

Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 5

Devoir à remettre le *mardi 18 février 2020, avant le début du cours.*

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Il est très important de bien expliquer tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera beaucoup d'importance à la clarté des explications. Attention au plagiat: il n'est pas permis de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres.

1. (10 points)

Pour chacun des deux exemples de chaînes à 3 états à la page 64 de mes diapos, écrivez la matrice \mathbf{P} , puis calculez $\boldsymbol{\pi}$ et la matrice \mathbf{Q} .

En supposant que l'on part de 0, calculez la probabilité du chemin $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ à l'endroit et à l'envers (à reculons) dans chacun des deux cas. Vérifiez que ces probabilités sont en accord avec le théorème de la page 69 des diapos.

2. (10 points)

Écrivez une preuve pour le théorème de la page 68 des diapos.

3. (15 points)

On place n processeurs dans une liste ordonnée. Lorsqu'une tâche arrive, le premier processeur dans la liste essaie de l'accomplir. S'il ne réussit pas, le second processeur essaie. S'il ne réussit pas, le processeur suivant essaie, et ainsi de suite. Dès qu'un processeur réussit, ou encore si aucun processeur ne réussit, la tâche quitte le système, puis on réordonne les processeurs comme suit: si un processeur autre que le premier dans la liste réussit la tâche, on échange ce processeur avec celui qui le précède dans la liste. Ensuite une nouvelle tâche arrive et on recommence. Supposons que les processeurs sont numérotés de 1 à n et que le processeur i réussit avec probabilité p_i chaque fois qu'il essaie une tâche.

(a) Définissez une chaîne de Markov qui représente l'évolution de ce modèle.

(b) Montrez que votre chaîne de Markov est réversible et trouvez les probabilités d'équilibre. Suggestion: Vous pouvez trouver un vecteur $\boldsymbol{\pi}$ qui est réversible pour la chaîne .

4. (15 points)

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ un graphe connexe non orienté ayant un nombre fini de sommets. Un k -coloriage du graphe est un vecteur qui donne une couleur à chaque sommet du graphe, en utilisant au plus k couleurs. Pour un graphe de d sommets, il y a k^d possibilités. Un k -coloriage est dit *admissible* s'il n'y a pas deux sommets adjacents qui ont la même couleur. Pour un graphe quelconque, trouver le plus petit k pour lequel il existe un k -coloriage admissible, ou calculer le nombre de k -coloriages admissibles, ou encore générer au hasard un k -coloriage

selon la loi uniforme sur l'ensemble \mathcal{C} de tous les coloriage admissibles, sont des problèmes connus comme très difficiles.

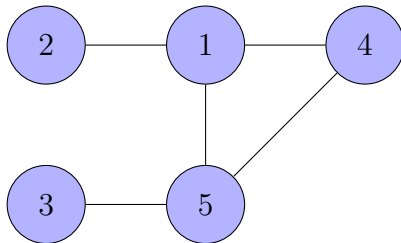
Pour générer des k -coloriage approximativement selon la loi uniforme sur \mathcal{C} , pour un k fixé, on peut penser à utiliser MCMC. L'idée est de construire une chaîne de Markov dont l'état est un élément de \mathcal{C} et les probabilités d'état stationnaire correspondent à la loi uniforme sur l'ensemble \mathcal{C} .

(a) Expliquez comment on pourrait faire cela via l'échantillonnage de Gibbs, en ré-échantillonnant la couleur d'un sommet à la fois.

(b) Si k est trop petit, il se peut qu'il n'existe pas de k -coloriage admissible, ou bien encore qu'il en existe, mais que la chaîne construite via Gibbs ne soit pas irréductible sur \mathcal{C} , de sorte qu'on ne puisse pas atteindre tous les k -coloriage admissibles à partir d'un k -coloriage initial. Pour voir cela, considérez un graphe en triangle (3 sommets et 3 arêtes). Expliquez ce qui se passe avec l'échantillonnage de Gibbs si $k = 2$, puis si $k = 3$, puis si $k = 4$.

Si Δ est le degré maximum d'un sommet du graphe, on peut prouver que si $k \geq \Delta + 2$, alors la chaîne construite par Gibbs est irréductible sur \mathcal{C} , et donc la loi stationnaire est uniforme sur \mathcal{C} . Par contre l'inverse n'est peut-être pas toujours vrai.

(c) Considérons le petit graphe ci-bas, repris de mes diapos. Pour $k = 3$, combien y a-t-il d'éléments dans \mathcal{C} pour ce graphe? Est-ce que Gibbs donne une chaîne irréductible sur \mathcal{C} ? Mêmes questions pour $k = 4$.



Pour plus de détails sur cette classe de problèmes, vous pouvez consulter: [cet article](#).