Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 9Devoir à remettre le *lundi 9 décembre 2024, avant 10h30*.

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Il est très important de bien expliquer tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera beaucoup d'importance à la clarté des explications. Attention au plagiat: il n'est pas permis de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres. Rendez votre devoir dans Studium sous forme d'un fichier .pdf.

1. (16 points)

Le nombre d'erreurs typographiques dans un texte suit une loi de Poisson de moyenne λ . Deux relecteurs lisent le texte, indépendamment l'un de l'autre. Supposons que chaque erreur est détectée par le relecteur i avec probabilité p_i , pour $i = 1, 2$. Posons:

X_1 = le nombre d'erreurs trouvées par le relecteur 1 mais pas par le relecteur 2.

X_2 = le nombre d'erreurs trouvées par le relecteur 2 mais pas par le relecteur 1.

X_3 = le nombre d'erreurs trouvées par les deux relecteurs.

X_4 = le nombre d'erreurs trouvées par aucun relecteur.

(a) Trouver une formule pour la loi de probabilité conjointe de X_1, X_2, X_3, X_4 . (Voir chapitre sur les probabilités pour la définition.)

(b) Montrez que

$$\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[X_3]} = \frac{1 - p_2}{p_2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{E}[X_2]}{\mathbb{E}[X_3]} = \frac{1 - p_1}{p_1}.$$

Supposons maintenant que λ , p_1 , et p_2 sont tous inconnus.

(c) En utilisant X_k comme estimateur de $\lambda_k = \mathbb{E}[X_k]$, pour $k = 1, 2, 3$, trouvez des estimateurs pour p_1 , p_2 , et λ .

(d) Notez que dans ce contexte, X_1, X_2, X_3 peuvent être observés, mais pas X_4 . Utilisez les estimateurs trouvés en (c) pour obtenir un estimateur de X_4 .

2. (16 points)

On a deux machines semblables, dont l'une est utilisée comme machine de rechange lorsque l'autre est en panne. On n'utilise jamais les deux en même temps. La machine utilisée fonctionne pour une durée exponentielle de taux λ , puis tombe en panne. Elle est alors remplacée par l'autre machine si cette dernière fonctionne, et s'en va à la réparation. Dans le centre de réparation, il y a un seul réparateur, qui peut réparer une seule machine à la fois, et la durée de réparation est exponentielle de taux μ . Lorsque la réparation est terminée, la machine réparée retourne en mode d'utilisation. Si les deux machines étaient en panne, la

réparation de la seconde machine démarre et la machine réparée devient celle utilisée, sinon elle devient la machine de rechange. Au départ, aucune des deux machines n'est en panne.

(a) Soit T le temps où les deux machines sont en panne pour la première fois. Trouvez des expressions pour $\mathbb{E}[T]$ et $\text{Var}[T]$. Vous pouvez utiliser ce qu'on a vu en classe ou ce qui est fait dans le livre, mais donnez la référence et simplifiez les preuves pour les adapter au problème particulier considéré ici.

(b) Quelle est la proportion du temps où au moins une machine fonctionne, à long terme?

3. (18 points)

Supposons qu'il y a n machines et un seul réparateur. Lorsque la machine i tombe en panne, la quantité de travail requise (la durée de réparation normale pour un réparateur qui ne fait rien d'autre) est exponentielle de taux μ_i . Lorsque $k \geq 1$ machines sont en panne, le réparateur divise ses efforts également entre ces k machines, de sorte que si la machine i est en panne, elle est réparée à un taux μ_i/k . S'il y a $r = n - k$ machines qui fonctionnent, incluant la machine i , alors celle-ci tombe en panne au taux λ_i/r .

(a) Définissez une CTMC qui correspond à ce modèle. Vous devez spécifier l'espace d'états et les taux de transition $q_{i,j}$ entre toutes les paires d'états (i, j) .

(b) Écrivez les équations qui donnent les conditions de réversibilité par rapport au temps. Trouvez ensuite les probabilités limites (la loi stationnaire) et montrez que le processus (la CTMC) est réversible.