Rappels:

3) Fonctions récursives

Récursivité

- Il est parfois difficile de définir un objet
- Il est parfois plus simple de définir cet objet en fonction de lui-même
- Ce procédé s'appelle la récursivité
- On peut utiliser la récursivité pour définir des ensembles, des suites, des fonctions

Récursion en programmation

- Quand une méthode (fonction) s'appelle elle-même
- Un exemple classique: La fonction factorielle

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \quad \cdots \quad \cdot (n-1) \cdot n$$

- Définition récursive:

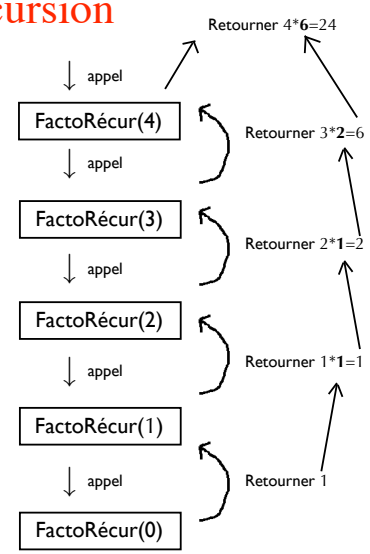
$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot f(n-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Éléments essentiels d'une méthode récursive

- Un (ou plusieurs) cas de base
  - Les valeurs d'entrées pour lesquelles on ne fait aucun appel récursif sont appelées les **cas de base**
- Appels récursifs
  - Appels de la méthode courante
  - Chaque suite d'appels récursifs **doit** essentiellement se terminer sur un cas de base

Trace d'une récursion

- Une boîte pour chaque appel récursif
- Une flèche pour chaque appel
- Une flèche pour chaque retour d'une valeur



Un autre exemple de récursion linéaire

Algorithme SommeLinaire(A,n)

Entrées: Une liste d'entiers A et un entier
n >=1, tel que A contient au moins n éléments

Sortie: La somme des n premiers entiers de A

```
Si   n=1 alors
   retourner  A[0]
Sinon
   retourner  SommeLinaire(A,n-1)+ A[n-1]
```


Bien définir la récursion

- Lorsqu'on crée des méthodes récursives, il est important de les définir de façon à faciliter la récursion
- Cela implique parfois qu'il faut donner des paramètres additionels en entrée à la méthode
- Pour définir une fonction récursive qui inverse les éléments d'une liste, il est plus facile de définir une méthode InverseListe(A,i,j) qui prend en entrée deux indices i et j en plus de la liste a inverser.

Inverser les éléments d'une liste

Algorithme InverseListe(A,i,j)

Entrées: Une liste d'entiers A et des indices i et j

Sortie: La liste ayant les éléments de l'indice i à j dans l'ordre inverse

```
Si  i < j alors
   échanger  A[i] et A[j]
   InverseListe(A,i+1,j-1)
Retourner A
```

"Tail recursion"

- Lorsqu'une méthode récursive exécute son appel récursif comme dernière étape
- La méthode InverseListe en est un exemple
- Ces méthodes peuvent facilement être converties en des méthodes non récursives (ce qui sauve de l'espace mémoire)

Récursion Binaire

- Quand une méthode fait deux appels récursifs
- Exemple:

Algorithme SommeBinaire(A,i,n)

Entrées: Une liste d'entiers A et des entiers i et n

Sortie: La somme de n entiers dans A, où l'on commence à additionner à partir de l'indice i

Si n = 1 alors
    retourner A[i]
Sinon
    retourner SommeBinaire[A,i,$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$] +
        SommeBinaire[A,$i + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,$\lceil \frac{n}{2} \rceil$]

Calculer les nombres de Fibonacci

- Les nombres de Fibonacci sont définis récursivement

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \qquad \text{pour i > 1}$$

- Les calculer avec un algorithme récursif (essai 1)

Algorithme FibBinaire(k)

Entrées: Une entier k >= 0

Sortie: F_k

Si k = 0 ou 1 alors
    retourner k
sinon
    retourner FibBinaire(k-1) + FibBinaire(k-2)

Un meilleur algorithme

Algorithme FibLineaire(k)

Entrées: Une entier k >= 0

Sortie: (F_k, F_{k-1})

Si k = 1 alors
    retourner (k,0)
sinon
    (i,j) := FibLinaire(k-1)
    retourner (i+j, i)

⇒ Complexité en temps: O(k)