

Date : Février 2020

Heure : Durée: 2 heures

Professeur : Pierre L'Ecuyer

Vous devez justifier et bien expliquez vos réponses!

Les explications claires et complètes sont plus importantes que la réponse comme telle.

— 1 —

(25 points)

Dans les sous-questions suivantes, on vous demande de définir et expliquer quelques notions de base vues au cours. Il est important de donner des réponses claires et complètes.

(a) Dans le contexte de génération de nombres aléatoires uniformes pour la simulation, qu'est-ce qu'un générateur algorithmique? Est-ce mieux ou moins bon qu'un générateur basé sur un mécanisme physique? Pourquoi?

(b) On veut générer une variable aléatoire X ayant une densité f positive sur l'intervalle $[a, b]$ et 0 ailleurs. On a une formule simple pour f mais on suppose que la fonction de répartition F est trop difficile à inverser pour utiliser la méthode d'inversion. Dans ce contexte, expliquez comment générer X par une méthode de rejet en utilisant une fonction chapeau h . Vous devez expliquer ce qu'est une fonction chapeau et donner l'algorithme.

(c) Dans un chaîne de Markov à espace d'états discret, définir les termes suivants:

- un état transitoire;
- un état récurrent;
- un état récurrent positif;
- une chaîne irréductible périodique.

— 2 —

(20 points)

Supposons que parmi tous les gens qui arrivent au Canada en provenance du pays P et qui se font tester pour un certain virus, 10% sont porteurs du virus. Lorsqu'une personne se fait tester, on applique deux tests indépendants. Le premier test donne un résultat positif avec probabilité p_1 si la personne a la maladie et avec probabilité q_1 si elle ne l'a pas. Le second test donne un résultat positif avec probabilité p_2 si la personne a la maladie et avec probabilité q_2 si elle ne l'a pas.

(a) Quelle est la probabilité que la personne ait la maladie si les deux tests donnent un résultat positif?

(b) Et si le premier test est positif et le second est négatif?

(c) Et si les deux tests sont négatifs?

— 3 —

(15 points)

Une usine possède une machine qui se détériore à l'usage. On l'inspecte chaque soir. Immédiatement après l'inspection, on note la condition de la machine et on la classe dans l'un des 3 états suivants: 0 = "excellente condition"; 1 = "légèrement détériorée"; 2 = "très détériorée".

On modélise le processus par une chaîne de Markov dont la matrice des probabilités de transition (d'un soir à l'autre) est

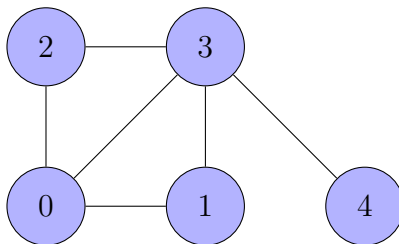
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 7/8 & 1/8 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 7/8 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Supposons qu'il en coûte 1000\$ par jour lorsqu'on est dans l'état 1, 3000\$ par jour lorsqu'on est dans l'état 2, et rien quand on est dans l'état 0. Quel est le coût moyen par jour à long terme?

— 4 —

(25 points)

Soit une chaîne de Markov irréductible stationnaire $\{X_n, n \geq 0\}$ dont l'état à chaque étape est un sommet du graphe ci-bas.



(a) Supposons d'abord que la transition d'un état (sommet) i vers l'état j suivant se fait en choisissant au hasard l'un des sommets adjacents au sommet i , selon la loi uniforme (i.e., on tire au sort l'une des arêtes incidentes). Écrivez la matrice \mathbf{P} des probabilités de transition de cette chaîne, et trouvez le vecteur $\boldsymbol{\pi}$ des probabilités stationnaires π_i . Trouvez ensuite la matrice \mathbf{Q} des probabilités de transition de la chaîne inverse. Est-ce que la chaîne est réversible?

(b) Supposons maintenant que l'on veut modifier cette chaîne de manière à obtenir une chaîne dont les probabilités stationnaires sont uniformes sur tous les sommets. Expliquez comment faire cela en utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings, en utilisant les éléments de \mathbf{P} pour choisir les transitions proposées.

— 5 —

(15 points)

Soit F la cdf (fonction de répartition) d'une variable aléatoire Y et soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

(a) Prouvez que si $X = F^{-1}(U)$ où $U \sim \text{Uniforme}(F(a), F(b))$, alors X a la même distribution que Y , mais tronquée à l'intervalle $(a, b]$, i.e., X a la loi de Y conditionnelle à $Y \in (a, b]$.

(b) En utilisant ce résultat, donnez un algorithme efficace pour générer X selon cette loi conditionnelle dans le cas où F et F^{-1} sont faciles à évaluer et on dispose d'un générateur pour la loi uniforme sur $(0, 1)$.