IFT-3655: Modèles Stochastiques **A-2024**

Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 7

Devoir à remettre le *vendredi 22 novembre 2024, avant 10h30*.

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Il est très important de bien expliquer tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera beaucoup d'importance à la clarté des explications. Attention au plagiat: il n'est pas permis de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres. Rendez votre devoir dans Studium sous forme d'un fichier .pdf. Mettez-y aussi votre code source dans des fichiers séparés, afin que nous puissions y jeter un coup d'oeil.

Si vous voulez faire vos simulations an Java, il y a la librairie SSJ disponible ici: ssj-github. Avant de l'utiliser, regardez bien la section "Documentation and tutorial". Ceci dit, vous pouvez utiliser le logiciel que vous voulez.

---

1. *(20 points)*

On a trois variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, et X_3, et on veut estimer $p = \mathbb{P}[Y > b]$ où $Y = X_1 + X_2 + X_3$ et b est une constante. On sait que p est très petit et on veut l'estimer par simulation en utilisant l'importance sampling (IS). Pour ramener la variance à 0 dans ce cas-ci, il faudrait générer le vecteur (X_1, X_2, X_3) selon sa loi conditionnelle à $Y > b$. L'estimateur serait alors égal au rapport de vraisemblance L, qui serait une constante. Mais cela est difficile et compliqué à implanter, car sous cette loi conditionnelle, les variables X_1, X_2, X_3 ne sont plus indépendantes.

Une stratégie heuristique plus facile à implanter pourrait être la suivante. Supposons que X_j a la densité π_j pour chaque j. On va remplacer π_j par une autre densité g_j pour $j = 1$ et 2, on va générer X_1 et X_2 selon cette densité g_j, et finalement on va calculer $X_{\text{is}} = (1 - F_3(b - X_2 - X_1))L$ comme estimateur, où $L = (\pi_1(X_1)/g_1(X_1))(\pi_2(X_2)/g_2(X_2))$ et $F_3(x) = \mathbb{P}(X_3 \le x)$. Cela combine IS avec CMC.

(a) Montrez que $\mathbb{E}_g[X_{\text{is}}] = p$.

(b) Supposons maintenant que chaque X_j suit une loi exponentielle de moyenne $1/\lambda = 2$ et que $b = 15$. Comme on a $\mathbb{E}[Y] = 6$ et $(\text{Var}[Y])^{1/2} = \sqrt{12}$, on sait que $Y > 15$ ne se produira pas souvent. Pour approximer la loi de (X_1, X_2, X_3) conditionnelle à $Y > 15$, on pourrait prendre g_j comme une exponentielle de moyenne 5 au lieu de 2. L'idée (heuristique) est que sous cette loi conditionnelle, on s'attend à ce que les X_j soient autour de 5 ou un peu plus pour que leur somme dépasse 15. On peut alors les générer avec une moyenne de 5 au lieu de 2. Cette valeur n'est certainement pas optimale, mais c'est un choix simple et raisonnable. Trouvez la formule pour l'estimateur X_{is} correspondant, implantez-le, et effectuez une expérience qui génére n répétitions indépendantes de la simulation pour $n = 1000$, d'abord avec MC sans utiliser IS, puis en utilisant IS. Dans les deux cas, calculez l'estimateur de p avec un intervalle de confiance à 95%, calculez aussi les variances, et comparez.

(c) Question bonus (+5): Au lieu de prendre g_j exponentielle de moyenne $1/\lambda_0 = 5$, on pourrait essayer d'optimiser $1/\lambda_0$ en cherchant la valeur qui minimise la variance, par exemple dans l'intervalle $[4, 10]$, un peu comme dans l'exemple de la diapo 62. Pouvez-vous approximer le $1/\lambda_0$ optimal?

2. *(30 points)*

On considère le modèle de déflexion d'une poutre en porte-à-faux vu à la page 75 des diapos. On a

$$X = X(\sigma_1) = h(Y_1, Y_2, Y_3) = \frac{\kappa}{Y_1}\sqrt{\frac{{Y_2}^2}{w^4} + \frac{{Y_3}^2}{t^4}}$$

où Y_1, Y_2, Y_3 sont normales indépendantes, $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$. Prenons $w = 4$, $t = 2$, et $\kappa = 5 \times 10^5$ pour les constantes et $\mu_1 = 2.9 \times 10^7$, $\sigma_1 = 1.45 \times 10^6$, $\mu_2 = 500$, $\sigma_2 = 100$, $\mu_3 = 1000$, $\sigma_3 = 100$, pour les paramètres des lois normales.

(a) Supposons que l'on veut estimer $\mu = \mathbb{P}[X \leq x]$ pour $x = 5$. Vous allez faire cela avec MC ordinaire, puis avec CMC en conditionnant sur $\mathcal{G} = \{Y_2, Y_3\}$ comme sur les diapos. Cela donne les estimateurs I et J sur les diapos. Dans les deux cas, faites $n = 1000$ simulations, estimez μ, la variance de votre estimateur, et calculez un intervalle de confiance à 95% sur μ. Comparez MC vs CMC.

(b) Supposons maintenant que l'on fait varier le paramètre σ_3 et que l'on veut estimer la *dérivée* de μ par rapport à σ_3. On peut noter $\mu = \mu(\sigma_3)$, $X = X(\sigma_3)$, $I = I(\sigma_3)$ et $J = J(\sigma_3)$ pour indiquer la dépendance en σ_3. On veut donc estimer $\mu'(\sigma_3) = d\mu(\sigma_3)/d\sigma_3$ au point $\sigma_3 = 100$. Essayez cela avec $n = 1000$ répétitions avec chacune des méthodes suivantes:

1. Différences finies avec MC et des variables aléatoires indépendantes (IRN), avec $\delta = 1$;
2. Différences finies avec CMC et des variables aléatoires indépendantes (IRN), avec $\delta = 1$;
3. Différences finies avec CMC et des variables aléatoires communes (CRN), avec $\delta = 1$;
4. Dérivée stochastique avec CMC;

Dans chaque cas, *expliquez comment vous faites*, calculez un intervalle de confiance à 95% pour la dérivée et donnez une estimation de la variance de votre estimateur de dérivée. Comparez les variances. Pour le cas de la dérivée stochastique, il faut montrer comment on trouve l'estimateur. On ne demande pas de "prouver" qu'il est sans biais, mais vous aurez des points supplémentaires si vous le faites (correctement), et vous pouvez aussi le comparer avec celui utilisé en (3).