

# IFT-3655, Modèles Stochastiques

## Processus de Poisson

**Prof. Pierre L'Ecuyer**

DIRO, Université de Montréal

Ces “diapos” sont surtout un support pour les présentations en classe. Pour des explications plus détaillées, il est recommandé d'étudier le livre de Sheldon Ross.

## Processus de comptage

Un **processus de comptage** est un processus en temps continu  $\{N(t), t \geq 0\}$ , à valeurs dans  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite.

Habituellement,  $N(0) = 0$ , et les instants de saut  $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots$  s'appellent les instants d'**arrivées**. Ainsi,  $N(t)$  représente le nombre d'arrivées durant  $[0, t]$ .

## Processus de comptage

Un **processus de comptage** est un processus en temps continu  $\{N(t), t \geq 0\}$ , à valeurs dans  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite.

Habituellement,  $N(0) = 0$ , et les instants de saut  $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots$  s'appellent les instants d'**arrivées**. Ainsi,  $N(t)$  représente le nombre d'arrivées durant  $[0, t]$ .

L'**accroissement** du processus sur un intervalle de temps  $(s, s + t]$  est  $N(s + t) - N(s)$ .

Les **accroissements sont indépendants** si pour tout ensemble d'intervalles disjoints  $I_j = (s_j, s_j + t_j]$ , les  $Y_j = N(s_j + t_j) - N(s_j)$  sont indépendants.

Les **accroissements sont stationnaires** si  $N(s + t) - N(s)$  ne dépend que de  $t$  et pas de  $s$ .

## Processus de comptage

Un **processus de comptage** est un processus en temps continu  $\{N(t), t \geq 0\}$ , à valeurs dans  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite.

Habituellement,  $N(0) = 0$ , et les instants de saut  $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots$  s'appellent les instants d'**arrivées**. Ainsi,  $N(t)$  représente le nombre d'arrivées durant  $[0, t]$ .

L'**accroissement** du processus sur un intervalle de temps  $(s, s + t]$  est  $N(s + t) - N(s)$ .

Les **accroissements sont indépendants** si pour tout ensemble d'intervalles disjoints  $I_j = (s_j, s_j + t_j]$ , les  $Y_j = N(s_j + t_j) - N(s_j)$  sont indépendants.

Les **accroissements sont stationnaires** si  $N(s + t) - N(s)$  ne dépend que de  $t$  et pas de  $s$ .

**Exemples:** Nombre de clients arrivant à un magasin jusqu'au temps  $t$ , nombre d'appels d'ambulances, nombre d'achats en ligne d'un produit, nombre d'appels dans un centre d'appels, nombre de buts marqué par un joueur en  $t$  secondes de jeu, etc. Discuter.

## Processus de comptage

Un **processus de comptage** est un processus en temps continu  $\{N(t), t \geq 0\}$ , à valeurs dans  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite.

Habituellement,  $N(0) = 0$ , et les instants de saut  $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots$  s'appellent les instants d'**arrivées**. Ainsi,  $N(t)$  représente le nombre d'arrivées durant  $[0, t]$ .

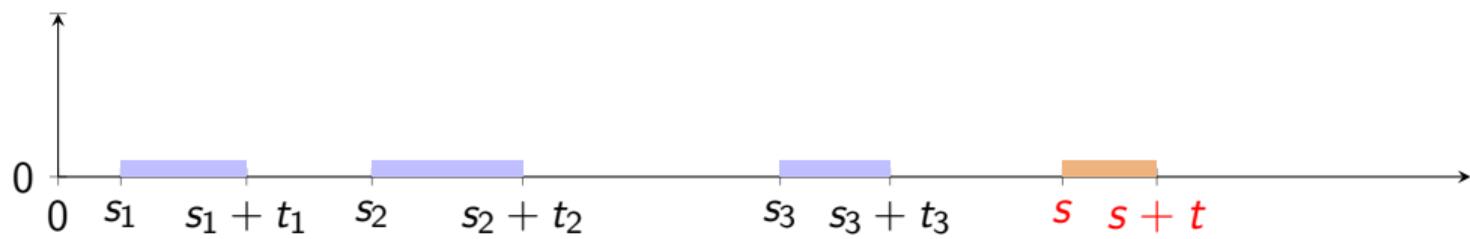
L'**accroissement** du processus sur un intervalle de temps  $(s, s + t]$  est  $N(s + t) - N(s)$ .

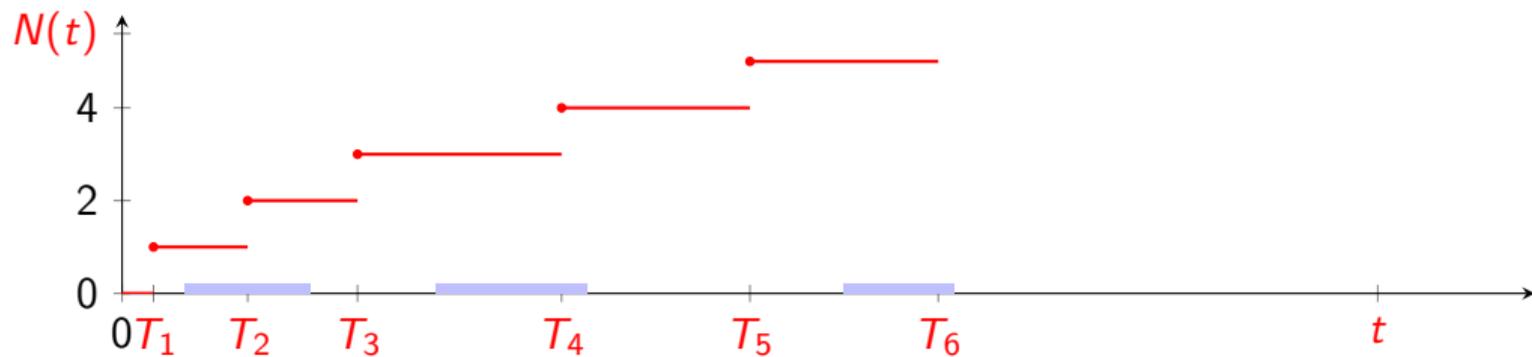
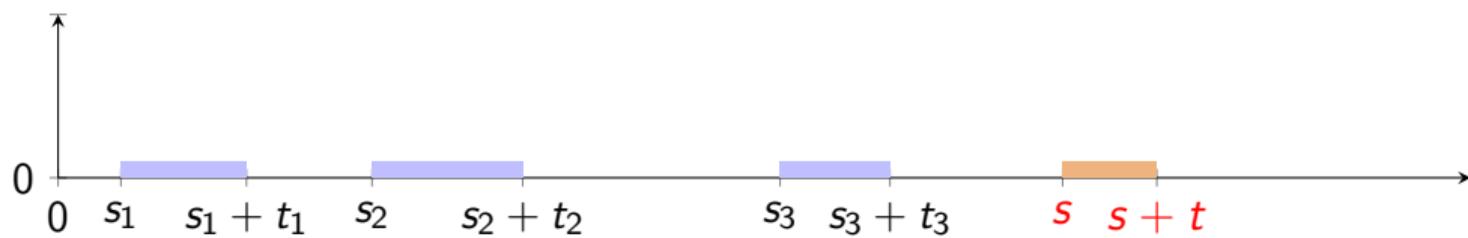
Les **accroissements sont indépendants** si pour tout ensemble d'intervalles disjoints  $I_j = (s_j, s_j + t_j]$ , les  $Y_j = N(s_j + t_j) - N(s_j)$  sont indépendants.

Les **accroissements sont stationnaires** si  $N(s + t) - N(s)$  ne dépend que de  $t$  et pas de  $s$ .

**Exemples:** Nombre de clients arrivant à un magasin jusqu'au temps  $t$ , nombre d'appels d'ambulances, nombre d'achats en ligne d'un produit, nombre d'appels dans un centre d'appels, nombre de buts marqué par un joueur en  $t$  secondes de jeu, etc. Discuter.

On note  $A_j = T_j - T_{j-1}$ . Si les  $A_j$  sont des v.a. i.i.d., on a un **processus de renouvellement**.





# Processus de Poisson

Un **processus de Poisson** est un processus de comptage pour lequel

- (a)  $N(0) = 0$ ;
- (b) les arrivées se font une à une (la prob. de 2 arrivées simultanées est 0);
- (c) pour  $s, t \geq 0$ , la v.a.  $N(s + t) - N(s)$  est indépendante de  $\{N(u), u \leq s\}$   
(i.e., ne dépend pas de l'histoire passée).

# Processus de Poisson

Un **processus de Poisson** est un processus de comptage pour lequel

- (a)  $N(0) = 0$ ;
- (b) les arrivées se font une à une (la prob. de 2 arrivées simultanées est 0);
- (c) pour  $s, t \geq 0$ , la v.a.  $N(s + t) - N(s)$  est indépendante de  $\{N(u), u \leq s\}$   
(i.e., ne dépend pas de l'histoire passée).

**Intuition:** un processus sera approx. Poisson si les événements arrivent au hasard, indépendamment les uns des autres.

Posons  $a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[N(t)]$ .

## Taux cumulé et fonction de taux

Supposons que  $a(t) = \mathbb{E}[N(t)]$  est continue partout, et dérivable sauf possiblement en un nombre fini de points sur tout intervalle fini.

$\lambda(t) = a'(t)$  est la fonction de taux du processus;

$a(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$  est la fonction de taux cumulé.

## Taux cumulé et fonction de taux

Supposons que  $a(t) = \mathbb{E}[N(t)]$  est **continue partout**, et **dérivable** sauf possiblement en un nombre fini de points sur tout intervalle fini.

$\lambda(t) = a'(t)$  est la **fonction de taux** du processus;  
 $a(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$  est la **fonction de taux cumulé**.

Dans ce cas, pour  $h > 0$  très petit, les probabilités d'avoir un saut, plus d'un saut, et aucun saut du processus dans l'intervalle de temps  $(t, t + h]$  sont

$$\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) = 1] = \mathbb{E}[N(t+h)] - \mathbb{E}[N(t)] + o(h) = \lambda(t)h + o(h);$$

$$\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) > 1] = o(h);$$

$$\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) = 0] = 1 - \lambda(t)h + o(h).$$

Rappel: On dit que  $g(h) = o(h)$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} g(h)/h = 0$ .

## Processus de Poisson stationnaire

On a un processus de Poisson **stationnaire** si  $\lambda(t) = \lambda > 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

Définition équivalente:

$\{N(t), t \geq 0\}$  est un **processus de Poisson stationnaire de taux  $\lambda$**  ssi

(a)  $N(0) = 0$ ;

(b) les accroissements du processus sont indépendants; et

(c) pour tout  $s > 0$  et tout  $h > 0$  très petit,

$$\mathbb{P}(N(s+h) - N(s) = 1) = \lambda h + o(h), \text{ et}$$

$$\mathbb{P}(N(s+h) - N(s) > 1) = o(h).$$

## Processus de Poisson stationnaire

On a un processus de Poisson **stationnaire** si  $\lambda(t) = \lambda > 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

Définition équivalente:

$\{N(t), t \geq 0\}$  est un **processus de Poisson stationnaire de taux  $\lambda$**  ssi

(a)  $N(0) = 0$ ;

(b) les accroissements du processus sont indépendants; et

(c) pour tout  $s > 0$  et tout  $h > 0$  très petit,

$$\mathbb{P}(N(s+h) - N(s) = 1) = \lambda h + o(h), \text{ et}$$

$$\mathbb{P}(N(s+h) - N(s) > 1) = o(h).$$

Si  $\lambda = 1$ , on a un **processus de Poisson standard**.

## Standardisation

Un processus de Poisson non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps (changement de variable).

## Standardisation

Un processus de Poisson non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps (changement de variable).

Supposons que l'on veut un processus de Poisson  $N$  de taux  $\lambda(t)$  et de taux cumulé  $a(t)$  au temps  $t$ , pour tout  $t \geq 0$ .

Soit  $N_0 = \{N_0(x), x \geq 0\}$  un processus de Poisson standard (de taux 1) et soit  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  défini par  $N(t) = N_0(a(t))$  pour  $t \geq 0$ . Si les sauts de  $N$  sont aux temps  $T_1, T_2, \dots$  et ceux de  $N_0$  sont à  $X_1, X_2, \dots$ , alors on a  $X_j = a(T_j)$ , i.e.,  $T_j = a^{-1}(X_j)$ .

## Standardisation

Un processus de Poisson non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps (changement de variable).

Supposons que l'on veut un processus de Poisson  $N$  de taux  $\lambda(t)$  et de taux cumulé  $a(t)$  au temps  $t$ , pour tout  $t \geq 0$ .

Soit  $N_0 = \{N_0(x), x \geq 0\}$  un processus de Poisson standard (de taux 1) et soit  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  défini par  $N(t) = N_0(a(t))$  pour  $t \geq 0$ . Si les sauts de  $N$  sont aux temps  $T_1, T_2, \dots$  et ceux de  $N_0$  sont à  $X_1, X_2, \dots$ , alors on a  $X_j = a(T_j)$ , i.e.,  $T_j = a^{-1}(X_j)$ .

**Proposition**  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson de taux cumulé  $a(\cdot)$  ssi  $\{N_0(x), x \geq 0\}$  est un processus de Poisson standard.

## Standardisation

Un processus de Poisson non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps (changement de variable).

Supposons que l'on veut un processus de Poisson  $N$  de taux  $\lambda(t)$  et de taux cumulé  $a(t)$  au temps  $t$ , pour tout  $t \geq 0$ .

Soit  $N_0 = \{N_0(x), x \geq 0\}$  un processus de Poisson standard (de taux 1) et soit  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  défini par  $N(t) = N_0(a(t))$  pour  $t \geq 0$ . Si les sauts de  $N$  sont aux temps  $T_1, T_2, \dots$  et ceux de  $N_0$  sont à  $X_1, X_2, \dots$ , alors on a  $X_j = a(T_j)$ , i.e.,  $T_j = a^{-1}(X_j)$ .

**Proposition**  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson de taux cumulé  $a(\cdot)$  ssi  $\{N_0(x), x \geq 0\}$  est un processus de Poisson standard.

**Preuve.** Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaits pour  $N$  ssi ils le sont pour  $N_0$ , car  $a(\cdot)$  est continue et non-décroissante.

## Standardisation

Un processus de Poisson non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps (changement de variable).

Supposons que l'on veut un processus de Poisson  $N$  de taux  $\lambda(t)$  et de taux cumulé  $a(t)$  au temps  $t$ , pour tout  $t \geq 0$ .

Soit  $N_0 = \{N_0(x), x \geq 0\}$  un processus de Poisson standard (de taux 1) et soit  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  défini par  $N(t) = N_0(a(t))$  pour  $t \geq 0$ . Si les sauts de  $N$  sont aux temps  $T_1, T_2, \dots$  et ceux de  $N_0$  sont à  $X_1, X_2, \dots$ , alors on a  $X_j = a(T_j)$ , i.e.,  $T_j = a^{-1}(X_j)$ .

**Proposition**  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson de taux cumulé  $a(\cdot)$  ssi  $\{N_0(x), x \geq 0\}$  est un processus de Poisson standard.

**Preuve.** Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaits pour  $N$  ssi ils le sont pour  $N_0$ , car  $a(\cdot)$  est continue et non-décroissante.

Reste à vérifier que  $\mathbb{E}[N(t)] = a(t)$  pour  $t > 0$  ssi  $\mathbb{E}[N_0(x)] = x$  pour  $x > 0$ .

## Standardisation

Un processus de Poisson non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps (changement de variable).

Supposons que l'on veut un processus de Poisson  $N$  de taux  $\lambda(t)$  et de taux cumulé  $a(t)$  au temps  $t$ , pour tout  $t \geq 0$ .

Soit  $N_0 = \{N_0(x), x \geq 0\}$  un processus de Poisson standard (de taux 1) et soit  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  défini par  $N(t) = N_0(a(t))$  pour  $t \geq 0$ . Si les sauts de  $N$  sont aux temps  $T_1, T_2, \dots$  et ceux de  $N_0$  sont à  $X_1, X_2, \dots$ , alors on a  $X_j = a(T_j)$ , i.e.,  $T_j = a^{-1}(X_j)$ .

**Proposition**  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson de taux cumulé  $a(\cdot)$  ssi  $\{N_0(x), x \geq 0\}$  est un processus de Poisson standard.

**Preuve.** Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaits pour  $N$  ssi ils le sont pour  $N_0$ , car  $a(\cdot)$  est continue et non-décroissante.

Reste à vérifier que  $\mathbb{E}[N(t)] = a(t)$  pour  $t > 0$  ssi  $\mathbb{E}[N_0(x)] = x$  pour  $x > 0$ .

Si  $\mathbb{E}[N_0(x)] = x$ , alors  $\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[N_0(a(t))] = a(t)$ .

## Standardisation

Un processus de Poisson non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps (changement de variable).

Supposons que l'on veut un processus de Poisson  $N$  de taux  $\lambda(t)$  et de taux cumulé  $a(t)$  au temps  $t$ , pour tout  $t \geq 0$ .

Soit  $N_0 = \{N_0(x), x \geq 0\}$  un processus de Poisson standard (de taux 1) et soit  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  défini par  $N(t) = N_0(a(t))$  pour  $t \geq 0$ . Si les sauts de  $N$  sont aux temps  $T_1, T_2, \dots$  et ceux de  $N_0$  sont à  $X_1, X_2, \dots$ , alors on a  $X_j = a(T_j)$ , i.e.,  $T_j = a^{-1}(X_j)$ .

**Proposition**  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson de taux cumulé  $a(\cdot)$  ssi  $\{N_0(x), x \geq 0\}$  est un processus de Poisson standard.

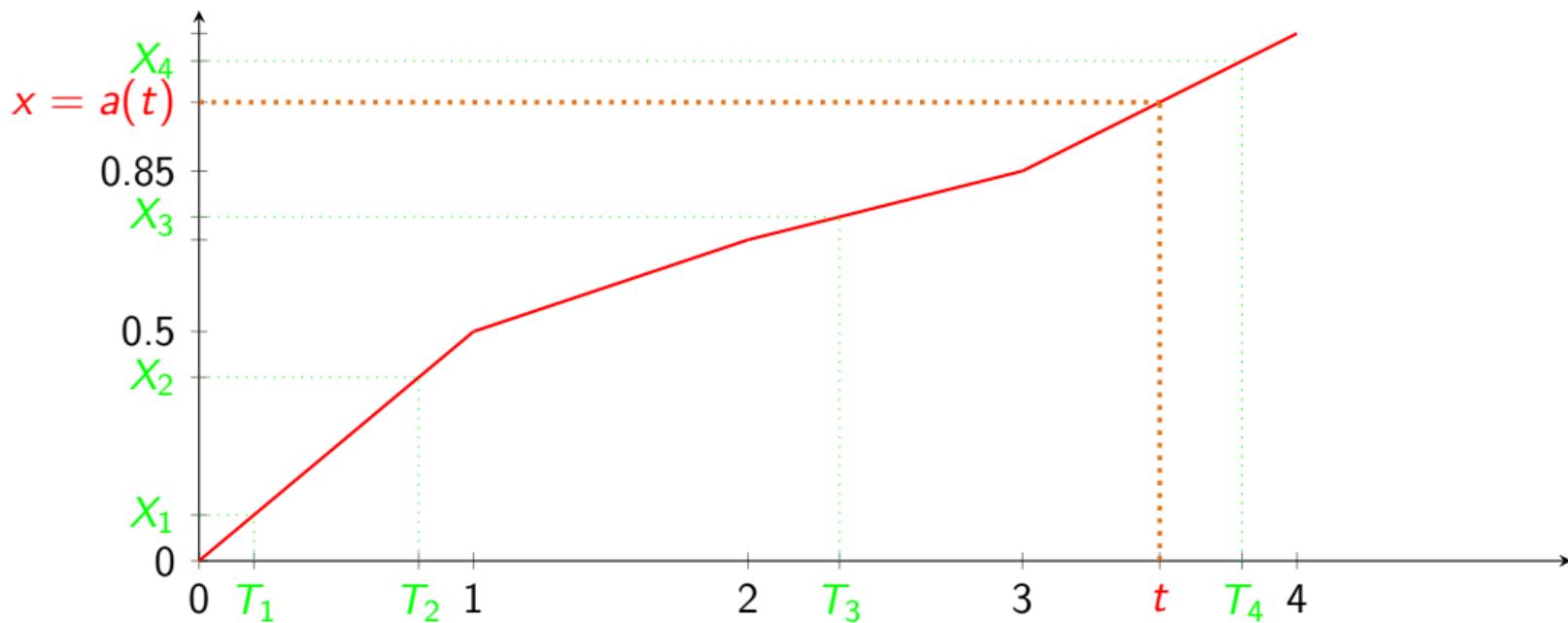
**Preuve.** Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaits pour  $N$  ssi ils le sont pour  $N_0$ , car  $a(\cdot)$  est continue et non-décroissante.

Reste à vérifier que  $\mathbb{E}[N(t)] = a(t)$  pour  $t > 0$  ssi  $\mathbb{E}[N_0(x)] = x$  pour  $x > 0$ .

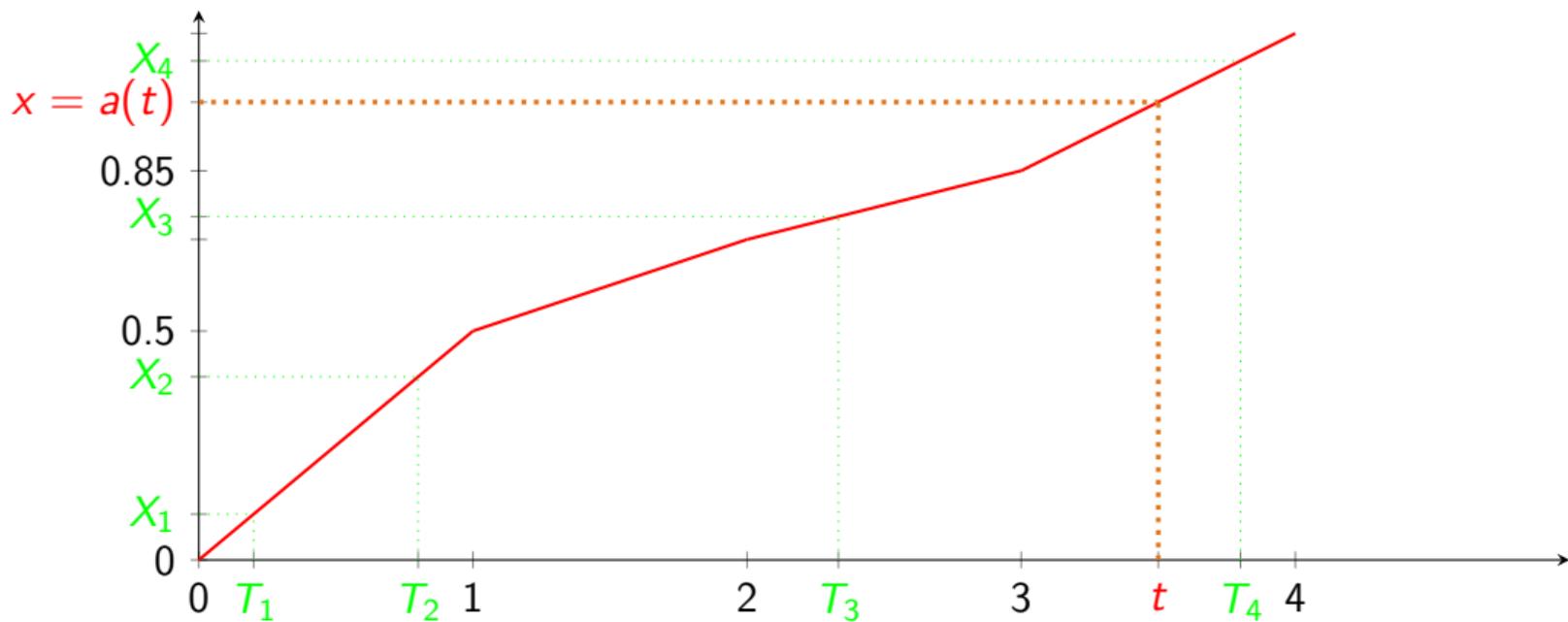
Si  $\mathbb{E}[N_0(x)] = x$ , alors  $\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[N_0(a(t))] = a(t)$ .

Inversement, en posant  $a(t) = x$  on a  $N_0(x) = N(a^{-1}(x))$ .

Donc si  $\mathbb{E}[N(t)] = a(t)$  alors  $\mathbb{E}[N_0(x)] = \mathbb{E}[N(a^{-1}(x))] = a(a^{-1}(x)) = x$ .



Ici, pour  $t = 3.5$ , on a  $x = a(t) = 1.0$  et  $N(3.5) = N_0(a(3.5)) = N_0(1) = 3$ .



Ici, pour  $t = 3.5$ , on a  $x = a(t) = 1.0$  et  $N(3.5) = N_0(a(3.5)) = N_0(1) = 3$ .

Note: Si  $\lambda(\cdot)$  est constant [par morceaux], alors  $a(\cdot)$  est linéaire [par morceaux].

Si  $\lambda(\cdot)$  est linéaire, alors  $a(\cdot)$  est quadratique (plus coûteux à inverser).

**Proposition.** Si  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson stationnaire de taux  $\lambda$  et  $s, t > 0$ , alors  $N(s + t) - N(s)$  suit la **loi de Poisson** de moyenne  $\lambda t$ .

**Proposition.** Si  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson stationnaire de taux  $\lambda$  et  $s, t > 0$ , alors  $N(s + t) - N(s)$  suit la **loi de Poisson** de moyenne  $\lambda t$ .

**Preuve.** Ross (2014) donne une preuve pour le cas stationnaire en utilisant la transformée de Laplace de  $N(t)$ . En gros, il obtient une équation différentielle pour cette transformée de Laplace, puis intègre pour résoudre, et reconnaît que c'est la transformée de Laplace pour une loi de Poisson. Mon argument ici est plus intuitif et plutôt dans l'esprit de sa remarque de la page 301.

**Proposition.** Si  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson stationnaire de taux  $\lambda$  et  $s, t > 0$ , alors  $N(s + t) - N(s)$  suit la **loi de Poisson** de moyenne  $\lambda t$ .

**Preuve.** Ross (2014) donne une preuve pour le cas stationnaire en utilisant la transformée de Laplace de  $N(t)$ . En gros, il obtient une équation différentielle pour cette transformée de Laplace, puis intègre pour résoudre, et reconnaît que c'est la transformée de Laplace pour une loi de Poisson. Mon argument ici est plus intuitif et plutôt dans l'esprit de sa remarque de la page 301.

Sans perte de généralité, on peut supposer  $s = 0$ , car le processus est stationnaire.

L'idée est de diviser l'intervalle  $(0, t]$  en  $n = t/h$  sous-intervalles égaux de longueur  $h$ , pour un  $h$  très petit. Soit  $X_i$  le nombre d'arrivées dans l'intervalle  $i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ .

Les  $X_i$  sont indépendants et  $X_i$  est approximativement Bernoulli( $p$ ) avec  $p = \lambda h$ , et  $N(t) = X_1 + \dots + X_n$  est approximativement binomiale( $n, p$ ). Quand  $h \rightarrow 0$ , on a  $p \rightarrow 0$  avec  $np = \lambda t$ , cette loi binomiale( $n, p$ ) converge vers la loi de Poisson( $\lambda t$ ). Comme on peut prendre  $h$  aussi petit que l'on veut, la loi de  $N(t)$  doit être cette loi de Poisson.

**Proposition.** Si  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson et  $s, t > 0$ , alors  $N(s+t) - N(s)$  suit la loi de Poisson de moyenne

$$a(s+t) - a(s) = \int_s^{s+t} \lambda(x) dx.$$

**Proposition.** Si  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson et  $s, t > 0$ , alors  $N(s+t) - N(s)$  suit la **loi de Poisson** de moyenne

$$a(s+t) - a(s) = \int_s^{s+t} \lambda(x) dx.$$

**Preuve.** En changeant l'échelle de temps on obtient un processus de Poisson stationnaire  $N_0$  de taux 1. L'intervalle  $(s, s+t]$  pour  $N$  correspond à  $(a(s), a(s+t)]$  pour  $N_0$ , et le nombre d'arrivées dans cet intervalle est Poisson de moyenne  $a(s+t) - a(s)$ .

Note: Dans le cas stationnaire, cette moyenne donne bien  $t\lambda$ .

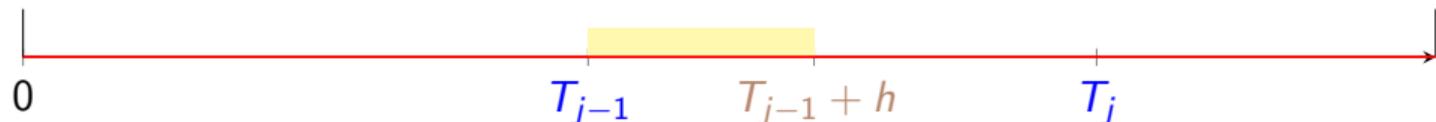
## Inter-arrivées exponentielles

**Proposition.** Un processus de comptage  $\{N(t), t \geq 0\}$ , avec  $N(0) = 0$ , est un processus de Poisson stationnaire de taux  $\lambda$  ssi les v.a.  $A_1, A_2, \dots$  sont i.i.d. de loi  $\text{Expon}(\lambda)$ .

## Inter-arrivées exponentielles

**Proposition.** Un processus de comptage  $\{N(t), t \geq 0\}$ , avec  $N(0) = 0$ , est un processus de Poisson stationnaire de taux  $\lambda$  ssi les v.a.  $A_1, A_2, \dots$  sont i.i.d. de loi  $\text{Expon}(\lambda)$ .

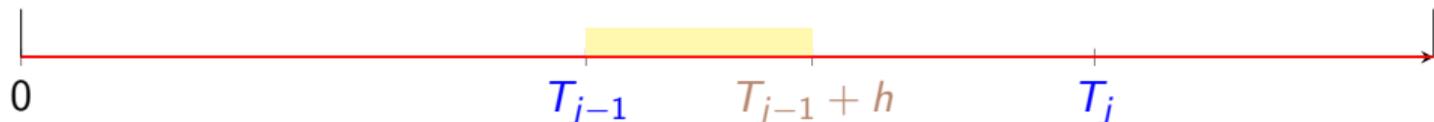
**Preuve.** Plaçons nous à l'instant  $T_{j-1}$  de la  $(j-1)$ -ième arrivée.  $\mathbb{P}(A_j > h)$  est la probabilité qu'il n'y ait aucune arrivée dans l'intervalle de temps  $(T_{j-1}, T_{j-1} + h]$ .



## Inter-arrivées exponentielles

**Proposition.** Un processus de comptage  $\{N(t), t \geq 0\}$ , avec  $N(0) = 0$ , est un processus de Poisson stationnaire de taux  $\lambda$  ssi les v.a.  $A_1, A_2, \dots$  sont i.i.d. de loi  $\text{Expon}(\lambda)$ .

**Preuve.** Plaçons nous à l'instant  $T_{j-1}$  de la  $(j-1)$ -ième arrivée.  $\mathbb{P}(A_j > h)$  est la probabilité qu'il n'y ait aucune arrivée dans l'intervalle de temps  $(T_{j-1}, T_{j-1} + h]$ .



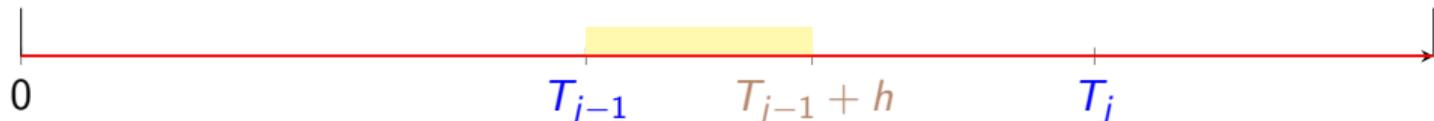
Si on a un processus stationnaire de taux  $\lambda$ , alors  $\mathbb{P}(A_j > h)$  est la prob. qu'une v.a.  $\text{Poisson}(\lambda h)$  soit 0, i.e.,  $\mathbb{P}(A_j > h) = e^{-\lambda h}$ , i.e.,  $A_j \sim \text{Expon}(\lambda)$ .

Les  $A_j$  sont aussi indépendants car les accroissements du processus sont indépendants.

## Inter-arrivées exponentielles

**Proposition.** Un processus de comptage  $\{N(t), t \geq 0\}$ , avec  $N(0) = 0$ , est un processus de Poisson stationnaire de taux  $\lambda$  ssi les v.a.  $A_1, A_2, \dots$  sont i.i.d. de loi  $\text{Expon}(\lambda)$ .

**Preuve.** Plaçons nous à l'instant  $T_{j-1}$  de la  $(j-1)$ -ième arrivée.  $\mathbb{P}(A_j > h)$  est la probabilité qu'il n'y ait aucune arrivée dans l'intervalle de temps  $(T_{j-1}, T_{j-1} + h]$ .



Si on a un processus stationnaire de taux  $\lambda$ , alors  $\mathbb{P}(A_j > h)$  est la prob. qu'une v.a.  $\text{Poisson}(\lambda h)$  soit 0, i.e.,  $\mathbb{P}(A_j > h) = e^{-\lambda h}$ , i.e.,  $A_j \sim \text{Expon}(\lambda)$ .

Les  $A_j$  sont aussi indépendants car les accroissements du processus sont indépendants.

Inversement, si on suppose que les  $A_j$  sont i.i.d.  $\text{Expon}(\lambda)$ , alors la probabilité d'aucune arrivée dans l'intervalle de longueur  $h$  est  $\mathbb{P}(A_j > h) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$ ,

et la probabilité de plus d'une arrivée est inférieure à

$$\mathbb{P}[A_j \leq h \text{ et } A_{j+1} \leq h] = \mathbb{P}[A_j \leq h] \cdot \mathbb{P}[A_{j+1} \leq h] = (1 - e^{-\lambda h})^2 = (\lambda h + o(h))^2 = o(h).$$

De plus, pour les intervalles disjoints les nombres d'arrivées sont indépendants à cause de l'absence de mémoire de la loi exponentielle.  $\square$

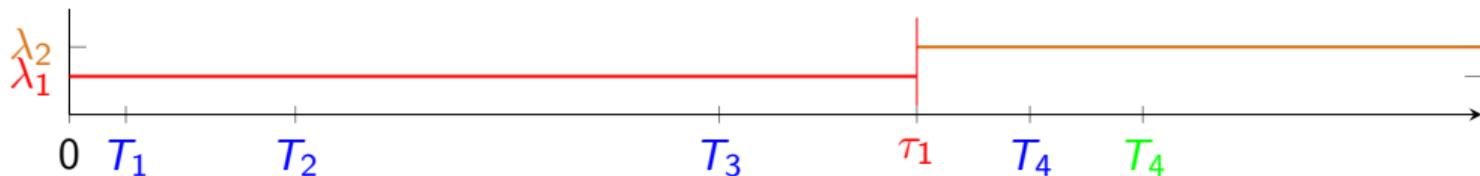
## Simulation d'un processus de Poisson

**Taux d'arrivée constant  $\lambda$ .** Dans le cas stationnaire, il suffit de **générer les inter-arrivées  $A_j$** , qui sont **exponentielles i.i.d.** de taux  $\lambda$  (moyenne  $1/\lambda$ ). On a  $T_j = T_{j-1} + A_j$ .

## Simulation d'un processus de Poisson

**Taux d'arrivée constant  $\lambda$ .** Dans le cas stationnaire, il suffit de **générer les inter-arrivées  $A_j$** , qui sont **exponentielles i.i.d.** de taux  $\lambda$  (moyenne  $1/\lambda$ ). On a  $T_j = T_{j-1} + A_j$ .

**Taux d'arrivée constant par morceaux.** Supposons que le taux d'arrivée est  $\lambda_1 > 0$  jusqu'au temps  $\tau_1$ , puis  $\lambda_2 > 0$  par la suite. On peut alors générer les arrivées selon le taux constant  $\lambda_1$  jusqu'à ce qu'on atteigne le temps  $\tau_1$ . Rendu là, on efface la prochaine arrivée prévue après  $\tau_1$  et on recommence à générer des arrivées selon le taux  $\lambda_2$ . On peut oublier le temps depuis la dernière arrivée avant  $\tau_1$ , puisque la loi exponentielle est sans mémoire: rendu au temps  $\tau_1$ , le temps jusqu'à la prochaine arrivée est exponentiel de taux  $\lambda_2$ . Ici, on efface  $T_4$  et on régénère  $(T_4 - \tau_1) \sim \text{Expon}(\lambda_2)$ .



## Simulation d'un processus de Poisson

Recyclage du vieux  $T_4$ .

Rendu au temps  $\tau_1$ , on a que  $E_1 = T_4 - \tau_1 \sim \text{Expon}(\lambda_1)$ .

Donc  $E_1 \lambda_1 \sim \text{Expon}(1)$ , puis  $E_2 := E_1 \lambda_1 / \lambda_2 \sim \text{Expon}(\lambda_2)$ .

Il suffit donc de remplacer le vieux  $T_4 = \tau_1 + E_1$  par  $T_4 = \tau_1 + E_2$ .

Pas besoin de générer une nouvelle exponentielle!

## Simulation d'un processus de Poisson

Recyclage du vieux  $T_4$ .

Rendu au temps  $\tau_1$ , on a que  $E_1 = T_4 - \tau_1 \sim \text{Expon}(\lambda_1)$ .

Donc  $E_1 \lambda_1 \sim \text{Expon}(1)$ , puis  $E_2 := E_1 \lambda_1 / \lambda_2 \sim \text{Expon}(\lambda_2)$ .

Il suffit donc de remplacer le vieux  $T_4 = \tau_1 + E_1$  par  $T_4 = \tau_1 + E_2$ .

Pas besoin de générer une nouvelle exponentielle!

En général, lorsque le taux d'arrivée est constant par morceaux et passe de  $\lambda_{j-1}$  à  $\lambda_j$ , il suffit de multiplier la durée résiduelle jusqu'à la prochaine arrivée par  $\lambda_{j-1}/\lambda_j$ .

## Simulation d'un processus de Poisson

Recyclage du vieux  $T_4$ .

Rendu au temps  $\tau_1$ , on a que  $E_1 = T_4 - \tau_1 \sim \text{Expon}(\lambda_1)$ .

Donc  $E_1 \lambda_1 \sim \text{Expon}(1)$ , puis  $E_2 := E_1 \lambda_1 / \lambda_2 \sim \text{Expon}(\lambda_2)$ .

Il suffit donc de remplacer le vieux  $T_4 = \tau_1 + E_1$  par  $T_4 = \tau_1 + E_2$ .

Pas besoin de générer une nouvelle exponentielle!

En général, lorsque le taux d'arrivée est constant par morceaux et passe de  $\lambda_{j-1}$  à  $\lambda_j$ , il suffit de multiplier la durée résiduelle jusqu'à la prochaine arrivée par  $\lambda_{j-1}/\lambda_j$ .

Lorsque le taux n'est constant par morceaux, les choses sont plus compliquées en général, mais on peut en principe générer un processus de Poisson standard, puis appliquer la fonction de taux cumulé inverse (pages 7 et 8).

## Loi de probabilité de $T_n$ dans le cas stationnaire

L'instant  $T_n$  de la  $n$ -ième arrivée est une somme de  $n$  v.a. i.i.d  $\text{Expon}(\lambda)$ .

On sait qu'une telle somme suit une loi d'Erlang( $n, \lambda$ ), qui est en fait la loi  $\text{Gamma}(n, \lambda)$ , que nous avons vue précédemment.

D'autre part, on sait que  $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  et que  $N(t) \geq n$  ssi  $T_n \leq t$ .

On peut en déduire, en posant  $T_n = Y$ :

**Proposition.** Si  $X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  et  $Y \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ , alors  $\mathbb{P}[X \geq n] = \mathbb{P}[Y \leq t]$ .

On peut calculer la cdf de la loi de Poisson à partir de celle de la loi gamma et vice-versa.

## Loi de probabilité de $T_n$ dans le cas stationnaire

L'instant  $T_n$  de la  $n$ -ième arrivée est une somme de  $n$  v.a. i.i.d Expon( $\lambda$ ).

On sait qu'une telle somme suit une loi d'Erlang( $n, \lambda$ ), qui est en fait la loi Gamma( $n, \lambda$ ), que nous avons vue précédemment.

D'autre part, on sait que  $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  et que  $N(t) \geq n$  ssi  $T_n \leq t$ .

On peut en déduire, en posant  $T_n = Y$ :

**Proposition.** Si  $X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  et  $Y \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ , alors  $\mathbb{P}[X \geq n] = \mathbb{P}[Y \leq t]$ .

On peut calculer la cdf de la loi de Poisson à partir de celle de la loi gamma et vice-versa.

**Exemple (Ross, page 303).** Des immigrants arrivent à un territoire au taux  $\lambda$  par jour.

(a) Quelle est l'espérance du temps d'arrivée du 10-ième immigrant?

## Loi de probabilité de $T_n$ dans le cas stationnaire

L'instant  $T_n$  de la  $n$ -ième arrivée est une somme de  $n$  v.a. i.i.d Expon( $\lambda$ ).

On sait qu'une telle somme suit une loi d'Erlang( $n, \lambda$ ), qui est en fait la loi Gamma( $n, \lambda$ ), que nous avons vue précédemment.

D'autre part, on sait que  $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  et que  $N(t) \geq n$  ssi  $T_n \leq t$ .

On peut en déduire, en posant  $T_n = Y$ :

**Proposition.** Si  $X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  et  $Y \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ , alors  $\mathbb{P}[X \geq n] = \mathbb{P}[Y \leq t]$ .

On peut calculer la cdf de la loi de Poisson à partir de celle de la loi gamma et vice-versa.

**Exemple (Ross, page 303).** Des immigrants arrivent à un territoire au taux  $\lambda$  par jour.

(a) Quelle est l'espérance du temps d'arrivée du 10-ième immigrant?

$T_{10}$  est une somme de 10 exponentielles. On a  $\mathbb{E}[T_{10}] = 10/\lambda$ .

## Loi de probabilité de $T_n$ dans le cas stationnaire

L'instant  $T_n$  de la  $n$ -ième arrivée est une somme de  $n$  v.a. i.i.d Expon( $\lambda$ ).

On sait qu'une telle somme suit une loi d'Erlang( $n, \lambda$ ), qui est en fait la loi Gamma( $n, \lambda$ ), que nous avons vue précédemment.

D'autre part, on sait que  $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  et que  $N(t) \geq n$  ssi  $T_n \leq t$ .

On peut en déduire, en posant  $T_n = Y$ :

**Proposition.** Si  $X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  et  $Y \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ , alors  $\mathbb{P}[X \geq n] = \mathbb{P}[Y \leq t]$ .

On peut calculer la cdf de la loi de Poisson à partir de celle de la loi gamma et vice-versa.

**Exemple (Ross, page 303).** Des immigrants arrivent à un territoire au taux  $\lambda$  par jour.

(a) Quelle est l'espérance du temps d'arrivée du 10-ième immigrant?

$T_{10}$  est une somme de 10 exponentielles. On a  $\mathbb{E}[T_{10}] = 10/\lambda$ .

(b) Quelle est  $\mathbb{P}(T_{11} - T_{10} > 2)$ ?

## Loi de probabilité de $T_n$ dans le cas stationnaire

L'instant  $T_n$  de la  $n$ -ième arrivée est une somme de  $n$  v.a. i.i.d  $\text{Expon}(\lambda)$ .

On sait qu'une telle somme suit une loi d'Erlang( $n, \lambda$ ), qui est en fait la loi  $\text{Gamma}(n, \lambda)$ , que nous avons vue précédemment.

D'autre part, on sait que  $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  et que  $N(t) \geq n$  ssi  $T_n \leq t$ .

On peut en déduire, en posant  $T_n = Y$ :

**Proposition.** Si  $X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  et  $Y \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ , alors  $\mathbb{P}[X \geq n] = \mathbb{P}[Y \leq t]$ .

On peut calculer la cdf de la loi de Poisson à partir de celle de la loi gamma et vice-versa.

**Exemple (Ross, page 303).** Des immigrants arrivent à un territoire au taux  $\lambda$  par jour.

(a) Quelle est l'espérance du temps d'arrivée du 10-ième immigrant?

$T_{10}$  est une somme de 10 exponentielles. On a  $\mathbb{E}[T_{10}] = 10/\lambda$ .

(b) Quelle est  $\mathbb{P}(T_{11} - T_{10} > 2)$ ?

$A_{11} = T_{11} - T_{10} \sim \text{Expon}(\lambda)$ . On a donc  $\mathbb{P}(A_{11} > 2) = e^{-2\lambda}$ .

## Générer directement le nombre d'arrivées

On sait que pour un processus de Poisson, le **nombre d'arrivées** durant un intervalle  $(s, s + t]$ , soit  $N(s + t) - N(s)$ , est  $\text{Poisson}(a(s + t) - a(s))$ . On peut donc générer ce nombre directement.

## Générer directement le nombre d'arrivées

On sait que pour un processus de Poisson, le **nombre d'arrivées** durant un intervalle  $(s, s + t]$ , soit  $N(s + t) - N(s)$ , est  $\text{Poisson}(a(s + t) - a(s))$ . On peut donc générer ce nombre directement.

Mais comment générer ensuite les **instants** de ces arrivées?

## Générer directement le nombre d'arrivées

On sait que pour un processus de Poisson, le **nombre d'arrivées** durant un intervalle  $(s, s + t]$ , soit  $N(s + t) - N(s)$ , est  $\text{Poisson}(a(s + t) - a(s))$ . On peut donc générer ce nombre directement.

Mais comment générer ensuite les **instants** de ces arrivées?

Dans le cas **stationnaire**, c'est facile:

**Proposition.** Pour un processus de Poisson **stationnaire**, conditionnellement à  $N(s + t) - N(s) = n$ , les temps de ces  $n$  arrivées ont la même loi que  $n$  v.a. i.i.d.  $\text{Uniforme}(s, s + t)$ . Il suffit donc de générer  $n$  v.a. indépendantes selon la loi uniforme sur  $(s, s + t)$  et les trier en ordre croissant.

On génère  $U_1, \dots, U_n \sim \text{Uniforme}(0, 1)$  indépendantes, on pose  $X_i = s + tU_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ , puis on trie les  $X_i$  en ordre croissant et ils deviennent les instants des arrivées.

## Superposition et décomposition

**Superposition** de processus de Poisson: Si  $N_1(\cdot), \dots, N_k(\cdot)$  sont des processus de Poisson indépendants de taux  $\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_k(\cdot)$ , alors  $N(\cdot) = N_1(\cdot) + \dots + N_k(\cdot)$  est un processus de Poisson de taux  $\lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot) + \dots + \lambda_k(\cdot)$ .

# Superposition et décomposition

**Superposition** de processus de Poisson: Si  $N_1(\cdot), \dots, N_k(\cdot)$  sont des processus de Poisson indépendants de taux  $\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_k(\cdot)$ , alors  $N(\cdot) = N_1(\cdot) + \dots + N_k(\cdot)$  est un processus de Poisson de taux  $\lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot) + \dots + \lambda_k(\cdot)$ .

**Décomposition**: inversement, si  $N(\cdot)$  est un processus de Poisson de taux  $\lambda(\cdot)$  et si chaque arrivée est de type  $j$  avec probabilité  $p_j$ , (indépendamment du temps et du passé), et  $N_j(t)$  est le nombre d'arrivées de type  $j$  durant  $(0, t]$ , alors  $N_j(\cdot)$  est un processus de Poisson de taux  $p_j\lambda(\cdot)$ .

# Superposition et décomposition

**Superposition** de processus de Poisson: Si  $N_1(\cdot), \dots, N_k(\cdot)$  sont des processus de Poisson indépendants de taux  $\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_k(\cdot)$ , alors  $N(\cdot) = N_1(\cdot) + \dots + N_k(\cdot)$  est un processus de Poisson de taux  $\lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot) + \dots + \lambda_k(\cdot)$ .

**Décomposition**: inversement, si  $N(\cdot)$  est un processus de Poisson de taux  $\lambda(\cdot)$  et si chaque arrivée est de type  $j$  avec probabilité  $p_j$ , (indépendamment du temps et du passé), et  $N_j(t)$  est le nombre d'arrivées de type  $j$  durant  $(0, t]$ , alors  $N_j(\cdot)$  est un processus de Poisson de taux  $p_j\lambda(\cdot)$ .

Les preuves de ces propriétés sont assez simples. Voir Ross (2014), page 304.

**Exemple.** Des clients arrivent à un magasin de détail selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  par heure. Chaque client qui arrive achète une paire de souliers avec probabilité  $p$ .  
Quelle est la probabilité que personne n'achète de souliers durant les 8 prochaines heures?

**Exemple.** Des clients arrivent à un magasin de détail selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  par heure. Chaque client qui arrive achète une paire de souliers avec probabilité  $p$ . Quelle est la probabilité que personne n'achète de souliers durant les 8 prochaines heures?

Le taux d'arrivée des acheteurs de souliers est  $p\lambda$ . La probabilité qu'il n'y en ait aucun durant les 8 prochaines heures est  $e^{-8p\lambda}$ .

**Exemple.** Des clients arrivent à un magasin de détail selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  par heure. Chaque client qui arrive achète une paire de souliers avec probabilité  $p$ . Quelle est la probabilité que personne n'achète de souliers durant les 8 prochaines heures?

Le taux d'arrivée des acheteurs de souliers est  $p\lambda$ . La probabilité qu'il n'y en ait aucun durant les 8 prochaines heures est  $e^{-8p\lambda}$ .

Quelle est la probabilité d'en vendre au moins trois paires?

**Exemple.** Des clients arrivent à un magasin de détail selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  par heure. Chaque client qui arrive achète une paire de souliers avec probabilité  $p$ . Quelle est la probabilité que personne n'achète de souliers durant les 8 prochaines heures?

Le taux d'arrivée des acheteurs de souliers est  $p\lambda$ . La probabilité qu'il n'y en ait aucun durant les 8 prochaines heures est  $e^{-8p\lambda}$ .

Quelle est la probabilité d'en vendre au moins trois paires?

Le nombre  $X$  de paires vendues est une v.a. de Poisson( $8p\lambda$ ).

La probabilité de vendre au moins 3 paires est

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - e^{-8p\lambda} - (8p\lambda)e^{-8p\lambda} - (8p\lambda)^2 e^{-8p\lambda} / 2.$$

## Exemple: acceptation d'une offre.

On a un item à vendre et on reçoit des offres  $X$  selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ .

Les offres suivent une loi de probabilité de densité  $f$ , fonction de répartition  $F$ , et fonction de survie  $\bar{F}$  définie par  $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$ .

Chaque offre est refusée ou acceptée. Première offre acceptée: on vend.

Tant qu'on ne vend pas, on paye un coût d'entreposage de  $c$  par unité de temps.

## Exemple: acceptation d'une offre.

On a un item à vendre et on reçoit des offres  $X$  selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . Les offres suivent une loi de probabilité de densité  $f$ , fonction de répartition  $F$ , et fonction de survie  $\bar{F}$  définie par  $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$ .

Chaque offre est refusée ou acceptée. Première offre acceptée: on vend.

Tant qu'on ne vend pas, on paye un coût d'entreposage de  $c$  par unité de temps.

**Politique de décision:** On accepte la première offre  $X > y$ . **Comment optimiser  $y$ ?**

## Exemple: acceptation d'une offre.

On a un item à vendre et on reçoit des offres  $X$  selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . Les offres suivent une loi de probabilité de densité  $f$ , fonction de répartition  $F$ , et fonction de survie  $\bar{F}$  définie par  $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$ .

Chaque offre est refusée ou acceptée. Première offre acceptée: on vend.

Tant qu'on ne vend pas, on paye un coût d'entreposage de  $c$  par unité de temps.

**Politique de décision:** On accepte la première offre  $X > y$ . **Comment optimiser  $y$ ?**

Pour  $y$  donné, le revenu  $R(y)$  (aléatoire) est le montant  $X_a$  de l'offre acceptée, moins  $c$  fois le temps  $T_a$  où elle est acceptée. On veut **maximiser**  $\mathbb{E}[R(y)] = \mathbb{E}[X_a] - c\mathbb{E}[T_a]$ .

## Exemple: acceptation d'une offre.

On a un item à vendre et on reçoit des offres  $X$  selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . Les offres suivent une loi de probabilité de densité  $f$ , fonction de répartition  $F$ , et fonction de survie  $\bar{F}$  définie par  $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$ .

Chaque offre est refusée ou acceptée. Première offre acceptée: on vend.

Tant qu'on ne vend pas, on paye un coût d'entreposage de  $c$  par unité de temps.

**Politique de décision:** On accepte la première offre  $X > y$ . **Comment optimiser  $y$ ?**

Pour  $y$  donné, le revenu  $R(y)$  (aléatoire) est le montant  $X_a$  de l'offre acceptée, moins  $c$  fois le temps  $T_a$  où elle est acceptée. On veut maximiser  $\mathbb{E}[R(y)] = \mathbb{E}[X_a] - c\mathbb{E}[T_a]$ . On a

$$\mathbb{E}[X_a] = \mathbb{E}[X \mid X > y] = \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{I}[X > y]]}{\mathbb{P}[X > y]} = \frac{1}{\bar{F}(y)} \int_y^\infty x f(x) dx.$$

## Exemple: acceptation d'une offre.

On a un item à vendre et on reçoit des offres  $X$  selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . Les offres suivent une loi de probabilité de densité  $f$ , fonction de répartition  $F$ , et fonction de survie  $\bar{F}$  définie par  $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$ .

Chaque offre est refusée ou acceptée. Première offre acceptée: on vend.

Tant qu'on ne vend pas, on paye un coût d'entreposage de  $c$  par unité de temps.

**Politique de décision:** On accepte la première offre  $X > y$ . **Comment optimiser  $y$ ?**

Pour  $y$  donné, le revenu  $R(y)$  (aléatoire) est le montant  $X_a$  de l'offre acceptée, moins  $c$  fois le temps  $T_a$  où elle est acceptée. On veut maximiser  $\mathbb{E}[R(y)] = \mathbb{E}[X_a] - c\mathbb{E}[T_a]$ . On a

$$\mathbb{E}[X_a] = \mathbb{E}[X \mid X > y] = \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{I}[X > y]]}{\mathbb{P}[X > y]} = \frac{1}{\bar{F}(y)} \int_y^\infty xf(x)dx.$$

Une offre quelconque est acceptable avec probabilité  $p = \mathbb{P}[X > y] = \bar{F}(y)$ .

Les offres acceptables arrivent selon un processus de Poisson de taux  $p\lambda$ , de sorte que  $T_a \sim \text{Expon}(p\lambda)$ , donc  $\mathbb{E}[T_a] = 1/(p\lambda) = 1/(\bar{F}(y)\lambda)$ .

Ainsi,

$$r(y) = \mathbb{E}[R(y)] = \mathbb{E}[X_a] - c\mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{\bar{F}(y)} \left( \int_y^\infty xf(x)dx - \frac{c}{\lambda} \right).$$

On a

$$r'(y) = \frac{\bar{F}(y) \frac{d}{dy} \int_y^\infty xf(x)dx - \left( \int_y^\infty xf(x)dx - c/\lambda \right) (-f(y))}{\bar{F}(y)^2} = 0$$

ssi

$$\bar{F}(y)yf(y) = \left( \int_y^\infty xf(x)dx - c/\lambda \right) f(y)$$

ssi

$$\bar{F}(y)y = \int_y^\infty xf(x)dx - c/\lambda$$

ssi

$$\int_y^\infty (x - y)f(x)dx = c/\lambda.$$

On cherche  $y = y^*$  solution (ou racine) de  $\int_y^\infty (x - y)f(x)dx = c/\lambda$ .

Le terme de gauche est décroissant en  $y$  et va de  $\int_0^\infty xf(x)dx = \mathbb{E}[X]$  pour  $y = 0$  à  $-\infty$  pour  $y \rightarrow \infty$ . Donc si  $\mathbb{E}[X] > c/\lambda$ , on peut trouver une racine  $y^*$  de l'équation et c'est le seuil optimal. Le revenu espéré optimal est alors égal à la valeur du seuil:

$$\begin{aligned} r(y^*) = \mathbb{E}[R(y^*)] &= \frac{1}{\bar{F}(y^*)} \left( \int_{y^*}^\infty xf(x)dx - c/\lambda \right) \\ &= \frac{1}{\bar{F}(y^*)} \left( \int_{y^*}^\infty (x - y^*)f(x)dx - c/\lambda + y^* \int_{y^*}^\infty f(x)dx \right) \\ &= \frac{1}{\bar{F}(y^*)} y^* \int_{y^*}^\infty f(x)dx = y^*. \end{aligned}$$

**Intuition:** Si on rejette une offre, c'est comme si on recommençait à 0 et le revenu espéré est  $r(y^*)$ . Il est rentable d'accepter l'offre ssi elle dépasse  $r(y^*)$ . Donc  $y^* = r(y^*)$ . Autrement dit,  $y^*$  est la racine de  $y = r(y)$ . Pas besoin de dériver  $r(y)$  pour comprendre cela!

Si  $\mathbb{E}[X] \leq c/\lambda$ , il vaut mieux se débarrasser de l'item immédiatement en le donnant, sans même attendre la première offre.

## Réclamations d'assurance

Une compagnie d'assurances reçoit des réclamations selon un processus de Poisson stationnaire  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  de taux  $\lambda$ . Soit  $T_i$  l'instant de la  $i$ -ième réclamation et soit  $C_i$  son montant, pour  $i = 1, 2, \dots$ . Supposons que les  $C_i$  sont des v.a. indépendantes de cdf  $G$ , i.e.,  $G(x) = \mathbb{P}[C_i \leq x]$ , et de moyenne  $\mu$ .

Les coûts futurs sont assujettis à un **taux d'actualisation**  $\rho > 0$ , ce qui veut dire que la **valeur actuelle** d'un coût  $C$  payé dans  $s$  unités de temps est  $e^{-\rho s} C$ .

Le coût total actualisé des réclamations jusqu'au temps  $t$  sera alors

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\rho T_i} C_i.$$

Comment calculer  $\mathbb{E}[D(t)]$ ? On sait que  $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ . On décompose

$$\mathbb{E}[D(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[D(t) \mid N(t) = n] \mathbb{P}[N(t) = n] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[D(t) \mid N(t) = n] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Conditionnellement à  $N(t) = n$ , les  $n$  instants des réclamations ont la même loi que  $n$  v.a. aléatoires i.i.d. Uniforme(0,  $t$ ), triées en ordre croissant. Notons  $tU_1, \dots, tU_n$  ces v.a. uniformes **non triées**, où les  $U_i$  sont i.i.d. Uniforme(0, 1). On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D(t) \mid N(t) = n] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{-\rho T_i} C_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{-\rho T_i}] \mathbb{E}[C_i] = \mu \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{-\rho t U_i}] \\ &= n\mu \mathbb{E}[e^{-\rho t U}] = n\mu \int_0^1 e^{-\rho t u} du = n\mu \frac{(1 - e^{-\rho t})}{\rho t}, \end{aligned}$$

puis, puisque  $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$ ,

$$\mathbb{E}[D(t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[D(t) \mid N(t)]] = \mathbb{E}\left[N(t)\mu \frac{(1 - e^{-\rho t})}{\rho t}\right] = \frac{\lambda\mu}{\rho} (1 - e^{-\rho t}).$$

La propriété d'uniformité conditionnelle des  $T_i$  est très utile ici.

## Un autre problème d'optimisation

Des commandes nous arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  durant l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Au temps  $T$ , on va livrer (ou mettre à la poste) toutes les commandes reçues. On veut maintenant choisir (à l'avance) un temps intermédiaire  $t < T$  auquel on va faire une livraison additionnelle, pour les commandes reçues durant  $[0, t]$ .

Quelle est la valeur de  $t$  qui minimise le délai espéré de livraison total pour tous les items?

## Un autre problème d'optimisation

Des commandes nous arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  durant l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Au temps  $T$ , on va livrer (ou mettre à la poste) toutes les commandes reçues. On veut maintenant choisir (à l'avance) un temps intermédiaire  $t < T$  auquel on va faire une livraison additionnelle, pour les commandes reçues durant  $[0, t]$ .

Quelle est la valeur de  $t$  qui minimise le délai espéré de livraison total pour tous les items?

Intuitivement, ce pourrait être  $t = T/2$ , mais peut-on le prouver?

## Un autre problème d'optimisation

Des commandes nous arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  durant l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Au temps  $T$ , on va livrer (ou mettre à la poste) toutes les commandes reçues. On veut maintenant choisir (à l'avance) un temps intermédiaire  $t < T$  auquel on va faire une livraison additionnelle, pour les commandes reçues durant  $[0, t]$ .

Quelle est la valeur de  $t$  qui minimise le délai espéré de livraison total pour tous les items?

Intuitivement, ce pourrait être  $t = T/2$ , mais peut-on le prouver?

Le nombre de commandes durant  $[0, t]$  est  $\text{Poisson}(\lambda t)$  et le temps espéré d'attente pour chacune est  $t/2$ , donc le temps espéré d'attente totale pour cette période est  $\lambda t^2/2$ . De même le temps espéré d'attente totale pour la période  $(t, T]$  est  $\lambda(T - t)^2/2$ . Donc la fonction à minimiser est

$$\lambda t^2/2 + \lambda(T - t)^2/2.$$

On dérive par rapport à  $t$  et on trouve pour quel  $t$  la dérivée est 0. Cela donne:

$$0 = \lambda(t + (T - t)(-1)) = \lambda(2t - T), \quad \text{donc } t = T/2.$$

## Un autre problème d'optimisation

Des commandes nous arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  durant l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Au temps  $T$ , on va livrer (ou mettre à la poste) toutes les commandes reçues. On veut maintenant choisir (à l'avance) un temps intermédiaire  $t < T$  auquel on va faire une livraison additionnelle, pour les commandes reçues durant  $[0, t]$ .

Quelle est la valeur de  $t$  qui minimise le délai espéré de livraison total pour tous les items?

Intuitivement, ce pourrait être  $t = T/2$ , mais peut-on le prouver?

Le nombre de commandes durant  $[0, t]$  est  $\text{Poisson}(\lambda t)$  et le temps espéré d'attente pour chacune est  $t/2$ , donc le temps espéré d'attente totale pour cette période est  $\lambda t^2/2$ . De même le temps espéré d'attente totale pour la période  $(t, T]$  est  $\lambda(T - t)^2/2$ . Donc la fonction à minimiser est

$$\lambda t^2/2 + \lambda(T - t)^2/2.$$

On dérive par rapport à  $t$  et on trouve pour quel  $t$  la dérivée est 0. Cela donne:

$$0 = \lambda(t + (T - t)(-1)) = \lambda(2t - T), \quad \text{donc } t = T/2.$$

**Plusieurs autres applications:** Clients qui arrivent pour une télécabine, un autobus, etc.

**Versions plus intéressantes:** Taux d'arrivée qui dépend du temps, taux aléatoire, etc.

## Estimer le nombre espéré de clients perdus

Des clients arrivent à un système de service selon un processus de Poisson de taux  $\lambda(t)$  au temps  $t$ . Les durées de service suivent une loi quelconque, possiblement complexe, mais on suppose qu'on sait simuler le système. Il y a une limite sur le nombre de clients dans le système. Chaque client qui arrive quand le système est plein est perdu.

On veut estimer  $\mathbb{E}[L(T)]$ , où  $L(t)$  est le nombre de clients perdus durant  $[0, t]$ .

## Estimer le nombre espéré de clients perdus

Des clients arrivent à un système de service selon un processus de Poisson de taux  $\lambda(t)$  au temps  $t$ . Les durées de service suivent une loi quelconque, possiblement complexe, mais on suppose qu'on sait simuler le système. Il y a une limite sur le nombre de clients dans le système. Chaque client qui arrive quand le système est plein est perdu.

On veut estimer  $\mathbb{E}[L(T)]$ , où  $L(t)$  est le nombre de clients perdus durant  $[0, t]$ .

**Méthode Monte Carlo standard:** On simule le système et on calcule  $L(T)$ . On répète cela  $n$  fois pour obtenir  $n$  réalisations indépendantes de  $L(T)$ , disons  $L_1, \dots, L_n$ , puis on calcule un intervalle de confiance pour  $\mathbb{E}[L(T)]$  à partir de ces valeurs.

## Estimer le nombre espéré de clients perdus

Des clients arrivent à un système de service selon un processus de Poisson de taux  $\lambda(t)$  au temps  $t$ . Les durées de service suivent une loi quelconque, possiblement complexe, mais on suppose qu'on sait simuler le système. Il y a une limite sur le nombre de clients dans le système. Chaque client qui arrive quand le système est plein est perdu.

On veut estimer  $\mathbb{E}[L(T)]$ , où  $L(t)$  est le nombre de clients perdus durant  $[0, t]$ .

**Méthode Monte Carlo standard:** On simule le système et on calcule  $L(T)$ . On répète cela  $n$  fois pour obtenir  $n$  réalisations indépendantes de  $L(T)$ , disons  $L_1, \dots, L_n$ , puis on calcule un intervalle de confiance pour  $\mathbb{E}[L(T)]$  à partir de ces valeurs.

**Mieux: Monte Carlo conditionnel:** Effacer de la simulation les clients perdus (cacher  $L(T)$ ), et remplacer l'estimateur  $L(T)$  par  $\mathbb{E}[L(T) | \mathcal{G}]$ , où  $\mathcal{G}$  représente le reste de l'information.

Le processus d'arrivée des clients perdus (invisibles) est alors un processus de Poisson de taux  $\lambda(t)P(t)$  où  $P(t) = \mathbb{I}[\text{le système est plein au temps } t]$  (observable). L'estimateur CMC (sans biais) est:

$$\mathbb{E}[L(T) | \mathcal{G}] = \int_0^T \lambda(t)P(t)dt.$$

## Taux d'arrivée aléatoire

Si  $\{\lambda(t), t \geq 0\}$  est lui-même un processus stochastique,  $\{N(t), t \geq 0\}$  devient un processus de Poisson **doublement stochastique**, ou processus de **Cox**.

Dans ce cas,  $\{N(t), t \geq 0\}$  lui-même n'est un processus de Poisson que **conditionnellement** à  $\{\lambda(t), t \geq 0\}$ .

Exemples: centre d'appel, comptoir de glaces, etc.

## Processus de Poisson dans $\mathbb{R}^d$

Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$  tel que  $\text{vol}(\mathcal{A}) < \infty$ .

On a des points qui apparaissent au hasard dans  $\mathcal{A}$ .

Cela constitue un processus de Poisson stationnaire (de taux constant) dans  $\mathcal{A}$  si pour chaque sous-ensemble mesurable  $D \subset \mathcal{A}$  de volume  $h$ , le nombre de points dans  $D$  est une v.a. de Poisson de taux  $\lambda h$ , et pour des sous-ensembles disjoints les nombres de points dans les différents sous-ensembles sont indépendants.

## Processus de Poisson dans $\mathbb{R}^d$

Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$  tel que  $\text{vol}(\mathcal{A}) < \infty$ .

On a des points qui apparaissent au hasard dans  $\mathcal{A}$ .

Cela constitue un processus de Poisson stationnaire (de taux constant) dans  $\mathcal{A}$  si pour chaque sous-ensemble mesurable  $D \subset \mathcal{A}$  de volume  $h$ , le nombre de points dans  $D$  est une v.a. de Poisson de taux  $\lambda h$ , et pour des sous-ensembles disjoints les nombres de points dans les différents sous-ensembles sont indépendants.

### Exemples d'application:

Positions des orignaux, ou lynx, ou renards, ou lièvres, etc., sur un territoire.

Positions des nids de poules sur la chaussée?

Etc.

## Processus de Poisson composé

À chaque instant d'arrivée  $T_i$ ,  $N(\cdot)$  augmente (saute) de  $D_i$ , où les  $D_i$  sont i.i.d. et indépendants des  $T_i$  (arrivées en groupes).

## Processus de Poisson composé

À chaque instant d'arrivée  $T_i$ ,  $N(\cdot)$  augmente (saute) de  $D_i$ , où les  $D_i$  sont i.i.d. et indépendants des  $T_i$  (arrivées en groupes).

**Exemples.** Voir Ross (2014), page 328, exemples 5.26 et 5.28.