

Prof. Pierre L'Ecuyer

## DEVOIR 9

Devoir à remettre par courriel au correcteur (Mathieu Gascon, [matmath.g@hotmail.com](mailto:matmath.g@hotmail.com)) au plus tard le *mardi 14 avril 2020, avant 10h30*.

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Il est très important de bien expliquer tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera beaucoup d'importance à la clarté des explications. Attention au plagiat: il n'est pas permis de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres.

---

1. (16 points) Ross (2014), page 348, Exercice 62.

Suppose that the number of typographical errors in a new text is Poisson distributed with mean  $\lambda$ . Two proofreaders independently read the text. Suppose that each error is independently found by proofreader  $i$  with probability  $p_i$ ,  $i = 1, 2$ . Let  $X_1$  denote the number of errors that are found by proofreader 1 but not by proofreader 2. Let  $X_2$  denote the number of errors that are found by proofreader 2 but not by proofreader 1. Let  $X_3$  denote the number of errors that are found by both proofreaders. Finally, let  $X_4$  denote the number of errors found by neither proofreader.

(a) Describe the joint probability distribution of  $X_1, X_2, X_3, X_4$ .

(b) Show that

$$\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[X_3]} = \frac{1 - p_2}{p_2} \quad \text{and} \quad \frac{\mathbb{E}[X_2]}{\mathbb{E}[X_3]} = \frac{1 - p_1}{p_1}.$$

Suppose now that  $\lambda$ ,  $p_1$ , and  $p_2$  are all unknown.

(c) By using  $X_k$  as an estimator of  $\lambda_k = \mathbb{E}[X_k]$ ,  $k = 1, 2, 3$ , present estimators of  $p_1$ ,  $p_2$ , and  $\lambda$ .

(d) Use this to give an estimator of  $X_4$ , the number of errors not found by either proofreader.

2. (16 points) Ross (2014), page 402, Exercice 20.

On a deux machines semblables, dont l'une est utilisée comme machine de rechange lorsque l'autre est en panne. On n'utilise jamais les deux en même temps. La machine utilisée fonctionne pour une durée exponentielle de taux  $\lambda$ , puis tombe en panne. Elle est alors remplacée par l'autre machine si cette dernière fonctionne, et s'en va à la réparation. Dans le centre de réparation, il y a un seul réparateur, qui peut réparer une seule machine à la fois, et la durée de réparation est exponentielle de taux  $\mu$ . Lorsque la réparation est terminée, la machine réparée retourne en mode d'utilisation. Si les deux machines étaient en panne, la réparation de la seconde machine démarre et la machine réparée devient celle utilisée, sinon elle devient la machine de rechange. Au départ, aucune des deux machines n'est en panne.

(a) Soit  $T$  le temps où les deux machines sont en panne pour la première fois. Trouvez des expressions pour  $\mathbb{E}[T]$  et  $\text{Var}[T]$ . Vous pouvez utiliser ce qu'on a vu en classe ou ce qui est fait dans le livre, mais donnez la référence et simplifiez les preuves pour les adapter au problème particulier considéré ici.

(b) Quelle est la proportion du temps où au moins une machine fonctionne, à long terme?

**3.** (18 points)

Supposons qu'il y a  $n$  machines et un seul réparateur. Lorsque la machine  $i$  tombe en panne, la quantité de travail requise (la durée de réparation normale pour un réparateur qui ne fait rien d'autre) est exponentielle de taux  $\mu_i$ . Lorsque  $k \geq 1$  machines sont en panne, le réparateur divise ses efforts également entre ces  $k$  machines, de sorte que si la machine  $i$  est en panne, elle est réparée à un taux  $\mu_i/k$ . S'il y a  $r = n - k$  machines qui fonctionnent, incluant la machine  $i$ , alors celle-ci tombe en panne au taux  $\lambda_i/r$ .

(a) Définissez une CTMC qui correspond à ce modèle. Vous devez spécifier l'espace d'états et les taux de transition  $q_{i,j}$  entre toutes les paires d'états  $(i, j)$ .

(b) Écrivez les équations de réversibilité par rapport au temps. Trouvez ensuite les probabilités limites (la loi stationnaire) et montrez que le processus (la CTMC) est réversible.

**Remarque:** Les modèles de CMTC examinés ici (et dans le chapitre sur les CMTC) peuvent sembler inutiles car trop irréalistes, en particulier parce que toutes les durées sont supposées suivre une loi exponentielle, mais des modèles simplifiés de ce genre sont très largement utilisés en pratique pour obtenir des approximations simples, faciles à calculer et à interpréter, et qui peuvent donner une bonne idée de ce qui se passe.