Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 1

Devoir à remettre le *lundi 16 septembre 2024, avant le début du cours.*

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Rendez votre devoir dans Studium sous forme d'un fichier .pdf. Il est très important de **bien expliquer** tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera davantage d'importance à la clarté des explications qu'à la réponse comme telle. Attention au plagiat: il est interdit de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres.

1. (10 points)

Dans une file d'attente à un seul serveur, supposons que les clients arrivent selon un processus de Poisson (i.e., au hasard et indépendamment les uns des autres) à un taux de $\lambda = 20$ clients par heure, que les durées de service sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de moyenne $1/\mu$ minutes, et que les clients sont servis par ordre d'arrivée. Quel sera le temps d'attente moyen par client pour $1/\mu = 1, 2, 2.9, 2.99,$ et 3.1 ?

2. (10 points)

Soient b et c deux constantes réelles positives et soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme (continue) sur l'intervalle $[0, b)$.

(a) Quelle est la fonction de répartition de X ?

(b) Si $Y = (X + c) \bmod b$, quelle est la fonction de répartition de Y ? De quelle loi s'agit-il? Vous devez bien sûr démontrer votre réponse. Note: le "mod b " ici veut dire que l'on soustrait ou ajoute b autant de fois qu'il faut pour obtenir $0 \leq Y < b$.

3. (10 points)

On veut générer une variable aléatoire qui prend la valeur 0 ou 1, chacune avec probabilité $1/2$, en tirant à pile ou face. Pour cela, on dispose uniquement d'une pièce biaisée, qui tombe sur F avec une probabilité p inconnue, et sur P avec probabilité $(1 - p)$. On considère les deux procédures suivantes.

(a) On lance la pièce deux fois. Si on obtient PF, on retourne 0; si on obtient FP, on retourne 1; si on obtient FF ou PP, on recommence.

(b) On lance jusqu'à ce que le dernier tirage soit différent du précédent. Si on a P...PF on retourne 0, si on a F...FP on retourne 1.

Dans chacun des deux cas, est-ce que le résultat est équitable ou pas? Dans chaque cas, vous devez le démontrer.

4. (10 points)

Une petite ville est divisée en quatre quartiers: A, B, C, D, qui ont des populations respectives de 1500, 1800, 3200, et 500. Le nombre de personnes ayant déjà fréquenté l'université dans

chacun de ces quartiers est de 150, 120, 60, et 100. Si vous rencontrez une personne au hasard venant de cette ville et qu'elle a fréquenté l'université, quelle est la probabilité qu'elle vienne du quartier X pour $X = A, B, C, D$ (on veut la probabilité pour chacun des quartiers)? Quelle est la somme de ces probabilités?

5. (10 points)

Un vol d'Air Canada a 220 sièges, mais la demande dépasse le nombre de sièges disponibles. Considérant que certains passagers qui achètent un billet ne vont pas se présenter pour leur vol, la compagnie décide de faire de la *sur-réservation* ("overbooking") et de vendre 226 billets. Soit $X \geq 0$ le nombre de passagers qui vont se présenter avec un billet et qui n'auront pas de siège. En supposant que chaque détenteur de billet a 3% des chances de ne pas se présenter et que ces décisions sont indépendantes, ce X est une variable aléatoire qui suit quelle loi de probabilité? Attention: Notez que X ne peut pas prendre une valeur négative. Il faut d'abord bien identifier l'ensemble des valeurs que X peut prendre. Vous pouvez ensuite trouver une expression pour $\mathbb{P}[X = x]$ pour les valeurs positives de x , puis une expression pour $\mathbb{P}[X = 0]$. On vous demande ensuite de calculer les valeurs numériques de ces probabilités, avec autant de précision que possible. Si vous ne pouvez pas calculer les valeurs exactes, vous pouvez approximer $\mathbb{P}[X = x]$ pour les valeurs positives de x en utilisant une approximation appropriée de la loi exacte.

Supposons maintenant que le gestionnaire décide plutôt de vendre le plus grand nombre de billets possible, mais sous la contrainte que $\mathbb{P}[X > 0] \leq 0.1$. Quel est le nombre maximal de billets qui satisfait cette contrainte?