

Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 7Devoir à remettre le *jeudi 19 mars 2020, avant le début du cours.*

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Il est très important de bien expliquer tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera beaucoup d'importance à la clarté des explications. Attention au plagiat: il n'est pas permis de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres.

Si vous voulez faire vos simulations en Java, il y a la librairie SSJ disponible ici: [ssj-github](#). Avant de l'utiliser, regardez bien la section "Documentation and tutorial". Ceci dit, vous pouvez utiliser le logiciel que vous voulez.

1. (20 points)

On a trois variables aléatoires indépendantes X_1 , X_2 , et X_3 , et on veut estimer $p = \mathbb{P}[Y > b]$ où $Y = X_1 + X_2 + X_3$ et b est une constante. On sait que p est très petit et on veut l'estimer par simulation en utilisant l'importance sampling (IS). Une stratégie heuristique pourrait être la suivante. Supposons que X_j a la densité π_j pour chaque j . On va remplacer π_j par une autre densité g_j pour $j = 1$ et 2 , on va générer X_1 et X_2 selon cette densité g_j , et finalement on va calculer $X_{\text{is}} = (1 - F_3(y - X_2 - X_1))L$ comme estimateur, où $L = (\pi_1(X_1)/g_1(X_1))(\pi_2(X_2)/g_2(X_2))$ et $F_3(x) = \mathbb{P}(X_3 \leq x)$. Cela combine IS avec CMC.

En particulier, supposons que chaque X_j suit une loi exponentielle de moyenne $1/\lambda = 2$ et que $b = 15$. On pourrait alors prendre g_j comme une exponentielle de moyenne 5 au lieu de 2. L'idée (heuristique) est que l'espérance de la somme devient alors égale à 15, la valeur que l'on veut atteindre.

Montrez que $\mathbb{E}_g[X_{\text{is}}] = p$. Implantez ceci et effectuez une expérience qui génère n répétitions indépendantes de la simulation, pour $n = 1000$, en utilisant IS. Calculez l'estimateur de p par IS et calculez un intervalle de confiance à 95% pour p .

2. (30 points)

On considère le modèle de déflexion d'une poutre en porte-à-faux vu à la page 73 des diapos. On a

$$X = X(\sigma_1) = h(Y_1, Y_2, Y_3) = \frac{\kappa}{Y_1} \sqrt{\frac{Y_2^2}{w^4} + \frac{Y_3^2}{t^4}}$$

où Y_1, Y_2, Y_3 sont normales indépendantes, $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$. Prenons $w = 4$, $t = 2$, et $\kappa = 5 \times 10^5$ pour les constantes et $\mu_1 = 2.9 \times 10^7$, $\sigma_1 = 1.45 \times 10^6$, $\mu_2 = 500$, $\sigma_2 = 100$, $\mu_3 = 1000$, $\sigma_3 = 100$, pour les paramètres des lois normales.

(a) Supposons que l'on veut estimer $\mu = \mathbb{P}[X \leq x]$ pour $x = 5$. Vous allez faire cela avec MC ordinaire, puis avec CMC en conditionnant sur $\mathcal{G} = \{Y_2, Y_3\}$ comme sur les diapos. Dans les

deux cas, faites $n = 1000$ simulations, estimez μ , la variance de votre estimateur, et calculez un intervalle de confiance à 95% sur μ . Comparez.

(b) Supposons maintenant que l'on fait varier le paramètre σ_3 et que l'on veut estimer la *dérivée* de μ par rapport à σ_3 . On peut noter $\mu = \mu(\sigma_3)$ et $X = X(\sigma_3)$ pour indiquer la dépendance en σ_3 . On veut donc estimer $\mu'(\sigma_3) = d\mu(\sigma_3)/d\sigma_3$ au point $\sigma_3 = 100$. Essayez cela avec $n = 1000$ répétitions avec chacune des méthodes suivantes:

1. Différences finies avec MC et des variables aléatoires indépendantes (IRN), avec $\delta = 1$;
2. Différences finies avec CMC et des variables aléatoires indépendantes (IRN), avec $\delta = 1$;
3. Différences finies avec CMC et des variables aléatoires communes (CRN), avec $\delta = 1$;
4. Dérivée stochastique avec CMC;

Dans chaque cas, calculez un intervalle de confiance à 95% pour la dérivée et donnez une estimation de la variance de votre estimateur de dérivée. Comparez les variances.