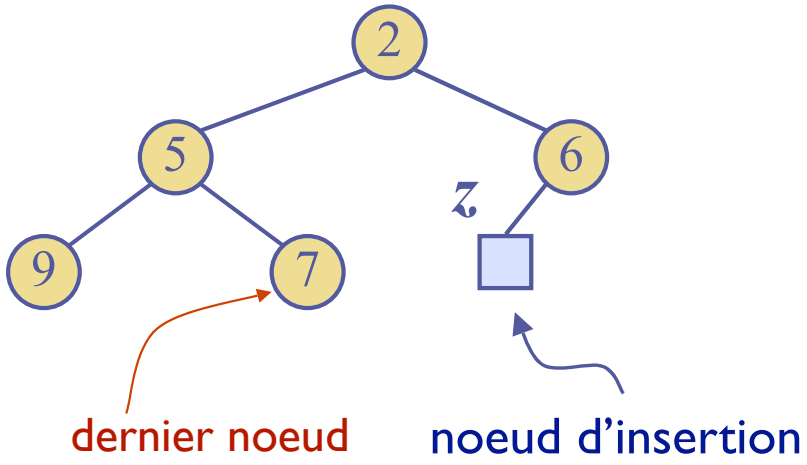
- L'opération insérer(k,x) du TAD files avec priorités correspond à l'insertion d'un item (**k**,**x**) dans le monceau

- L'algorithme d'insertion consiste en trois étapes:

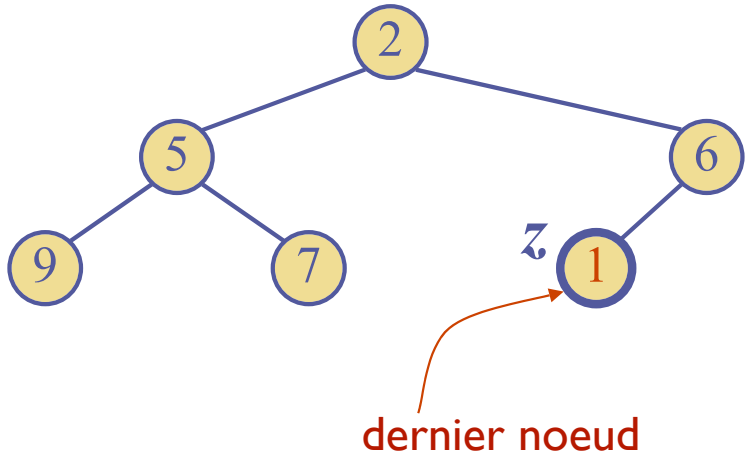
  1) Trouver le noeud d'insertion z (qui deviendra le nouveau dernier noeud)

  2) Insérer (**k**,**x**) dans le noeud z

  3) Restorer l'ordre dans le monceau

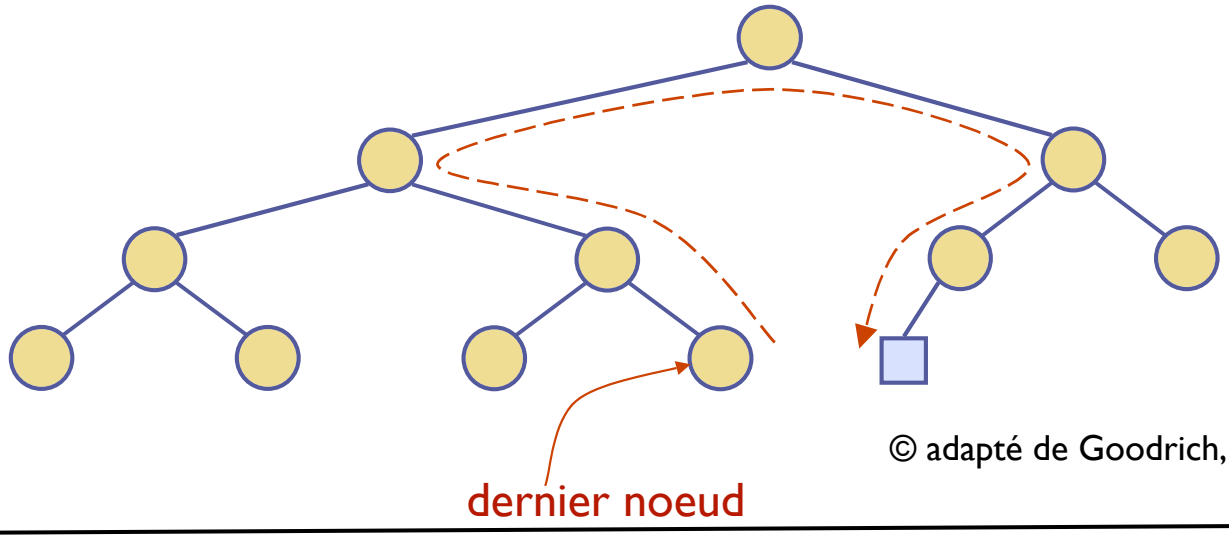


© adapté de Goodrich, Tamassia, 2004



Trouver le noeud d'insertion

- On peut trouver le noeud d'insertion en suivant un chemin de longueur $O(\log n)$, où ici, longueur = nombre de noeuds visités
  - À partir du dernier noeud inséré, monter jusqu'à ce qu'un fils gauche soit atteint (ou jusqu'à la racine) Attention! Si on est déjà dans un fils gauche alors, il faut y rester.
  - Si un fils gauche est atteint, alors parcourir l'arbre jusqu'à son frère droit
  - Si ce noeud est libre, c'est le noeud d'insertion
  - Sinon, si le fils gauche ou droit de ce noeud est libre, c'est le noeud d'insertion
  - Sinon, descendre vers la gauche, jusqu'à ce que vous trouviez une feuille. Le noeud d'insertion est le fils gauche de cette feuille.



© adapté de Goodrich, Tamassia, 2004

Restorer l'ordre vers le haut

- Après l'insertion d'une nouvelle clé **k**, il est possible que l'ordre du monceau soit perturbé
- L'algorithme upheap rétablit l'ordre du monceau en faisant monter la clé **k**, le long du chemin ascendant partant du noeud d'insertion et allant jusqu'à la racine, avec des opérations d'échange de clés (swap)
- L'algorithme upheap se termine quand la clé **k** atteint la racine ou un noeud dont le parent à une clé plus petite ou égale à **k**
- Comme la hauteur du monceau est $O(\log n)$, la complexité en temps de upheap est aussi $O(\log n)$

Suppression d'éléments dans un monceau

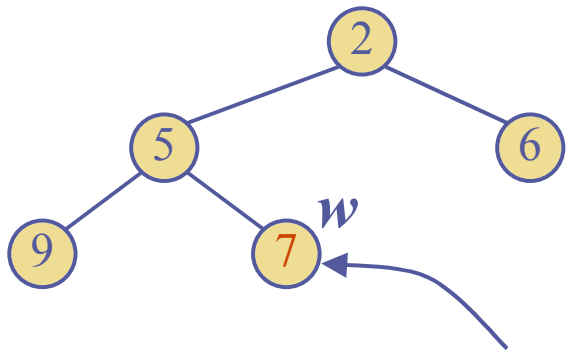
- L'opération enleverMin() du TAD files avec priorités correspond à la suppression de la racine d'un monceau

- L'algorithme de suppression est constitué de trois étapes:

  1) Remplacer la clé de la racine par la clé du dernier noeud

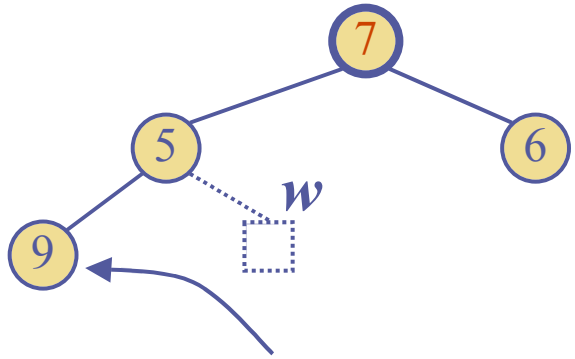
  2) Enlever le dernier noeud

  3) Restorer l'ordre dans le monceau



dernier noeud

© adapté de Goodrich, Tamassia, 2004



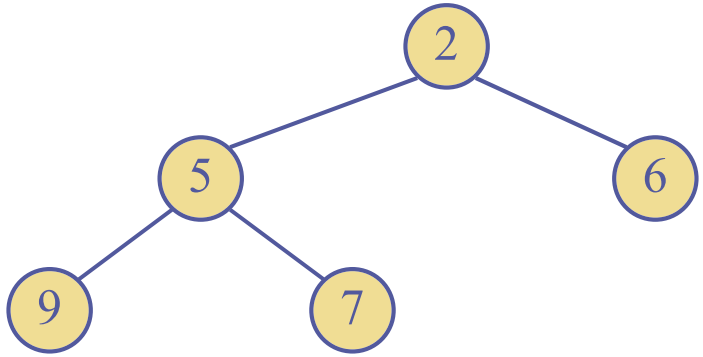
nouveau dernier noeud

Restorer l'ordre vers le bas

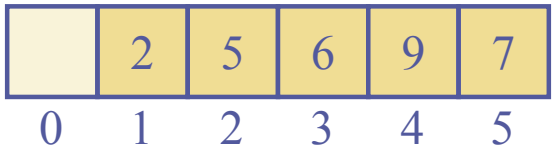
- Après le remplacement de la clé de la racine par la clé du dernier noeud, il est possible que l'ordre du monceau soit perturbé
- L'algorithme downheap rétablit l'ordre du monceau en faisant descendre la clé **k**, le long du chemin descendant partant de la racine, avec des opérations d'échange de clés (swap)
- L'algorithme downheap se termine quand la clé **k** atteint une feuille ou un noeud dont les fils ont des clés plus grande ou égale à **k**
- Comme la hauteur du monceau est $O(\log n)$, la complexité en temps de downheap est aussi $O(\log n)$

Implémentation d'un monceau

- On peut représenter un monceau contenant n clés par une liste de longueur n+1
- Pour le noeud au rang i de la liste:
  - son fils gauche est au rang 2i
  - son fils droit est au rang 2i + 1



- La cellule de rang 0 n'est pas utilisée
- L'opération insérer(k,e) correspond à insérer au rang n+1
- L'opération enleverMin retourne l'élément au rang 1

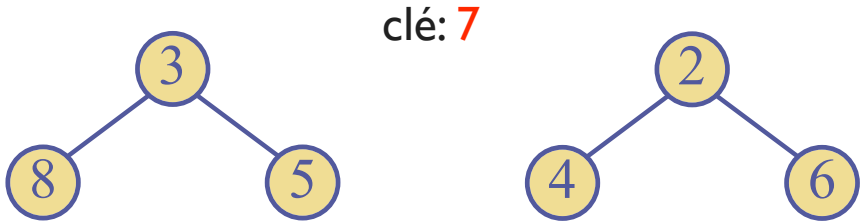


Tri-Monceau

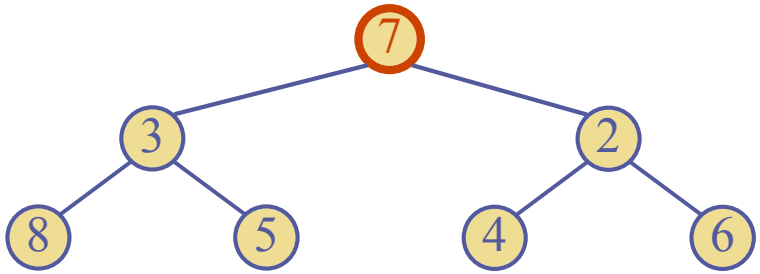
- Supposons qu'on a une liste avec priorités, contenant n éléments, implémentée à l'aide d'un monceau. Alors,
  - la complexité en espace est de $O(n)$
  - les opérations insérer(k,e) et enleverMin() ont une complexité en temps de $O(\log n)$
  - les opérations taille() et estVide() ont une complexité en temps de $O(1)$
- La complexité en temps du tri de n éléments, avec cette implémentation est de $O(n \log n)$
- On appelle l'algorithme de tri avec monceau, le Tri-Monceau

Fusionner deux monceaux

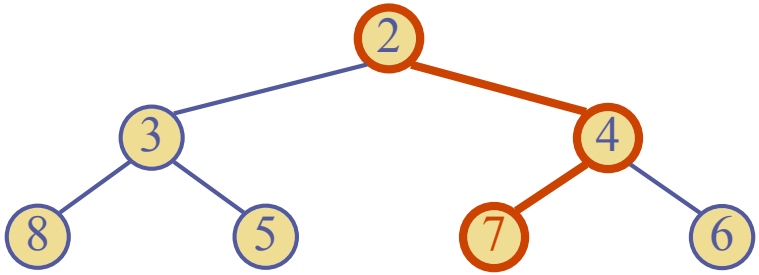
- On nous donne 2 monceaux et une clé k



- On crée un nouveau monceau avec la clé k en racine et les deux monceaux comme sous-arbres

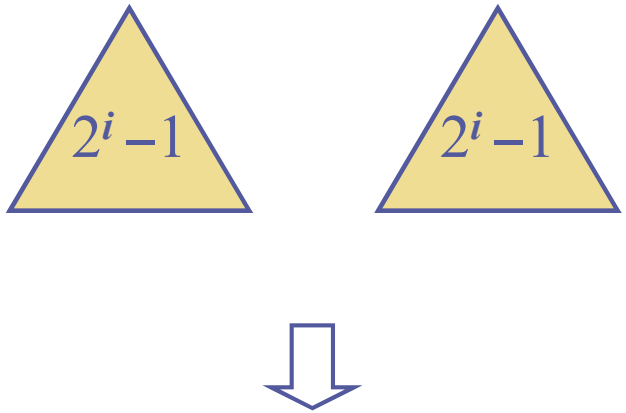


- On utilise l'algorithme downheap pour mettre en ordre le nouveau monceau

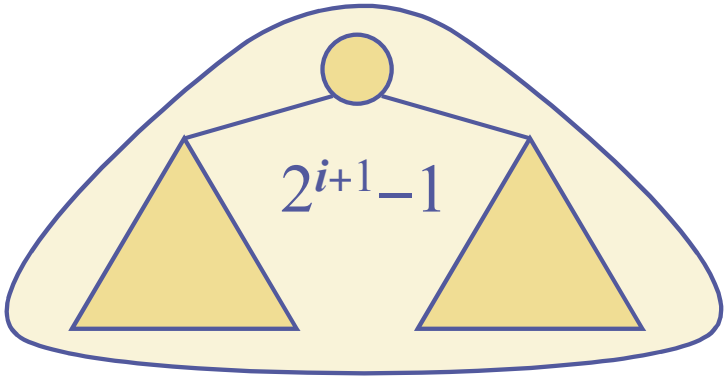


Construire un monceau de bas en haut

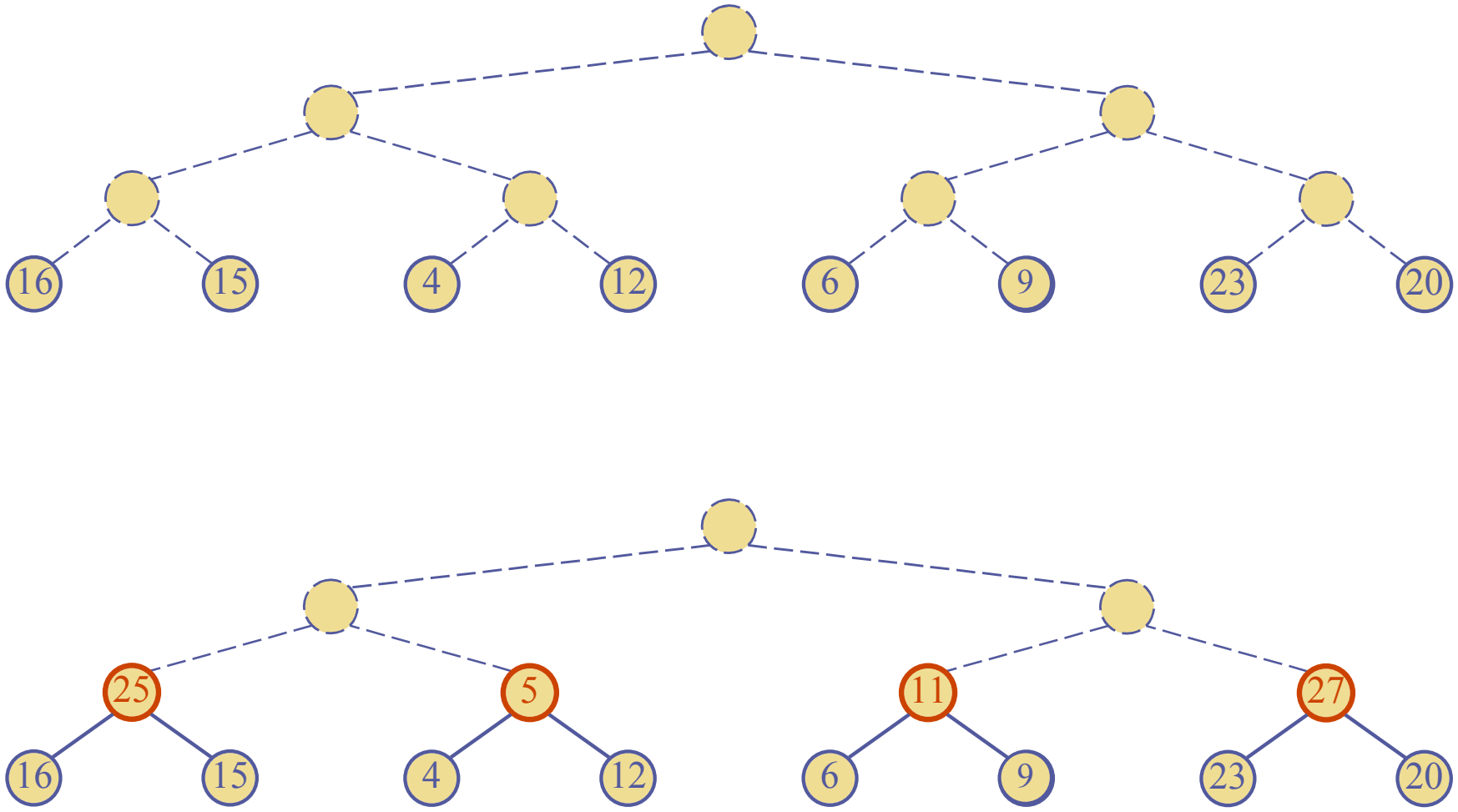
- On peut construire un monceau contenant n clés en utilisant une méthode de construction allant du bas vers le haut et comportant log(n) étapes



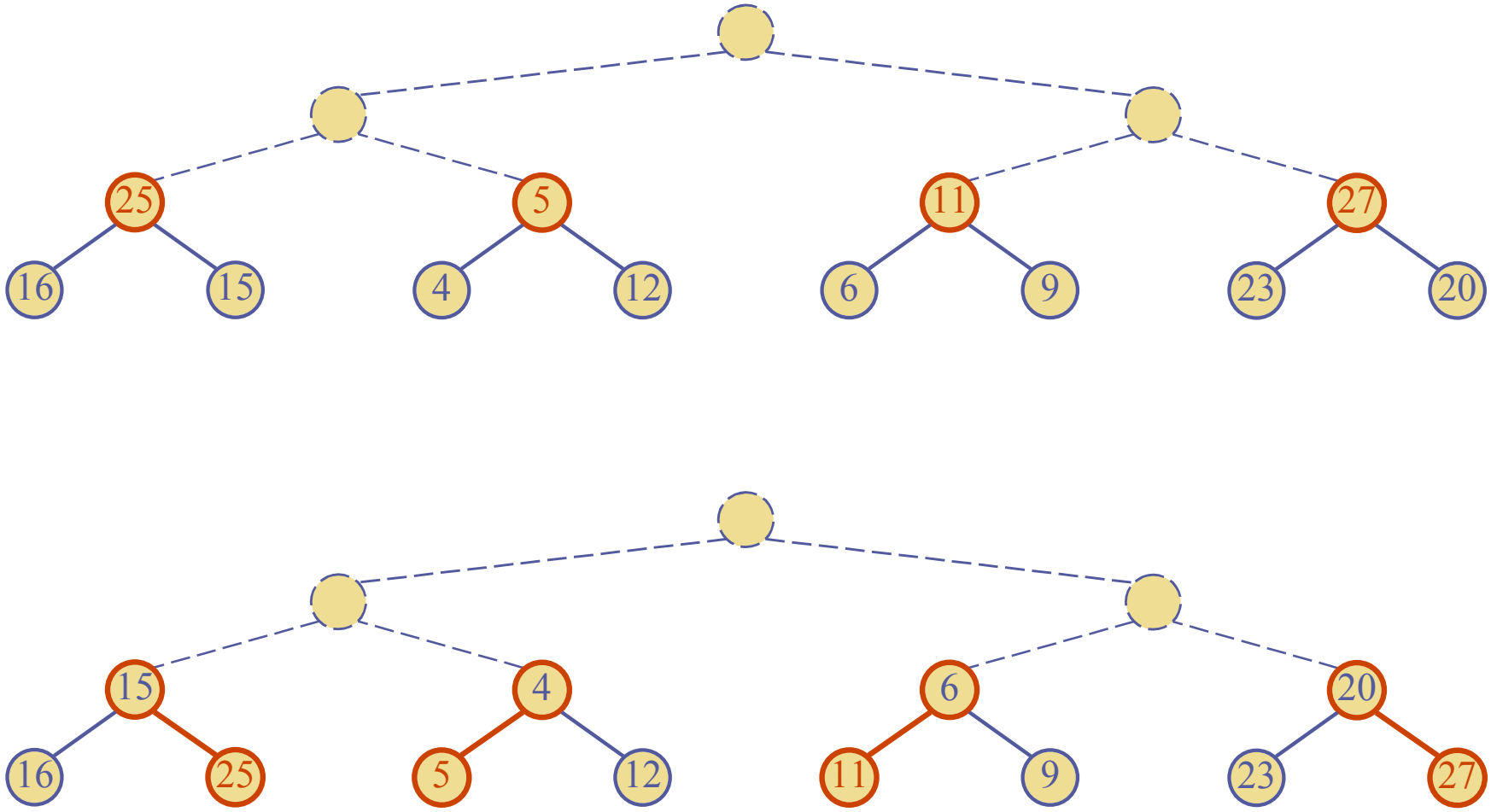
- À l'étape i, des paires de monceaux ayant $2^i - 1$ clés sont fusionnés en monceaux ayant $2^{i+1} - 1$ clés



Exemple:

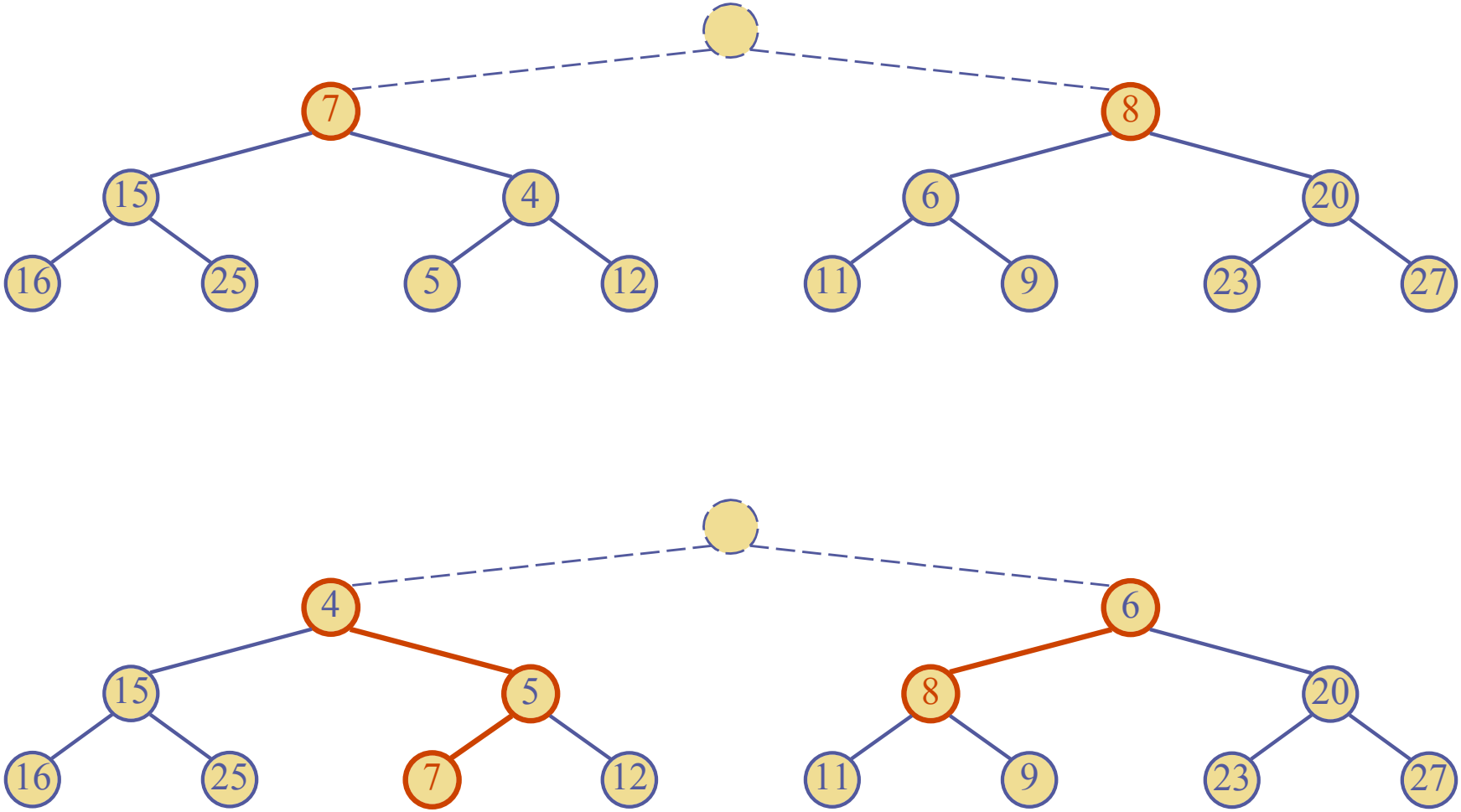


Exemple: (suite)

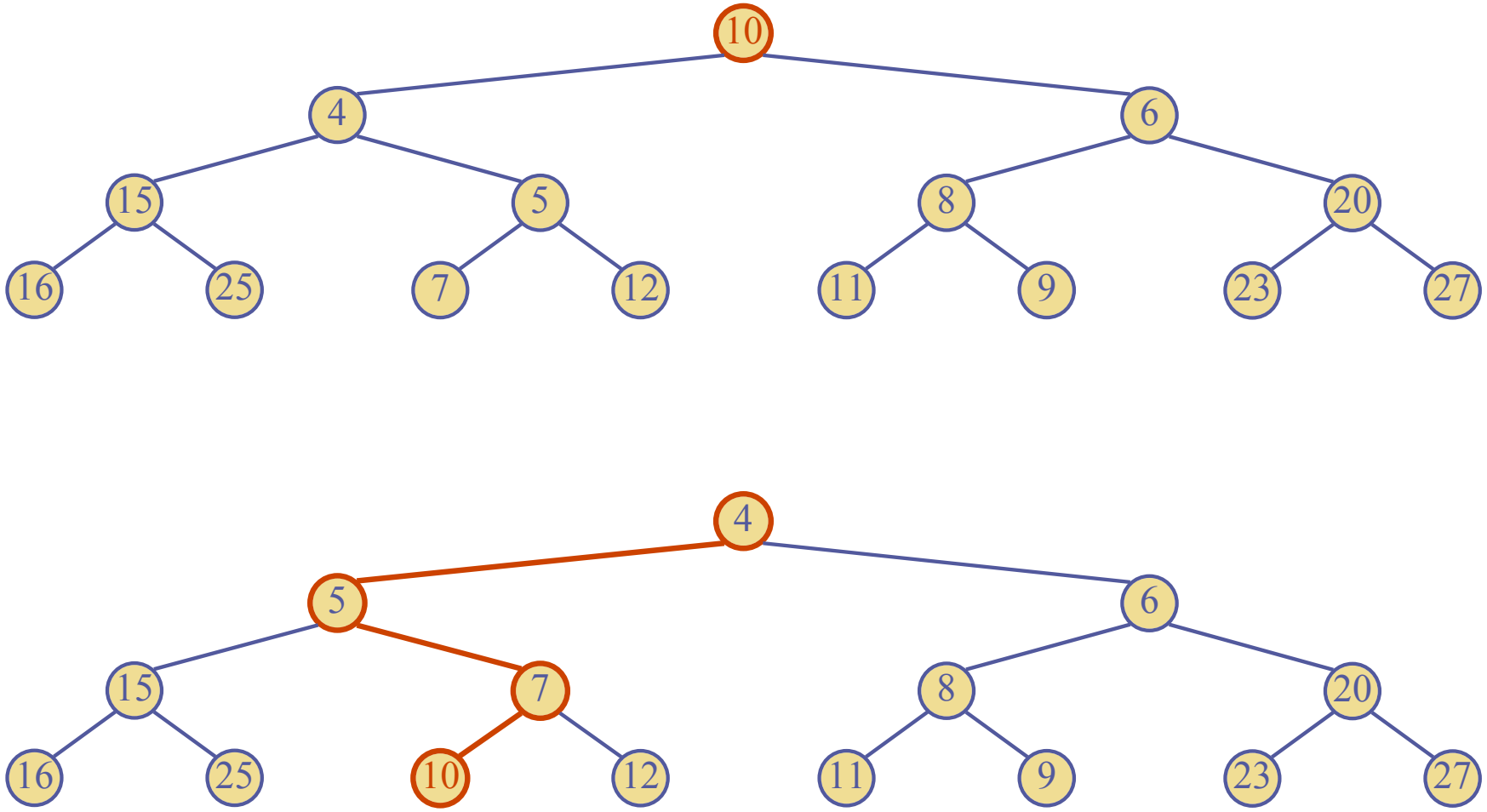


© adapté de Goodrich, Tamassia, 2004

Exemple: (suite)



Exemple: (suite)



© adapté de Goodrich, Tamassia, 2004

Analyse de la complexité en temps

- Dans le pire des cas, à chaque insertion d'un nouveau noeud, on doit pour remettre de l'ordre, le faire descendre jusqu'aux feuilles (voir dessin).

- L'algorithme de construction de bas en haut à une complexité en temps de $O(n)$