

Graphes orientés (§13.4)

Terminologie

- Un graphe orienté est un graphe $G=(S,A)$ dont toutes les arêtes sont orientées
- Étant donné un sommet d'un graphe orienté, on va considérer deux degrés pour ce sommet

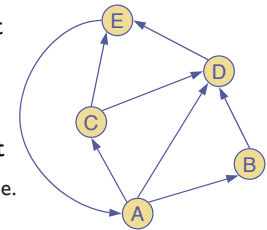
■ $inDeg(s)$, est le nombre d'arêtes **entrant** dans s , i.e.

$$|\{t \mid (t,s) \in A\}|$$

■ $outDeg(s)$, est le nombre d'arêtes **sortant** de s , i.e.

$$|\{t \mid (s,t) \in A\}|$$

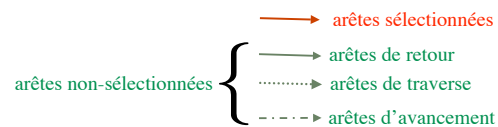
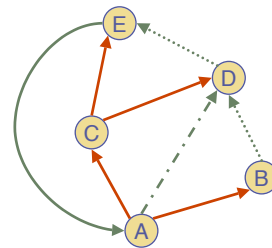
- **Proposition:** $\sum_{s \in S} inDeg(s) = \sum_{s \in S} outDeg(s) = m$



Parcours d'arbres orientés

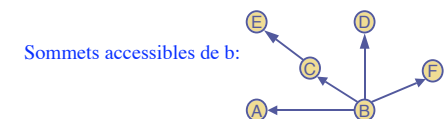
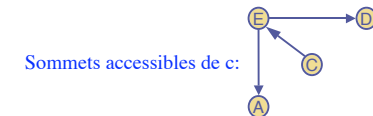
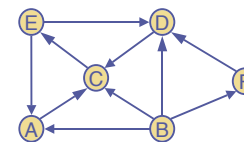
- On spécialise les parcours (en profondeur et en largeur) de graphes aux graphes orientés en traversant les arêtes seulement selon leur direction.

- Lorsqu'on exécute un algorithme de parcours à partir d'un sommet s d'un graphe orienté, les sommets visités représentent l'ensemble des sommets **accessibles** du sommet s



Sommets accessibles

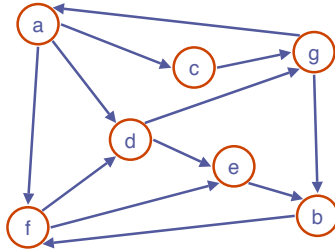
- L'arbre composé des arêtes sélectionnées et des sommets visités lors d'un parcours de graphe à partir du sommet s , représente l'ensemble des sommets accessibles de s



© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Graphes fortement connexes

- Graphes orientés dans lequel de chaque sommet on peut atteindre tous les autres sommets



Algorithmes pour tester si un graphe est fortement connexe

Première idée: utiliser l'algorithme de parcours en profondeur à partir de chacun des sommets du graphe

- Pour chaque sommet s du graphe, exécute DFS(G,s); les sommets visités sont les sommets accessibles de s
- Si, pour chaque sommet l'algorithme DFS(G,s) visite les n sommets du graphe alors le graphe est fortement connexe

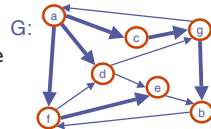
Complexité en temps: $O(n(n+m))$

Algorithmes pour tester si un graphe est fortement connexe

Meilleure idée: on peut tester si un graphe est fortement connexe en exécutant deux parcours en profondeur

- On choisit un sommet s dans G et on exécute DFS(G,s)

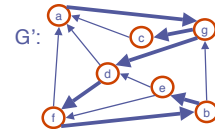
- Si on a moins de n sommets visités après l'exécution de l'algorithme, on retourne NON



- On construit le graphe G' qui est le graphe G dans lequel toutes les arêtes ont été renversées

- On exécute DFS(G',s)

- Si on a moins de n sommets visités après l'exécution de l'algorithme, on retourne NON
- Sinon retourner OUI



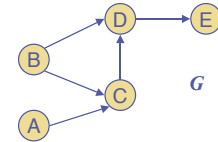
Complexité en temps: $O(n+m)$

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

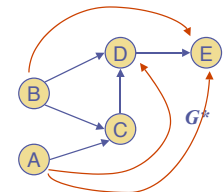
Fermeture transitive d'un graphe orienté

- Étant donné un graphe orienté G , la **fermeture transitive** de G est un graphe orienté G^* tel que:

- G^* a les mêmes sommets que G
- S'il y a un chemin dans G de u à v ($u \neq v$), alors il y a une arête dans G^* de u à v



- La fermeture transitive d'un graphe contient toutes l'information sur les sommets accessibles du graphe



© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Calculer la fermeture transitive d'un graphe

- On peut utiliser l'algorithme de parcours en profondeur à partir de chaque sommet: $O(n(n+m))$

S'il existe un chemin de A à B et de B à C, alors il existe un chemin de A à C.



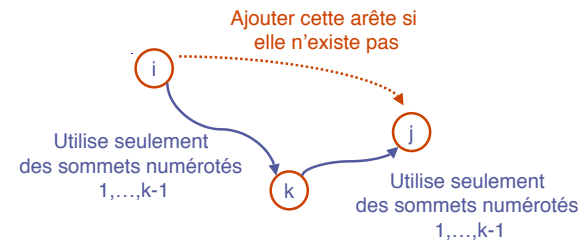
- Utiliser la programmation dynamique:

Algorithme de Floyd-Warshall

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée 1:** Numéroté les sommets de 1 à n
- Idée 2:** À l'étape k, considérer les chemins utilisant seulement les sommets de 1 à k comme sommets intermédiaires



© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Algorithme de Floyd-Warshall

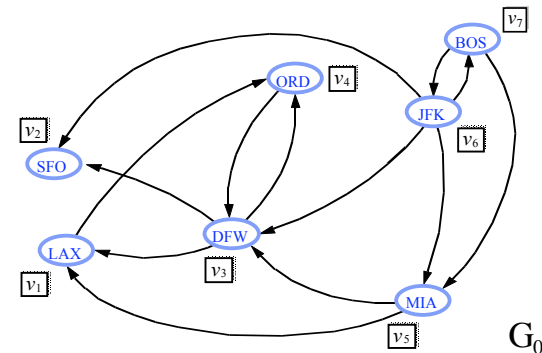
- L'algorithme de Floyd-Warshall numérote les sommets de 1 à n et calcule une série de graphes orientés G_0, G_1, \dots, G_n tels que
 - $G_0 = G$
 - G_k a une arête dirigée (v_i, v_j) si G a un chemin de v_i à v_j dont les sommets intermédiaires sont dans $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
 - $G_n = G^*$
- Complexité en temps: $O(n^3)$, si on assume que `sontAdjacents` peut être calculé en $O(1)$

```

Algorithme FloydWarshall(G)
Entrée graphe orienté  $G$ 
Sortie fermeture transitive  $G^*$  de  $G$ 
 $i \leftarrow 1$ 
pour tout  $v \in G.sommets()$ 
    numéroté  $v$  par  $v_i$ 
     $i \leftarrow i + 1$ 
 $G_0 \leftarrow G$ 
pour  $k \leftarrow 1$  à  $n$  faire
     $G_k \leftarrow G_{k-1}$ 
    pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  ( $i \neq k$ ) faire
        pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  ( $j \neq i, k$ ) faire
            si  $G_{k-1}.sontAdjacents(v_i, v_k) \wedge$ 
                 $G_{k-1}.sontAdjacents(v_k, v_j)$ 
            si  $\neg G_k.sontAdjacents(v_i, v_j)$ 
                 $G_k.insérer.ArêteDirigée(v_i, v_j, k)$ 
    retourner  $G_n$ 
    
```

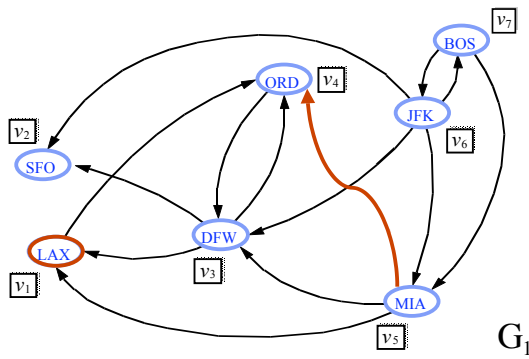
© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Algorithme de Floyd-Warshall (exemple)



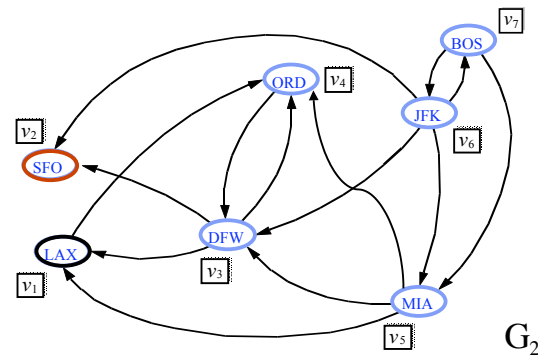
© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Floyd-Warshall (itération 1)



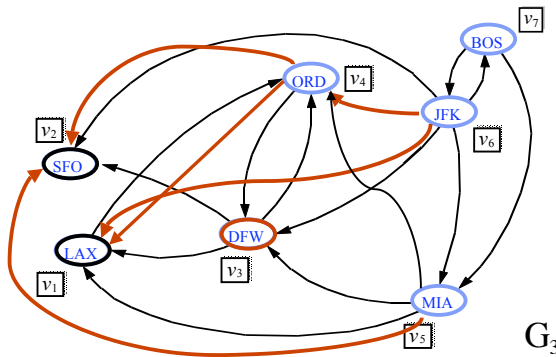
© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Floyd-Warshall (itération 2)



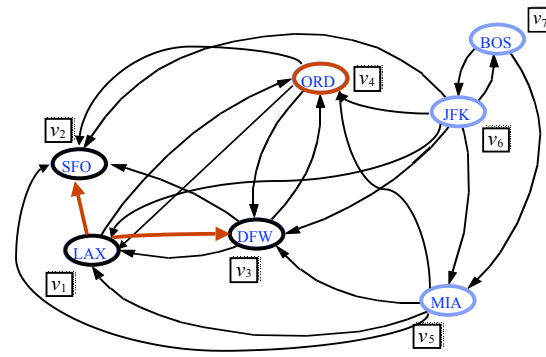
© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Floyd-Warshall (itération 3)



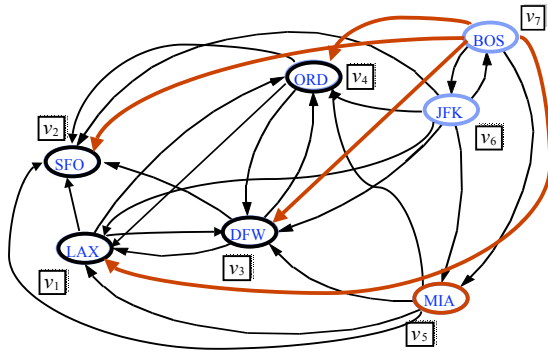
© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Floyd-Warshall (itération 4)



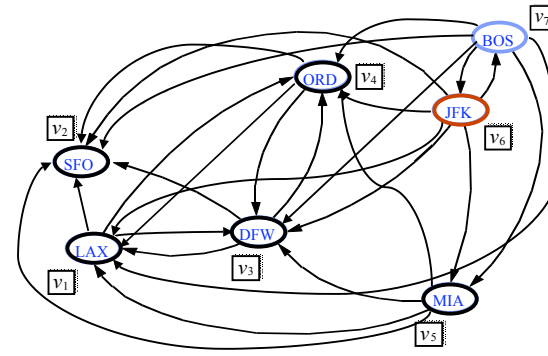
© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Floyd-Warshall (itération 5)



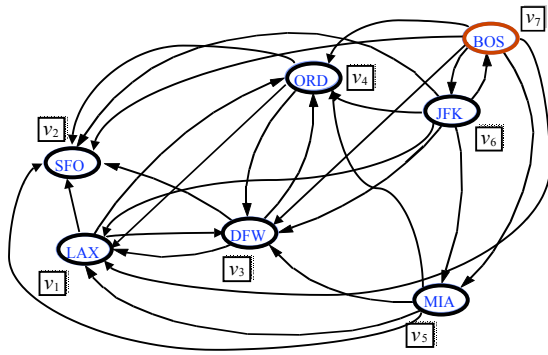
© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Floyd-Warshall (itération 6)



© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

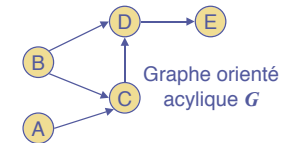
Floyd-Warshall (conclusion)



© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

Graphes orientés acycliques et ordre topologique

- Un graphe orienté acyclique est un graphe orienté qui n'a aucun cycle orienté

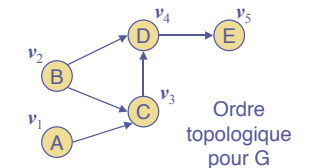


- Un ordre topologique pour graphe orienté est une numérotation des sommets

$$v_1, \dots, v_n$$

telle que pour chaque arête (v_i, v_j) du graphe on a $i < j$

- Théorème:** Un graphe orienté admet un ordre topologique si et seulement si le graphe est acyclique.



© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

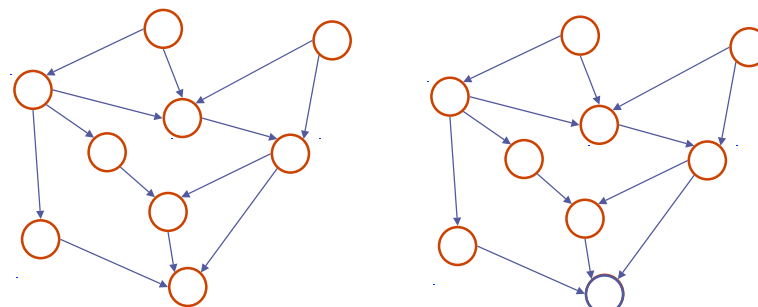
Un algorithme pour trouver un ordre topologique

```

Algorithme OrdreTopologique( $G$ )
 $H \leftarrow G$  // Copy temporaire de  $G$ 
 $n \leftarrow G.\text{nombreSommets}()$ 
tant que il existe un sommet  $v$  dans  $H$  tel que  $\text{OutDeg}(v)=0$  faire
    Étiquetter  $v$  par  $n$ 
     $n \leftarrow n - 1$ 
    Enlever  $v$  de  $H$ 
    
```

- Cet algorithme est différent de celui dans votre livre
- Si à la fin de l'algorithme, il reste encore des sommets dans H , cela implique que le graphe contient un cycle orienté

ordre topologique (exemple)

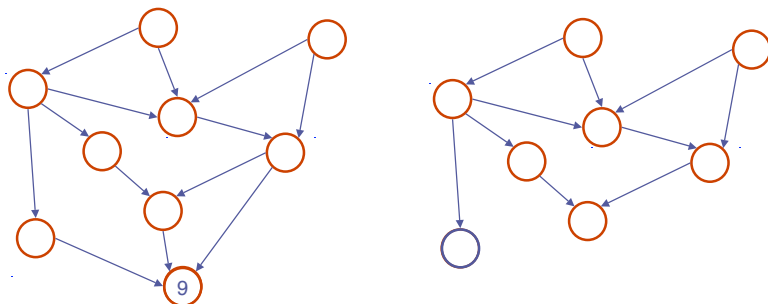


G

H

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

ordre topologique (exemple)

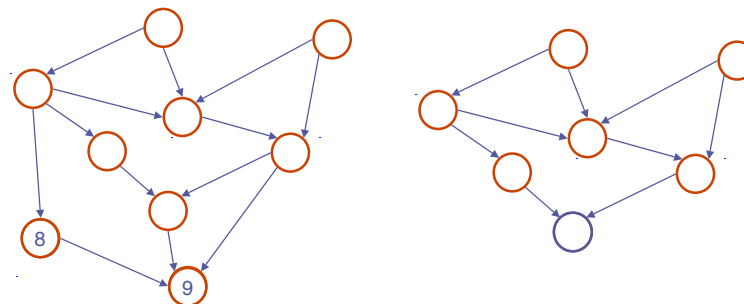


G

H

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

ordre topologique (exemple)

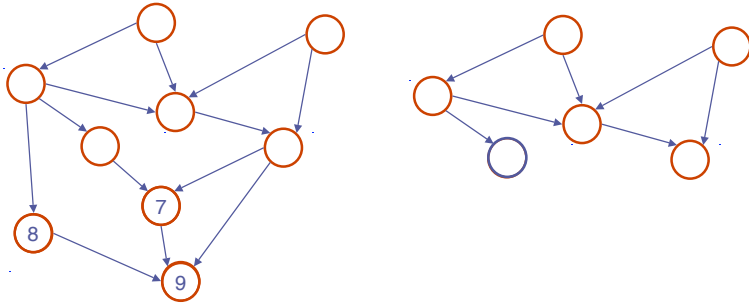


G

H

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

ordre topologique (exemple)

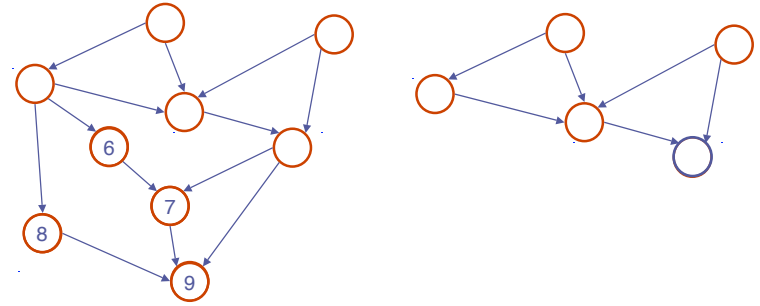


G

H

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

ordre topologique (exemple)

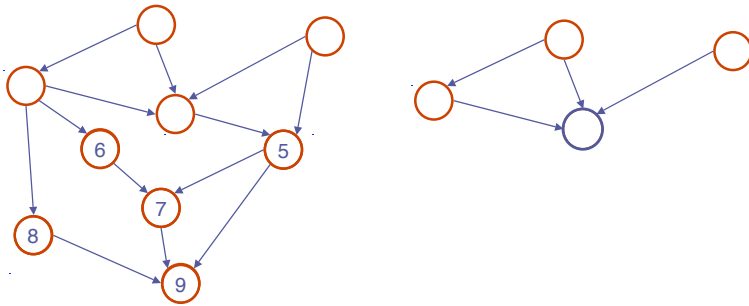


G

H

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

ordre topologique (exemple)

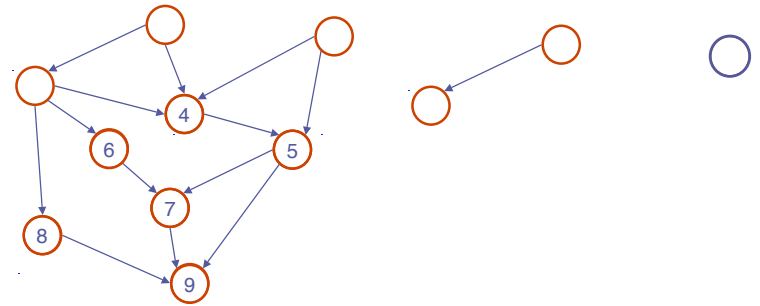


G

H

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

ordre topologique (exemple)

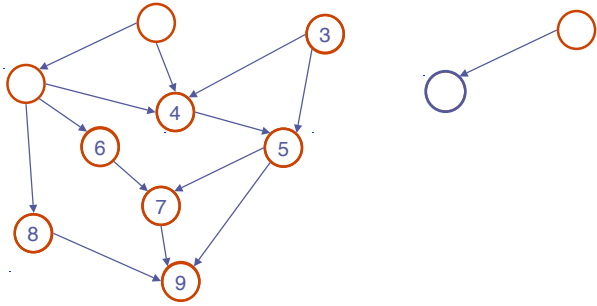


G

H

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

ordre topologique (exemple)

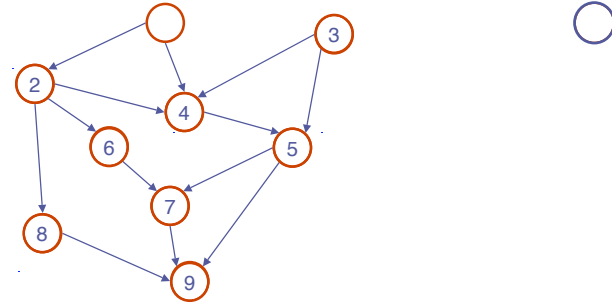


G

H

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

ordre topologique (exemple)

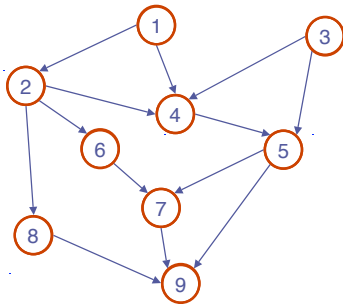


G

H

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004

ordre topologique (exemple)



G

H

© adapté de Goodrich et Tamassia 2004