**IFT-3655: Modèles Stochastiques** **Automne 2024**

Prof. Pierre L'Ecuyer

# DEVOIR 2

Devoir à remettre le *lundi 23 septembre 2024, avant le début du cours*.

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Rendez votre devoir dans Studium sous forme d'un fichier .pdf. Il est très important de **bien expliquer** tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera davantage d'importance à la clarté des explications qu'à la réponse comme telle. Attention au plagiat: il est interdit de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres.

---

**1.** *(10 points)*

(a) Montrez que si $X \sim \text{Normale}(\mu, \sigma^2)$, alors la fonction génératrice des moments de $X$ est $M_X(t) = \exp[\mu t + \sigma^2 t^2/2]$.

(b) Utilisez ce résultat pour montrer que si $X_1, \ldots, X_k$ sont indépendantes avec $X_i \sim \text{Normale}(\mu_i, \sigma_i^2)$, et si $Y = X_1 + \cdots + X_k$, alors $Y \sim \text{Normale}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_k$ et $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_k^2$.

**3.** *(10 points)*

Un médecin doit examiner des patients dans un service d'urgence. Supposons que les durées de ces examens sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi normale de moyenne $\mu = 12$ minutes avec un écart-type de $\sigma = 3$ minutes.

(a) Si le médecin soit examiner 30 patients, quelle est la probabilité que la durée totale des examens dépasse 7 heures?

(b) Quelle est la probabilité qu'après 2 heures, il aura fini d'examiner au moins 10 patients?

(c) Quelles sont les valeurs en (a) et (b) si l'écart-type est plutôt de $\sigma = 5$ minutes?

(d) Quelle sera la valeur en (a) si la durée d'un examen suit plutôt une loi exponentielle avec une moyenne de 12 minutes? Si vous ne savez pas comment calculer la valeur exacte, vous pouvez au moins donner une approximation basée sur le théorème central limite.

**3.** *(10 points)*

On a une série 4 de 7 entre les équipes A et B: la première équipe qui a 4 victoires remporte la série (comme dans les séries de la Coupe Stanley au hockey). L'équipe A gagne chaque partie avec probabilité $p$, indépendamment du résultat des autres parties. Quelle est l'espérance du nombre de parties qu'il faut jouer pour déterminer le vainqueur?

**4.** *(10 points)*

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de moyennes $\mu_x$ et $\mu_y$ et de variances $\sigma_x^2$ et $\sigma_y^2$. Donnez (et prouvez) des expressions pour $\mathbb{E}[XY]$ et $\text{Var}[XY]$.

**5.** *(10 points)*

Des capsules de bière ont un numéro sous la capsule. Il y a $m$ numéros différents et chacun a une probabilité $1/m$ pour chaque bouteille, indépendamment des autres. Soit $X$ le nombre de bouteilles que l'on doit ouvrir pour avoir une collection complète. Donnez une expression pour $\mathbb{E}[X]$ en fonction de $m$.

Suggestion: Montrez que l'on peut écrire $X = \sum_{j=0}^{m-1}(1 + T_j)$ oú $T_0 = 0$ et les autres $T_j$ sont des variables aléatoires géométriques indépendantes.