IFT-3655: Modèles Stochastiques **Automne 2024**

Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 5

Devoir à remettre le *vendredi 1 novembre 2024, avant 10h30.*

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Rendez votre devoir dans Studium sous forme d'un fichier .pdf. Il est très important de **bien expliquer** tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera davantage d'importance à la clarté des explications qu'à la réponse comme telle. Attention au plagiat: il est interdit de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres.

---

1. *(10 points)*

Pour chacun des deux exemples de chaînes à 3 états à la page 65 de mes diapos, écrivez la matrice $\boldsymbol{P}$, puis calculer $\boldsymbol{\pi}$ et la matrice $\boldsymbol{Q}$. On veut des valeurs numériques.

En supposant que l'on part de 0, calculez la probabilité du chemin $0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 0$ à l'endroit et à l'envers (à reculons) dans chacun des deux cas. Vérifiez que ces probabilités sont en accord avec le théorème de la page 73 des diapos.

2. *(8 points)*

Écrivez une preuve pour le théorème de la page 69 des diapos. (Ma solution fait 5 lignes.)

3. *(18 points)*

On place n processeurs dans une liste ordonnée. Lorsqu'une tâche arrive, le premier processeur dans la liste essaie de l'accomplir. S'il ne réussit pas, le second processeur essaie. S'il ne réussit pas, le processeur suivant essaie, et ainsi de suite. Dès qu'un processeur réussit, ou encore si aucun processeur ne réussit, la tâche quitte le système, puis on réordonne les processeurs comme suit: si un processeur autre que le premier dans la liste réussit la tâche, on échange ce processeur avec celui qui le précède dans la liste. Ensuite une nouvelle tâche arrive et on recommence. Supposons que les processeurs sont numérotés de 1 à n et que le processeur j réussit avec probabilité p_j chaque fois qu'il essaie une tâche.

(a) Définissez une chaîne de Markov qui représente l'évolution de ce modèle. Il faut définir l'espace d'états, dire quelles sont les transitions possibles, et trouver leurs probabilités en fonction des p_j. Pour chaque transition possible, donnez aussi la probabilité de la transition inverse.

(b) Montrez que cette chaîne de Markov est réversible et trouvez une formule pour les probabilités d'équilibre. Suggestion: Trouvez un vecteur $\boldsymbol{\pi}$ qui est réversible pour la chaîne.

(c) Quelle est la permutation qui aura la plus grande probabilité à l'état d'équilibre? Prouvez-le en utilisant la formule trouvée en (b).

Remarque: Cet algorithme qui réordonne les processeurs essaie en fait d'apprendre à les classer selon leur performance. Les ordonnancements (ou permutations) des processeurs qui placent ceux ayant les plus grands p_ℓ vers le début de la liste seront avantagés. Les probabilités d'équilibre devraient refléter cela. Cet algorithme est adaptatif: on peut l'utiliser même si les p_ℓ changent (lentement) avec le temps.

4. *(14 points)*

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ un graphe connexe non orienté ayant un nombre fini de sommets. Un k-*coloriage* du graphe est un vecteur qui donne une couleur à chaque sommet du graphe, en utilisant au plus k couleurs. Pour un graphe de d sommets, il y a k^d possibilités. Un k-coloriage est dit *admissible* s'il n'y a pas deux sommets adjacents qui ont la même couleur. Pour un graphe quelconque, trouver le plus petit k pour lequel il existe un k-coloriage admissible, ou calculer le nombre de k-coloriages admissibles, ou encore générer au hasard un k-coloriage selon la loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{C}$ de tous les coloriages admissibles, sont des problèmes connus comme très difficiles. Si vous voulez en savoir davantage sur cette classe de problèmes en général, vous pouvez regarder cet article.

Pour générer des k-coloriages approximativement selon la loi uniforme sur $\mathcal{C}$, pour un k fixé, on peut penser à utiliser MCMC. L'idée est de construire une chaîne de Markov dont l'état est un élément de $\mathcal{C}$ et les probabilités d'état stationnaire correspondent à la loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{C}$. On a vu en classe (diapo 89) comment faire cela via l'échantillonnage de Gibbs, en ré-échantillonnant la couleur d'un seul sommet à chaque étape.

(a) Si k est trop petit, il se peut qu'il n'existe pas de k-coloriage admissible, ou bien encore qu'il en existe, mais que la chaîne construite via Gibbs ne soit pas irréductible sur $\mathcal{C}$, de sorte qu'on ne puisse pas atteindre tous les k-coloriages admissibles à partir d'un k-coloriage initial. Pour voir cela, considérez un graphe en triangle (3 sommets et 3 arêtes). Expliquez ce qui se passe avec l'échantillonnage de Gibbs si $k = 2$, puis si $k = 3$, puis si $k = 4$.

Si Δ est le degré maximum d'un sommet du graphe, on peut prouver que si $k \geq \Delta + 2$, alors la chaîne construite par Gibbs est irréductible sur $\mathcal{C}$, et donc la loi stationnaire est uniforme sur $\mathcal{C}$. Par contre l'inverse n'est peut-être pas toujours vrai.

(b) Considérons le petit graphe ci-bas, repris de mes diapos. Pour $k = 3$, combien y a-t-il d'éléments dans $\mathcal{C}$ pour ce graphe? Est-ce que Gibbs donne une chaîne irréductible sur $\mathcal{C}$? Mêmes questions pour $k = 4$ et pour $k = 5$.