IFT-3655: Modèles Stochastiques **Automne 2024**

Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 4

Devoir à remettre le *vendredi 18 octobre 2024, avant le début du cours.*

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Rendez votre devoir dans Studium sous forme d'un fichier .pdf. Il est très important de **bien expliquer** tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera davantage d'importance à la clarté des explications qu'à la réponse comme telle. Attention au plagiat: il est interdit de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres.

---

1. *(14 points)* L'état d'un processus de fabrication change chaque jour selon une chaîne de Markov à deux états, 0 et 1, avec les probabilités de transition suivantes:

$$P_{0,0} = 0.4, \quad P_{0,1} = 0.6, \quad P_{1,0} = 0.2, \quad P_{1,1} = 0.8.$$

Chaque jour, un test est fait sur le processus et si la chaîne est dans l'état i, le test retourne "bon" avec probabilité p_i et "mauvais" avec probabilité $q_i = 1 - p_i$, pour $i = 0, 1$. Vos réponses seront des expressions qui dépendent de p_0 et p_1. On peut noter X_n l'état de la chaîne au jour n, puis poser $Y_n = 1$ si le test retourne "bon" au jour n, et $Y_n = 2$ sinon. *Le vrai état du processus n'est pas observé, seulement Y_n est observé.*

(a) Si le processus est dans l'état 0 un jour donné, quelle est la probabilité que le test retourne "bon" le lendemain?

(b) Si le processus est dans l'état 0 le lundi, quelle est la probabilité que le test retourne "bon" le vendredi suivant?

(c) Quelle est la proportion des jours où le test retourne "bon" à long terme?

(d) Est-ce que $\{Y_n,\ n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov? Si oui, donnez sa matrice de probabilités de transition; sinon expliquez pourquoi.

2. *(10 points)* Voir mes diapos, pages 52–53.

(a) Dans l'exemple de la marche aléatoire sur $\{0, 1, \ldots, N\}$, quand les états 0 et N sont absorbants et les p_i peuvent dépendre de i, dérivez une formule pour P_1 et une formule pour chaque P_i en fonction de P_1.

(b) Si $N = 5$ et $p_i = (N - i)/N$ pour $0 < i < N$, calculez les valeurs des P_i.

3. *(8 points)*

Soient a et b deux entiers positifs et considérons une chaîne de Markov $\{\mathbf{X}_n,\ n \geq 0\}$ dont l'espace d'états est $\{(x, y) : x \in \{0, \ldots, a-1\},\ y \in \{0, \ldots, b-1\}\}$, et les probabilités de transition sont définies comme suit. Si $\mathbf{X}_n = (x, y)$, alors $\mathbf{X}_{n+1} = ((x+1) \bmod a, y)$ ou $(x, (y+1) \bmod b)$, chacun avec probabilité $1/2$.

(a) Montrez que cette chaîne est irréductible.

(b) Montrez qu'elle est apériodique si et seulement si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.

4. *(18 points)*

On considère une suite de polygones convexes définis comme suit. À l'étape n, on a un polygone de $X_n + 3$ cotés, pour $X_n \geq 0$. Par exemple, pour un triangle on a $X_n = 0$ et pour un hexagone on a $X_n = 3$. On choisit au hasard (uniformément) deux des $X_n + 3$ cotés (faces) de ce polygone et on rejoint les points milieux de ces deux faces par un segment de droite. Cela divise le polygone courant en deux polygones convexes plus petits, P_1 et P_2 On suppose que le polygone initial n'a pas deux faces successives parfaitement alignées. Puisque c'est seulement le nombre de faces qui compte, on peut se faire une image de la situation en supposant que le polygone est régulier, à chaque étape. On choisit un des deux polygones P_1 ou P_2 au hasard, avec probabilité $1/2$ chacun, et c'est le prochain polygone, dont le nombre de faces est $X_{n+1} + 3$.

Par exemple, si on a un pentagone et qu'on choisit deux faces adjacentes, il sera divisé en un triangle et un hexagone. Si on choisit deux faces non adjacentes, les deux sous-polygones obtenus auront 4 et 5 faces. Suggestion: faites-vous un dessin, énumérez tous les choix possibles, et calculez la probabilité de chaque choix.

(a) Montrez que $\{X_n,\, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov irréductible. Dites quel est son espace d'états et trouvez la matrice des probabilités de transition.

(b) Montrez que les probabilités d'état stationnaire de cette chaîne sont données par l'équation étonnamment élégante suivante: $\pi_i = 1/(i!e)$ pour $i \geq 0$, où $e = 2.71828...$ est la constante d'Euler.