

Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 8Devoir à remettre le *vendredi 29 novembre 2024, avant 10h30*.

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Il est très important de bien expliquer tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera beaucoup d'importance à la clarté des explications. Attention au plagiat: il n'est pas permis de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres. Rendez votre devoir dans Studium sous forme d'un fichier .pdf. Aucune programmation à faire pour ce devoir.

1. (13 points)

Des événements surviennent selon un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$. Chaque fois qu'un événement survient, on peut décider de s'arrêter ou de continuer. Le but du jeu est de s'arrêter au dernier événement qui a lieu avant le temps T , où $T > 1/\lambda$ est une constante fixée à l'avance et connue. Si on s'arrête lors d'un événement qui a lieu au temps t pour $0 \leq t \leq T$ et si aucun autre événement n'a lieu durant l'intervalle $(t, T]$, alors on gagne, sinon (dans tous les autres cas) on perd. En particulier, si aucun événement n'a lieu durant $[0, T]$, on perd. On peut définir une stratégie qui consiste à s'arrêter au premier événement qui a lieu après le temps s , où s est une constante de notre choix, $0 \leq s \leq T$.

- (a) Quelle est la probabilité de gagner si on utilise cette stratégie, en fonction de s ?
- (b) Quelle est la valeur optimale de s , qui maximise notre probabilité de gagner?
- (c) Montrez que la probabilité de gagner en utilisant cette stratégie optimale est $1/e$, où e est la constante d'Euler.

2. (12 points)

Supposons que les durées (en heures) entre les arrivées des autobus successifs à un arrêt donné suivent la loi uniforme sur $(0, 1)$ et sont indépendantes. Les passagers arrivent selon un processus de Poisson de taux λ par heure. Supposons qu'un autobus vient tout juste de quitter l'arrêt. Soit X le nombre de personnes qui vont prendre le prochain autobus. Trouvez $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}(X)$. Comment peut-on calculer toute la loi de probabilité de X , i.e., $\mathbb{P}[X = x]$ pour chaque entier $x \geq 0$?

Aide: On sait que

$$\int_0^1 y^n e^{-ay} dy = \frac{n!}{a^{n+1}} \left(1 - e^{-a} \sum_{i=0}^n \frac{a^i}{i!} \right).$$

3. (10 points)

Une compagnie d'assurance reçoit deux types de réclamations, les types 1 et 2. Soit $N_i(t)$ le nombre de réclamations de type i reçues durant l'intervalle de temps $[0, t]$, pour $i = 1, 2$. Supposons que $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ sont des processus de Poisson indépendants de taux $\lambda_1 = 10$ et $\lambda_2 = 1$, et que les montants des réclamations de type i sont des variables aléatoires indépendantes exponentielles de moyenne μ_i , avec $\mu_1 = \$1000$ et $\mu_2 = \$5000$. On vient de recevoir une réclamation de \$4000. Quelle est la probabilité que cette réclamation soit de type 1?

4. (15 points)

Supposons que les clients arrivent à un magasin de détail selon un processus de Poisson de taux B de 9 heures à midi, $2B$ de midi à 14 heures, puis de $1.2B$ de 14 heures à 17 heures. Ici, B est une variable aléatoires de loi connue qui ne prend que des valeurs positives et prend la même valeur pour toute la journée. Le taux d'arrivée des clients est donc lui-même aléatoire. Une plus grande valeur de B correspondra à une journée plus achalandée.

On dispose d'une fonction pour générer B selon la bonne loi, et d'une autre fonction pour générer des (imitations de) variables aléatoires indépendantes uniformes sur $(0, 1)$. Donnez un algorithme permettant de simuler les instants des arrivées successives pour ce processus, pour une journée, en utilisant ces deux ingrédients.