

IFT-6521

PROGRAMMATION DYNAMIQUE

Chapitre 1: Introduction

Pierre L'Ecuyer

DIRO, Université de Montréal

Janvier 2015

Les figures ont été fournies amicalement par D. P. Bertsekas

Contenu de l'introduction

1. Qu'est-ce que la programmation dynamique (PD)?
2. Exemples simples.
3. Modèle de base: versions déterministe et stochastique.
4. Principe d'optimalité et algorithme de la PD.
5. Contrôle en boucle ouverte vs boucle fermée, et valeur de l'information.
6. Reformulations pour se ramener au modèle de base.
7. Fonction d'utilité et mesure de risque.

Qu'est-ce que la programmation dynamique?

Processus de décision séquentiel (PDS):

- Suite de **décisions** à prendre, avec un **objectif à optimiser**.
- **Temps discret**: À chaque étape, on prend une décision, selon l'information disponible.
- Liens (interactions) entre les décisions.
- En général, on peut recevoir de l'**information** additionnelle à chaque étape, et il y a des aléas dans l'évolution entre les prises de décision.
- **Temps continu**: la suite de décisions est remplacée par un contrôle, fonction du temps.

Qu'est-ce que la programmation dynamique?

Processus de décision séquentiel (PDS):

- Suite de **décisions** à prendre, avec un **objectif à optimiser**.
- **Temps discret**: À chaque étape, on prend une décision, selon l'information disponible.
- Liens (interactions) entre les décisions.
- En général, on peut recevoir de l'**information** additionnelle à chaque étape, et il y a des aléas dans l'évolution entre les prises de décision.
- **Temps continu**: la suite de décisions est remplacée par un contrôle, fonction du temps.

Exemples: gestion d'un inventaire; entretien préventif; gestion d'un fond d'investissement; option financière de type américaine;

Qu'est-ce que la programmation dynamique?

Processus de décision séquentiel (PDS):

- Suite de **décisions** à prendre, avec un **objectif à optimiser**.
- **Temps discret**: À chaque étape, on prend une décision, selon l'information disponible.
- Liens (interactions) entre les décisions.
- En général, on peut recevoir de l'**information** additionnelle à chaque étape, et il y a des aléas dans l'évolution entre les prises de décision.
- **Temps continu**: la suite de décisions est remplacée par un contrôle, fonction du temps.

Exemples: gestion d'un inventaire; entretien préventif; gestion d'un fond d'investissement; option financière de type américaine; partie de tennis ou de football; jeu d'échecs; etc.

Qu'est-ce que la programmation dynamique?

Processus de décision séquentiel (PDS):

- Suite de **décisions** à prendre, avec un **objectif à optimiser**.
- **Temps discret**: À chaque étape, on prend une décision, selon l'information disponible.
- Liens (interactions) entre les décisions.
- En général, on peut recevoir de l'**information** additionnelle à chaque étape, et il y a des aléas dans l'évolution entre les prises de décision.
- **Temps continu**: la suite de décisions est remplacée par un contrôle, fonction du temps.

Exemples: gestion d'un inventaire; entretien préventif; gestion d'un fond d'investissement; option financière de type américaine; partie de tennis ou de football; jeu d'échecs; etc. conduite automobile; pilotage d'un avion (pilote automatique), d'un robot, etc.;

Qu'est-ce que la programmation dynamique?

Processus de décision séquentiel (PDS):

- Suite de **décisions** à prendre, avec un **objectif à optimiser**.
- **Temps discret**: À chaque étape, on prend une décision, selon l'information disponible.
- Liens (interactions) entre les décisions.
- En général, on peut recevoir de l'**information** additionnelle à chaque étape, et il y a des aléas dans l'évolution entre les prises de décision.
- **Temps continu**: la suite de décisions est remplacée par un contrôle, fonction du temps.

Exemples: gestion d'un inventaire; entretien préventif; gestion d'un fond d'investissement; option financière de type américaine; partie de tennis ou de football; jeu d'échecs; etc. conduite automobile; pilotage d'un avion (pilote automatique), d'un robot, etc.; La vie en général!

Programmation dynamique:

Ensemble d'outils mathématiques et algorithmiques pour étudier les processus de décision séquentiels et calculer éventuellement des stratégies optimales (exactes ou approximatives).

Programmation dynamique:

Ensemble d'outils mathématiques et algorithmiques pour étudier les processus de décision séquentiels et calculer éventuellement des stratégies optimales (exactes ou approximatives).

Une **politique** (ou **stratégie**) est une règle de prise de décisions qui, pour chaque situation possible (état du système), nous dit quelle décision (ou action) prendre dans le but d'optimiser une fonction objectif globale.

Souvent, lorsqu'il y a de l'incertitude, la fonction objectif est une espérance mathématique. Parfois, on pourra caractériser la **politique optimale** par des théorèmes (théorie); souvent, on pourra la calculer, ou en calculer une approximation; dans certains cas la résolution sera trop difficile.

Exemple: modèle d'inventaire simple pour un seul produit

- ▶ x_k = stock en inventaire au début de la période k .
- ▶ u_k = quantité commandée au début de la période k , et obtenue immédiatement. Contrainte: $u_k \geq 0$.
- ▶ ω_k = demande (des clients) durant la période k .
Supposons que les ω_k sont des v.a.'s indépendantes.
- ▶ Évolution: $x_{k+1} = x_k + u_k - \omega_k = f(x_k, u_k, \omega_k)$.
Note: x_k peut être négatif.
- ▶ $r(x_k)$ = coût associé à l'inventaire x_k au début de la période k .
Coût de stockage si $x_k > 0$; coût de pénurie si $x_k < 0$.
- ▶ $c \cdot u_k$ = coût d'approvisionnement pour la période k .
- ▶ $R(x_N)$ = coût pour l'inventaire terminal.

Coût espéré total pour N périodes, à minimiser:

$$\mathbb{E} \left[R(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} (r(x_k) + cu_k) \right].$$

minimiser $\mathbb{E} \left[R(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} (r(x_k) + cu_k) \right].$

Contrôle en **boucle ouverte**: on choisit u_0, \dots, u_{N-1} à l'avance.

minimiser $\mathbb{E} \left[R(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} (r(x_k) + cu_k) \right].$

Contrôle en **boucle ouverte**: on choisit u_0, \dots, u_{N-1} à l'avance.

Contrôle en **boucle fermée**: on choisit u_k après avoir observé x_k .

minimiser $\mathbb{E} \left[R(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} (r(x_k) + cu_k) \right].$

Contrôle en **boucle ouverte**: on choisit u_0, \dots, u_{N-1} à l'avance.

Contrôle en **boucle fermée**: on choisit u_k après avoir observé x_k .

Dans le second cas, on cherche une **politique** $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ qui nous indique comment prendre les décisions: $u_k = \mu_k(x_k)$.

$$\text{minimiser} \quad \mathbb{E} \left[R(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} (r(x_k) + cu_k) \right].$$

Contrôle en **boucle ouverte**: on choisit u_0, \dots, u_{N-1} à l'avance.

Contrôle en **boucle fermée**: on choisit u_k après avoir observé x_k .

Dans le second cas, on cherche une **politique** $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ qui nous indique comment prendre les décisions: $u_k = \mu_k(x_k)$.

Le coût espéré associé à la politique π est

$$J_\pi(x_0) = \mathbb{E} \left[R(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} (r(x_k) + c\mu_k(x_k)) \right]$$

Comment trouver $\pi = \pi^*$ qui minimise $J_\pi(x_0)$? **Dans cet exemple**, sous des hypothèses raisonnables, on peut montrer que π^* a la forme

$$\mu_k(x_k) = \max(0, S_k - x_k).$$

Dans ce cas, il suffit d'optimiser les S_k (beaucoup plus simple).

Demande aléatoire ω_k observée à chaque période, et décisions prises dynamiquement:

x_0

Demande aléatoire ω_k observée à chaque période, et décisions prises dynamiquement:

$$x_0 \rightarrow u_0 = \mu_0(x_0),$$

Demande aléatoire ω_k observée à chaque période, et décisions prises dynamiquement:

$$x_0 \rightarrow u_0 = \mu_0(x_0), \quad \omega_0 \rightarrow x_1 = x_0 + u_0 - \omega_0$$

x_1

Demande aléatoire ω_k observée à chaque période, et décisions prises dynamiquement:

$$\begin{aligned}x_0 &\rightarrow u_0 = \mu_0(x_0), & \omega_0 &\rightarrow x_1 = x_0 + u_0 - \omega_0 \\x_1 &\rightarrow u_1 = \mu_1(x_1),\end{aligned}$$

Demande aléatoire ω_k observée à chaque période, et décisions prises dynamiquement:

$$x_0 \rightarrow u_0 = \mu_0(x_0), \quad \omega_0 \rightarrow x_1 = x_0 + u_0 - \omega_0$$

$$x_1 \rightarrow u_1 = \mu_1(x_1), \quad \omega_1 \rightarrow x_2 = x_1 + u_1 - \omega_1$$

$$x_2$$

Demande aléatoire ω_k observée à chaque période, et décisions prises dynamiquement:

$$x_0 \rightarrow u_0 = \mu_0(x_0), \quad \omega_0 \rightarrow x_1 = x_0 + u_0 - \omega_0$$

$$x_1 \rightarrow u_1 = \mu_1(x_1), \quad \omega_1 \rightarrow x_2 = x_1 + u_1 - \omega_1$$

$$x_2 \rightarrow u_2 = \mu_2(x_2),$$

Demande aléatoire ω_k observée à chaque période, et décisions prises dynamiquement:

$$\begin{array}{ll} x_0 & \rightarrow u_0 = \mu_0(x_0), & \omega_0 & \rightarrow x_1 = x_0 + u_0 - \omega_0 \\ x_1 & \rightarrow u_1 = \mu_1(x_1), & \omega_1 & \rightarrow x_2 = x_1 + u_1 - \omega_1 \\ x_2 & \rightarrow u_2 = \mu_2(x_2), & \omega_2 & \rightarrow x_3 = x_2 + u_2 - \omega_2 \\ x_3 & \dots & & \end{array}$$

Demande aléatoire ω_k observée à chaque période, et décisions prises dynamiquement:

$$\begin{array}{ll}
 x_0 & \rightarrow u_0 = \mu_0(x_0), & \omega_0 & \rightarrow x_1 = x_0 + u_0 - \omega_0 \\
 x_1 & \rightarrow u_1 = \mu_1(x_1), & \omega_1 & \rightarrow x_2 = x_1 + u_1 - \omega_1 \\
 x_2 & \rightarrow u_2 = \mu_2(x_2), & \omega_2 & \rightarrow x_3 = x_2 + u_2 - \omega_2 \\
 x_3 & \dots & &
 \end{array}$$

Principaux ingrédients d'un PDS:

Temps discret; aléas indépendants; contraintes sur les décisions et politiques; coût additif; on cherche à optimiser une politique.

Un modèle de PDS déterministe

À l'étape k , le système est dans un état $x_k \in X_k$.

Un décideur observe x_k et choisit une décision (action) $u_k \in U_k(x_k)$.

Il paye un coût $g_k(x_k, u_k)$ pour cette étape, puis le système transite dans un nouvel état $x_{k+1} = f_k(x_k, u_k)$ à l'étape $k + 1$.

Un modèle de PDS déterministe

À l'étape k , le système est dans un état $x_k \in X_k$.

Un décideur observe x_k et choisit une décision (action) $u_k \in U_k(x_k)$.

Il paye un coût $g_k(x_k, u_k)$ pour cette étape, puis le système transite dans un nouvel état $x_{k+1} = f_k(x_k, u_k)$ à l'étape $k + 1$.

À l'étape k , on a donc:

X_k = espace d'états;

$U_k(x)$ = ensemble des décisions admissibles dans l'état x ;

g_k = fonction de coût;

f_k = fonction de transition;

x_k = état du système à l'étape k ;

u_k = décision prise à l'étape k .

On veut minimiser la somme des coûts de l'étape 0 à l'étape N :

$$\min \quad g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k)$$

$$\text{s.l.c.} \quad u_k \in U_k(x_k) \text{ et } x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \quad k = 0, \dots, N-1$$

x_0 fixé.

$$\begin{aligned} \min \quad & g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k) \\ \text{s.l.c.} \quad & u_k \in U_k(x_k) \text{ et } x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \quad k = 0, \dots, N-1 \\ & x_0 \text{ fixé.} \end{aligned}$$

On peut illustrer cela par un arbre de décision.

Les fonctions g_k et f_k peuvent être non linéaires et compliquées.

$$\begin{aligned} \min \quad & g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k) \\ \text{s.l.c.} \quad & u_k \in U_k(x_k) \text{ et } x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \quad k = 0, \dots, N-1 \\ & x_0 \text{ fixé.} \end{aligned}$$

On peut illustrer cela par un arbre de décision.

Les fonctions g_k et f_k peuvent être non linéaires et compliquées.

Si $g_k(x_k, u_k)$ est un **revenu** au lieu d'un coût, on remplace "min" par "max" (ou "inf" par "sup").

Une **politique (ou stratégie) admissible** est une suite de fonctions $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$ tel que $\mu_k : X_k \rightarrow U_k$ et $\mu_k(x) \in U_k(x)$ pour tout $x \in X_k$, $0 \leq k \leq N-1$. La décision à l'étape k est $\mu_k(x_k)$.

Pour une stratégie π fixée, posons

$J_{\pi,k}(x)$ = coût total pour les étapes k à N si on est dans l'état x à l'étape k et si on utilise la politique π

$$= g_N(x_N) + \sum_{n=k}^{N-1} g_n(x_n, u_n)$$

s.l.c. $u_n = \mu_n(x_n)$ et $x_{n+1} = f_n(x_n, u_n)$, $n = k, \dots, N-1$
 $x_k = x$ (fixé).

Ces valeurs satisfont les équations de récurrence (ou équations fonctionnelles) suivantes:

$$J_{\pi,N}(x) = g_N(x) \quad \forall x \in X_N$$

$$J_{\pi,k}(x) = g_k(x, \mu_k(x)) + J_{\pi,k+1}(f_k(x, \mu_k(x))) \quad \text{pour tout } x \in X_k, \\ \text{pour } k = N-1, N-2, \dots, 1, 0.$$

Sans fixer la politique, pour $0 \leq k \leq N$ et $x \in X_k$, soient

$J_k(x)$ = coût optimal pour les étapes k à N si on est dans l'état x à l'étape k

$$= \min_{u_k, \dots, u_{N-1}} \left(g_N(x_N) + \sum_{n=k}^{N-1} g_n(x_n, u_n) \right)$$

s.l.c. $u_n \in U_n(x_n)$ et $x_{n+1} = f_n(x_n, u_n)$, $n = k, \dots, N-1$
 $x_k = x$ (fixé).

Une **politique admissible** $\pi^* = (\mu_0^*, \dots, \mu_{N-1}^*)$ telle que

$$J_{\pi^*,0}(x) = J_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} J(x) \quad \text{pour tout } x$$

s'appelle une **politique optimale**.

On a les **équations de récurrence** (équations de Bellman):

$$\begin{aligned}
 J_N(x) &= g_N(x) \quad \text{pour tout } x \in X_N \\
 J_k(x) &= \min_{u \in U_k(x)} \{g_k(x, u) + J_{k+1}(f_k(x, u))\} \quad \text{pour tout } x \in X_k, \\
 &\quad \text{pour } k = N - 1, N - 2, \dots, 1, 0.
 \end{aligned}$$

On cherche $J_0(x_0)$ pour x_0 fixé (problème de la valeur initiale).

On peut résoudre par fixation itérative, **chaînage arrière**:

Calculer $J_{N-1}(x)$ pour tout $x \in X_{N-1}$,
 puis $J_{N-2}(x)$ pour tout $x \in X_{N-2}$, etc.

On a les **équations de récurrence** (équations de Bellman):

$$\begin{aligned}
 J_N(x) &= g_N(x) \quad \text{pour tout } x \in X_N \\
 J_k(x) &= \min_{u \in U_k(x)} \{g_k(x, u) + J_{k+1}(f_k(x, u))\} \quad \text{pour tout } x \in X_k, \\
 &\quad \text{pour } k = N - 1, N - 2, \dots, 1, 0.
 \end{aligned}$$

On cherche $J_0(x_0)$ pour x_0 fixé (problème de la valeur initiale).

On peut résoudre par fixation itérative, **chaînage arrière**:

Calculer $J_{N-1}(x)$ pour tout $x \in X_{N-1}$,
 puis $J_{N-2}(x)$ pour tout $x \in X_{N-2}$, etc.

Comment retrouver la solution optimale ?

Durant les calculs, on mémorise, pour chaque k et $x \in X_k$,

$$\mu_k^*(x) = \arg \min_{u \in U_k(x)} \{g_k(x, u) + J_{k+1}(f_k(x, u))\},$$

qui est la **décision optimale** à prendre dans l'état x à l'étape k .

On a les **équations de récurrence** (équations de Bellman):

$$\begin{aligned}
 J_N(x) &= g_N(x) \quad \text{pour tout } x \in X_N \\
 J_k(x) &= \min_{u \in U_k(x)} \{g_k(x, u) + J_{k+1}(f_k(x, u))\} \quad \text{pour tout } x \in X_k, \\
 &\quad \text{pour } k = N - 1, N - 2, \dots, 1, 0.
 \end{aligned}$$

On cherche $J_0(x_0)$ pour x_0 fixé (problème de la valeur initiale).

On peut résoudre par fixation itérative, **chaînage arrière**:

Calculer $J_{N-1}(x)$ pour tout $x \in X_{N-1}$,
 puis $J_{N-2}(x)$ pour tout $x \in X_{N-2}$, etc.

Comment retrouver la solution optimale ?

Durant les calculs, on mémorise, pour chaque k et $x \in X_k$,

$$\mu_k^*(x) = \arg \min_{u \in U_k(x)} \{g_k(x, u) + J_{k+1}(f_k(x, u))\},$$

qui est la **décision optimale** à prendre dans l'état x à l'étape k .

Note: La notation pourra varier un peu selon les problèmes.

Procédure ChaînageArrière

pour tout $x \in X_N$, $J_N(x) \leftarrow g_N(x)$;
 pour $k = N - 1, \dots, 0$ faire
 pour tout $x \in X_k$ faire

$$J_k(x) \leftarrow \min_{u \in U_k(x)} \{g_k(x, u) + J_{k+1}(f_k(x, u))\};$$

$$\mu_k^*(x) \leftarrow \arg \min_{u \in U_k(x)} \{g_k(x, u) + J_{k+1}(f_k(x, u))\};$$

Principe d'optimalité de Bellman:

Si $\pi^* = (\mu_0^*, \dots, \mu_{N-1}^*)$ est une politique optimale pour le problème initial et si $0 \leq i \leq j \leq N - 1$, alors la politique tronquée $\pi_{i,j}^* = (\mu_i^*, \dots, \mu_j^*)$ est une politique optimale pour le sous-problème qui consiste à minimiser

$$\sum_{k=i}^j g_k(x_k, u_k)$$

pour x_i et x_j fixés. Ici, je note $g_N(x_N, u_N) \equiv g_N(x_N)$.

Hypothèses importantes: Temps discret et coûts additifs.

Principe d'optimalité de Bellman:

Si $\pi^* = (\mu_0^*, \dots, \mu_{N-1}^*)$ est une politique optimale pour le problème initial et si $0 \leq i \leq j \leq N - 1$, alors la politique tronquée $\pi_{i,j}^* = (\mu_i^*, \dots, \mu_j^*)$ est une politique optimale pour le sous-problème qui consiste à minimiser

$$\sum_{k=i}^j g_k(x_k, u_k)$$

pour x_i et x_j fixés. Ici, je note $g_N(x_N, u_N) \equiv g_N(x_N)$.

Hypothèses importantes: Temps discret et coûts additifs.

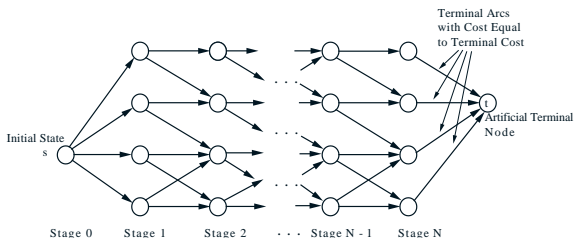
Si le coût n'est pas additif, le principe d'optimalité ne tient pas nécessairement. Exemple: Si on remplace la somme par le maximum, i.e., on veut minimiser

$$\max [g_k(x_k, u_k), \dots, g_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}), g_N(x_N)] .$$

Plus court chemin dans un réseau.

Si X_k et chaque $U_k(x)$ sont des ensembles **finis**, le problème se ramène à un problème de plus court chemin dans un réseau.

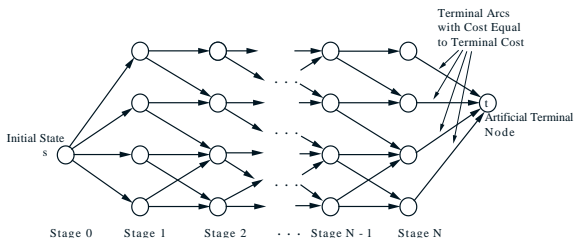
Les **noeuds** du réseau sont tous les couples (k, x_k) possibles, pour $0 \leq k \leq N$ et $x_k \in X_k$, et les **arcs** partant d'un noeud correspondent aux décisions u_k que l'on peut prendre à partir de ce noeud.



Plus court chemin dans un réseau.

Si X_k et chaque $U_k(x)$ sont des ensembles **finis**, le problème se ramène à un problème de plus court chemin dans un réseau.

Les **noeuds** du réseau sont tous les couples (k, x_k) possibles, pour $0 \leq k \leq N$ et $x_k \in X_k$, et les **arcs** partant d'un noeud correspondent aux décisions u_k que l'on peut prendre à partir de ce noeud.



Ce réseau est sans cycle et ordonné topologiquement.

Tout algorithme pour trouver le plus court chemin dans un tel réseau s'applique pour calculer une politique optimale pour ce PDS.

Important: Il ne faut pas que le nombre d'états devienne trop grand!

Exemple: ordonnancement de tâches (DPOC, pages 7 et 19).

On a 4 opérations, $\{A, B, C, D\}$, à effectuer sur une machine.

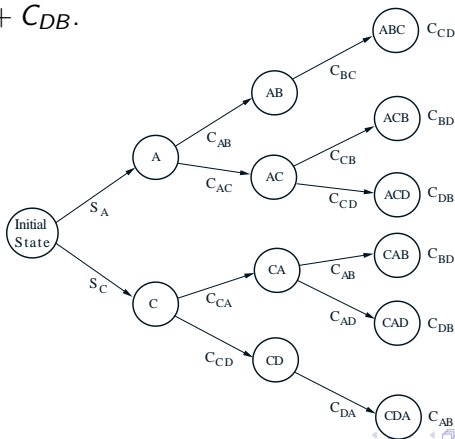
On doit faire A avant B, et C avant D.

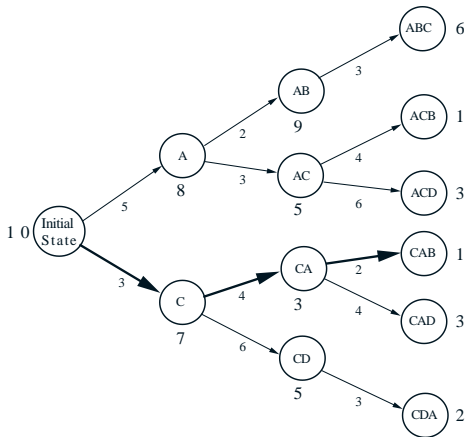
Il y a un coût S_m si on débute avec l'opération m ,

puis un coût C_{mn} pour passer de l'opération m à l'opération n .

Par exemple, le coût pour la séquence ACDB, le coût total est

$S_A + C_{AC} + C_{CD} + C_{DB}$.





Une seule tâche à accomplir ($k = N - 1 = 3$): aucune décision à prendre.

Par le principe d'optimalité, s'il ne reste que deux tâches, l'ordonnement de ces deux tâches doit minimiser le coût associé.

Même chose s'il ne reste que trois tâches.

Exemple: allocation d'équipes médicales

On dispose de 5 équipes médicales pour 3 pays en développement. Plus on alloue d'équipes médicales à un pays, plus on augmente son nombre d'années–personnes de vie espérée. L'augmentation est non-linéaire.

En allouant u_k (un entier) équipes au pays k , on lui ajoute $g_k(u_k)$ milliers d'années–personnes de vie espérée additionnelle.

On veut maximiser $g_0(u_0) + g_1(u_1) + g_2(u_2)$, sujet à $u_0 + u_1 + u_2 \leq 5$.

| $g_k(u_k)$ vs u_k pour chaque pays k | | | |
|--|--------|--------|--------|
| u_k | Pays 0 | Pays 1 | Pays 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 45 | 20 | 50 |
| 2 | 70 | 45 | 70 |
| 3 | 90 | 75 | 80 |
| 4 | 105 | 110 | 100 |
| 5 | 120 | 150 | 130 |

On alloue $u_0 \leq 5$ au pays 0, puis $u_1 \leq x_1 = 5 - u_0$ au pays 1, puis $u_2 = x_2 = x_1 - u_1$ (le reste) au pays 2.

On alloue $u_0 \leq 5$ au pays 0, puis $u_1 \leq x_1 = 5 - u_0$ au pays 1, puis $u_2 = x_2 = x_1 - u_1$ (le reste) au pays 2.

PDS: $N = 3$. À l'étape $k \leq 2$, il reste u_k, \dots, u_2 à fixer, x_k équipes sont encore disponibles, et $J_k(x_k)$ est le revenu optimal pour les pays $k, \dots, 2$.

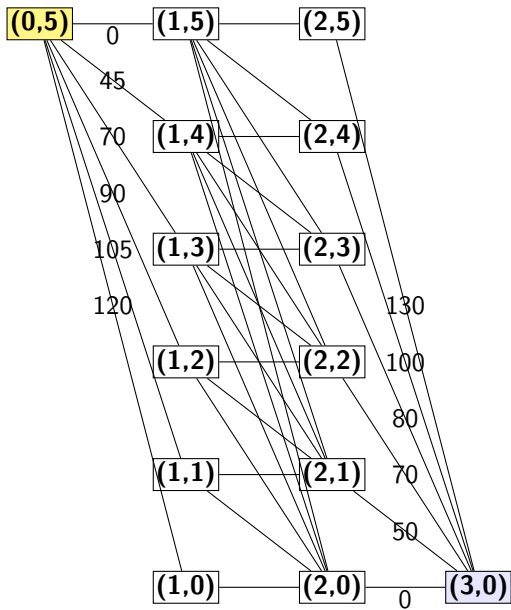
On alloue $u_0 \leq 5$ au pays 0, puis $u_1 \leq x_1 = 5 - u_0$ au pays 1, puis $u_2 = x_2 = x_1 - u_1$ (le reste) au pays 2.

PDS: $N = 3$. À l'étape $k \leq 2$, il reste u_k, \dots, u_2 à fixer, x_k équipes sont encore disponibles, et $J_k(x_k)$ est le revenu optimal pour les pays $k, \dots, 2$.

Les $g_k(x_k, u_k) = g_k(u_k)$ sont les valeurs données dans le tableau. (Ici, elles ne dépendent que de u_k et pas de x_k .)

Voyons comment on peut résoudre par chaînage arrière. Nous allons illustrer ce qui se passe sur le réseau, pour bien voir qu'il s'agit d'un problème de plus long chemin. **Au tableau.**

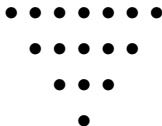
Le noeud (k, x) correspond à l'état $x_k = x$: il reste x équipes pour les pays $k, \dots, 2$. On cherche le plus long chemin de $(0, 5)$ à $(3, 0)$.



Exemple: Jeu de Nim.

Quand j'étais étudiant au CEGEP, une variante du jeu de Nim était populaire au collège où j'allais. Règles du jeu:

On place des pièces dans 4 rangées comme suit:



Deux joueurs jouent à tour de rôle.

Lorsque c'est son tour, un joueur enlève un nombre arbitraire de jetons dans un même rangée. Il doit en enlever au moins 1. Celui qui enlève le dernier jeton perd.

Quelle est la stratégie optimale et comment la calculer?

Dénotons l'état du jeu par $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, où x_i est le nombre de jetons dans la rangée i . Ici, le numéro d'étape n'a pas d'importance.

$g(x) = \mathbb{I}[x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0]$ (si c'est à nous de jouer et il ne reste plus de jeton, on gagne et on a un revenu de 1).

$J(x) = 1$ [=0] si on est dans une position gagnante [perdante].

On essaie de mettre l'adversaire dans une position perdante.

On a

$$\begin{aligned} J(x) &= J(x_1, \dots, x_4) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 1 - \min_{u \in U(x)} J(x_1 - u_1, \dots, x_4 - u_4) & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

où $U(x) = \{u = (u_1, \dots, u_4) : 0 \leq u_i \leq x_i \text{ pour tout } i \text{ et exactement un seul des } u_i \text{ est positif}\}$.

On peut calculer un tableau qui pour chaque x nous donne $J(x)$ et un coup optimal à jouer $\mu^*(x)$. On peut simplifier les calculs en **agrégant les états**; e.g., ne considérer que les états x où $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$. On a

$$J(x_1, \dots, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 0 & \text{si } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 1 & \text{si } x_1 = 2 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ & \text{etc.} \end{cases}$$

On peut calculer un tableau qui pour chaque x nous donne $J(x)$ et un coup optimal à jouer $\mu^*(x)$. On peut simplifier les calculs en **agrégant les états**; e.g., ne considérer que les états x où $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$. On a

$$J(x_1, \dots, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 0 & \text{si } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 1 & \text{si } x_1 = 2 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

| état x | décision | prochain état | valeur $J(x)$ | condition |
|-----------|----------|---------------|---------------|-----------|
| (0 0 0 0) | — | — | 1 | |

On peut calculer un tableau qui pour chaque x nous donne $J(x)$ et un coup optimal à jouer $\mu^*(x)$. On peut simplifier les calculs en **agrégant les états**; e.g., ne considérer que les états x où $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$. On a

$$J(x_1, \dots, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 0 & \text{si } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 1 & \text{si } x_1 = 2 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

| état x | décision | prochain état | valeur $J(x)$ | condition |
|-----------|-----------|---------------|---------------|-----------|
| (0 0 0 0) | — | — | 1 | |
| (1 0 0 0) | (1 0 0 0) | (0 0 0 0) | 0 | |

On peut calculer un tableau qui pour chaque x nous donne $J(x)$ et un coup optimal à jouer $\mu^*(x)$. On peut simplifier les calculs en **agrégant les états**; e.g., ne considérer que les états x où $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$. On a

$$J(x_1, \dots, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 0 & \text{si } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 1 & \text{si } x_1 = 2 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ & \text{etc.} \end{cases}$$

| état x | décision | prochain état | valeur $J(x)$ | condition |
|----------------|--------------------|---------------|---------------|--------------|
| (0 0 0 0) | — | — | 1 | |
| (1 0 0 0) | (1 0 0 0) | (0 0 0 0) | 0 | |
| (x_1 0 0 0) | ($x_1 - 1$ 0 0 0) | (1 0 0 0) | 1 | $x_1 \geq 2$ |

On peut calculer un tableau qui pour chaque x nous donne $J(x)$ et un coup optimal à jouer $\mu^*(x)$. On peut simplifier les calculs en **agrégant les états**; e.g., ne considérer que les états x où $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$. On a

$$J(x_1, \dots, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 0 & \text{si } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 1 & \text{si } x_1 = 2 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ & \text{etc.} \end{cases}$$

| état x | décision | prochain état | valeur $J(x)$ | condition |
|----------------|--------------------|---------------|---------------|--------------|
| (0 0 0 0) | — | — | 1 | |
| (1 0 0 0) | (1 0 0 0) | (0 0 0 0) | 0 | |
| (x_1 0 0 0) | ($x_1 - 1$ 0 0 0) | (1 0 0 0) | 1 | $x_1 \geq 2$ |
| (x_1 1 0 0) | (x_1 0 0 0) | (1 0 0 0) | 1 | $x_1 \geq 1$ |

On peut calculer un tableau qui pour chaque x nous donne $J(x)$ et un coup optimal à jouer $\mu^*(x)$. On peut simplifier les calculs en **agrégant les états**; e.g., ne considérer que les états x où $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$. On a

$$J(x_1, \dots, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 0 & \text{si } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 1 & \text{si } x_1 = 2 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ & \text{etc.} \end{cases}$$

| état x | décision | prochain état | valeur $J(x)$ | condition |
|----------------|--------------------|---------------|---------------|--------------|
| (0 0 0 0) | — | — | 1 | |
| (1 0 0 0) | (1 0 0 0) | (0 0 0 0) | 0 | |
| (x_1 0 0 0) | ($x_1 - 1$ 0 0 0) | (1 0 0 0) | 1 | $x_1 \geq 2$ |
| (x_1 1 0 0) | (x_1 0 0 0) | (1 0 0 0) | 1 | $x_1 \geq 1$ |
| (2 2 0 0) | (0 2 0 0) | (2 0 0 0) | 0 | |

On peut calculer un tableau qui pour chaque x nous donne $J(x)$ et un coup optimal à jouer $\mu^*(x)$. On peut simplifier les calculs en **agrégant les états**; e.g., ne considérer que les états x où $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$. On a

$$J(x_1, \dots, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 0 & \text{si } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 1 & \text{si } x_1 = 2 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

| état x | décision | prochain état | valeur $J(x)$ | condition |
|----------------|--------------------|---------------|---------------|--------------|
| (0 0 0 0) | — | — | 1 | |
| (1 0 0 0) | (1 0 0 0) | (0 0 0 0) | 0 | |
| (x_1 0 0 0) | ($x_1 - 1$ 0 0 0) | (1 0 0 0) | 1 | $x_1 \geq 2$ |
| (x_1 1 0 0) | (x_1 0 0 0) | (1 0 0 0) | 1 | $x_1 \geq 1$ |
| (2 2 0 0) | (0 2 0 0) | (2 0 0 0) | 0 | |
| (x_1 2 0 0) | ($x_1 - 2$ 0 0 0) | (2 2 0 0) | 1 | $x_1 \geq 3$ |

On peut calculer un tableau qui pour chaque x nous donne $J(x)$ et un coup optimal à jouer $\mu^*(x)$. On peut simplifier les calculs en **agrégant les états**; e.g., ne considérer que les états x où $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$. On a

$$J(x_1, \dots, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 0 & \text{si } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ 1 & \text{si } x_1 = 2 \text{ et } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

| état x | décision | prochain état | valeur $J(x)$ | condition |
|----------------|--------------------|---------------|---------------|--------------|
| (0 0 0 0) | — | — | 1 | |
| (1 0 0 0) | (1 0 0 0) | (0 0 0 0) | 0 | |
| (x_1 0 0 0) | ($x_1 - 1$ 0 0 0) | (1 0 0 0) | 1 | $x_1 \geq 2$ |
| (x_1 1 0 0) | (x_1 0 0 0) | (1 0 0 0) | 1 | $x_1 \geq 1$ |
| (2 2 0 0) | (0 2 0 0) | (2 0 0 0) | 0 | |
| (x_1 2 0 0) | ($x_1 - 2$ 0 0 0) | (2 2 0 0) | 1 | $x_1 \geq 3$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

Exemple: une fonction objectif sous forme produit.

N équipes de chercheurs travaillent (indépendamment) sur le même problème d'ingénierie.

On voudrait qu'au moins une équipe résolve le problème d'ici 2 mois. On dispose de b nouveaux brillants chercheurs à leur affecter.

Soit $p_k(u_k)$ la probabilité que l'équipe k échoue si on lui alloue u_k chercheurs additionnels.

La probabilité que toutes les équipes échouent est $p_1(u_1) \times \cdots \times p_N(u_N)$.
On veut minimiser cette probabilité.

Exemple: une fonction objectif sous forme produit.

N équipes de chercheurs travaillent (indépendamment) sur le même problème d'ingénierie.

On voudrait qu'au moins une équipe résolve le problème d'ici 2 mois. On dispose de b nouveaux brillants chercheurs à leur affecter.

Soit $p_k(u_k)$ la probabilité que l'équipe k échoue si on lui alloue u_k chercheurs additionnels.

La probabilité que toutes les équipes échouent est $p_1(u_1) \times \cdots \times p_N(u_N)$.
On veut minimiser cette probabilité.

Exemple de Hillier et Lieberman: $N = 3$, $b = 2$ et les $p_k(u_k)$ sont:

| Probabilité d'échouer $p_k(u)$ | | | |
|------------------------------------|----------|----------|----------|
| Nb. u de chercheurs additionnels | Équipe 1 | Équipe 2 | Équipe 3 |
| 0 | 0.40 | 0.60 | 0.80 |
| 1 | 0.20 | 0.40 | 0.50 |
| 2 | 0.15 | 0.20 | 0.30 |

$J_k(x)$ = Prob. que toutes les équipes k, \dots, N échouent, si on leur alloue x chercheurs additionnels de façon optimale.

On a:

$$\begin{aligned}
 J_N(x) &= p_N(x) \text{ pour tout } x; \\
 J_k(x) &= \min_{u \in \{0, \dots, x\}} p_k(u) \times J_{k+1}(x - u), \\
 &\quad x = 0, \dots, b; \quad k = N - 1, \dots, 1.
 \end{aligned}$$

Un modèle de PDS probabiliste

Processus de décision markovien sur horizon fini

À l'étape k , on observe l'état x_k et prend une décision $u_k \in U_k(x_k)$.

Puis une variable aléatoire ω_k est générée selon une loi de probabilité $\mathbb{P}_k(\cdot \mid x_k, u_k)$ qui peut dépendre de (k, x_k, u_k) .

Hypothèse: les valeurs précédentes $\{(x_n, u_n, \omega_n), n < k\}$ ne donnent pas d'information additionnelle sur la loi \mathbb{P}_k lorsqu'on connaît (k, x_k, u_k) .

On observe ω_k , on paye un coût $g_k(x_k, u_k, \omega_k)$, et l'état à la prochaine étape est $x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, \omega_k)$.

Un modèle de PDS probabiliste

Processus de décision markovien sur horizon fini

À l'étape k , on observe l'état x_k et prend une décision $u_k \in U_k(x_k)$.

Puis une variable aléatoire ω_k est générée selon une loi de probabilité

$\mathbb{P}_k(\cdot \mid x_k, u_k)$ qui peut dépendre de (k, x_k, u_k) .

Hypothèse: les valeurs précédentes $\{(x_n, u_n, \omega_n), n < k\}$ ne donnent pas d'information additionnelle sur la loi \mathbb{P}_k lorsqu'on connaît (k, x_k, u_k) .

On observe ω_k , on paye un coût $g_k(x_k, u_k, \omega_k)$, et l'état à la prochaine étape est $x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, \omega_k)$. Coût total (aléatoire) additif:

$$g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, \omega_k).$$

Un modèle de PDS probabiliste

Processus de décision markovien sur horizon fini

À l'étape k , on observe l'état x_k et prend une décision $u_k \in U_k(x_k)$.

Puis une variable aléatoire ω_k est générée selon une loi de probabilité $\mathbb{P}_k(\cdot \mid x_k, u_k)$ qui peut dépendre de (k, x_k, u_k) .

Hypothèse: les valeurs précédentes $\{(x_n, u_n, \omega_n), n < k\}$ ne donnent pas d'information additionnelle sur la loi \mathbb{P}_k lorsqu'on connaît (k, x_k, u_k) .

On observe ω_k , on paye un coût $g_k(x_k, u_k, \omega_k)$, et l'état à la prochaine étape est $x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, \omega_k)$. Coût total (aléatoire) additif:

$$g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, \omega_k).$$

Une politique admissible est une suite de fonctions $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$ telle que $\mu_k : X_k \rightarrow U_k$ et $\mu_k(x) \in U_k(x)$ pour tout $x \in X_k$, $0 \leq k \leq N-1$ (+ détails techniques: μ_k doit être une fonction mesurable, etc.).

À l'étape k , on a :

X_k = espace d'états;

$U_k(x)$ = ensemble des décisions admissibles dans l'état $x \in X_k$;

D_k = l'espace des perturbations ω_k ;

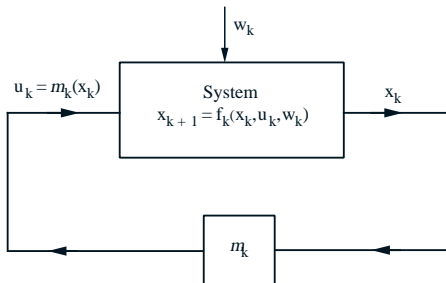
g_k = fonction de coût;

f_k = fonction de transition;

x_k = état du système à l'étape k ;

u_k = décision prise à l'étape k (peut dépendre de x_k).

ω_k = perturbation (var. aléatoire) produite à l'étape k , de loi \mathbb{P}_k .



Pour $0 \leq k \leq N$ et $x \in X_k$, posons

$$\begin{aligned}
 J_{\pi,k}(x) &= \text{coût espéré total de l'étape } k \text{ à la fin,} \\
 &\quad \text{si on est dans l'état } x \text{ à l'étape } k \\
 &\quad \text{et si on utilise la politique } \pi \\
 &= \mathbb{E}_{\pi,x} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=k}^{N-1} g_n(x_n, u_n, \omega_n) \right]
 \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}_{\pi,x}$ indique l'espérance lorsque $x_k = x$, $u_n = \mu_n(x_n)$ et $x_{n+1} = f_n(x_n, u_n, \omega_n)$ pour $n = k, \dots, N-1$.

Pour une politique π donnée, on a l'équation de **récurrence**

$$\begin{aligned}
 J_{\pi,N}(x) &= g_N(x) \quad \text{pour tout } x \in X_N \\
 J_{\pi,k}(x) &= \mathbb{E}_{\pi,x} [g_k(x, \mu_k(x), \omega_k) + J_{\pi,k+1}(f_k(x, \mu_k(x), \omega_k))] \\
 &\quad \text{pour } 0 \leq k \leq N, x \in X_k.
 \end{aligned}$$

où l'espérance est par rapport à ω_k qui suit la loi $\mathbb{P}_k(\cdot \mid x, \mu_k(x))$.

En effet:

$$\begin{aligned}
 & J_{\pi,k}(x) \\
 = & \mathbb{E}_{\pi,x} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=k}^{N-1} g_n(x_n, u_n, \omega_n) \right] \\
 = & \mathbb{E}_{\pi,x} \left[\mathbb{E}_{\pi,x} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=k}^{N-1} g_n(x_n, u_n, \omega_n) \mid \omega_k \right] \right] \\
 = & \mathbb{E}_{\pi,x} \left[g_k(x, \mu_k(x), \omega_k) + \mathbb{E}_{\pi,x} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=k+1}^{N-1} g_n(x_n, u_n, \omega_n) \mid \omega_k \right] \right] \\
 = & \mathbb{E}_{\pi,x} \left[g_k(x, \mu_k(x), \omega_k) + J_{\pi,k+1}(f_k(x, \mu_k(x), \omega_k)) \right].
 \end{aligned}$$

En effet:

$$\begin{aligned}
 & J_{\pi,k}(x) \\
 = & \mathbb{E}_{\pi,x} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=k}^{N-1} g_n(x_n, u_n, \omega_n) \right] \\
 = & \mathbb{E}_{\pi,x} \left[\mathbb{E}_{\pi,x} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=k}^{N-1} g_n(x_n, u_n, \omega_n) \mid \omega_k \right] \right] \\
 = & \mathbb{E}_{\pi,x} \left[g_k(x, \mu_k(x), \omega_k) + \mathbb{E}_{\pi,x} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=k+1}^{N-1} g_n(x_n, u_n, \omega_n) \mid \omega_k \right] \right] \\
 = & \mathbb{E}_{\pi,x} \left[g_k(x, \mu_k(x), \omega_k) + J_{\pi,k+1}(f_k(x, \mu_k(x), \omega_k)) \right].
 \end{aligned}$$

On cherche une politique π qui **minimise** $J_{\pi,0}(x_0)$, l'**espérance mathématique** de la somme des coûts de l'étape 0 à l'étape N .

Notons $\pi^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \dots, \mu_{N-1}^*)$ une telle **politique optimale**. Posons

$$\begin{aligned}
 J_k^*(x) & = \text{coût espéré total optimal de l'étape } k \text{ à la fin,} \\
 & \text{si on est dans l'état } x \text{ à l'étape } k \\
 & = \min_{\pi} J_{\pi,k}(x) \\
 & = \min_{\mu_k, \dots, \mu_{N-1}} J_{\mu_k, \dots, \mu_{N-1}, k}(x).
 \end{aligned}$$

Proposition.

(A) On a $J_k^* \equiv J_k$, où les fonctions J_k sont définies par les équations de récurrence (ou équations de la programmation dynamique):

$$\begin{aligned} J_N(x) &= g_N(x) \quad \forall x \in X_N \\ J_k(x) &= \min_{u \in U_k(x)} \mathbb{E} [g_k(x, u, \omega_k) + J_{k+1}(f_k(x, u, \omega_k))] \\ &\text{pour } 0 \leq k \leq N-1, x \in X_k, \end{aligned}$$

où l'espérance \mathbb{E} est par rapport à ω_k qui suit la loi $\mathbb{P}_k(\cdot | x, u)$.

(B) Une valeur de u qui fait atteindre l'infimum est une décision optimale à prendre lorsqu'on est dans l'état x à l'étape k . On peut définir une politique optimale (si elle existe) par

$$\mu_k^*(x) = \arg \min_{u \in U_k(x)} \mathbb{E} [g_k(x, u, \omega_k) + J_{k+1}(f_k(x, u, \omega_k))].$$

On a alors $J_k \equiv J_{\pi^*, k}$ pour tout k .

Preuve informelle de (A) et (B): DPOC pages 23 et 44–46.

Pour $\pi = (\mu_1, \dots, \mu_{N-1})$, on note $\pi^k = (\mu_k, \dots, \mu_{N-1})$. On a

$$J_k^*(x) = \min_{\pi^k} \mathbb{E}_{\pi^k, x} \left[g_N(x_N) + \sum_{i=k}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \right]$$

pour $0 \leq k \leq N$, $x \in X_k$.

Preuve informelle de (A) et (B): DPOC pages 23 et 44–46.

Pour $\pi = (\mu_1, \dots, \mu_{N-1})$, on note $\pi^k = (\mu_k, \dots, \mu_{N-1})$. On a

$$J_k^*(x) = \min_{\pi^k} \mathbb{E}_{\pi^k, x} \left[g_N(x_N) + \sum_{i=k}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \right]$$

pour $0 \leq k \leq N$, $x \in X_k$.

Pour $k = N$, on pose $J_N^*(x_N) = g_N(x_N)$.

On montre par induction sur k (pour $k = N - 1, \dots, 0$) que $J_k^* = J_k$.
Supposons que $J_{k+1}^* = J_{k+1}$. On écrit $\pi^k = (\mu_k, \pi^{k+1})$.

Preuve informelle: on suppose ici que tout est fini et que le min est toujours atteint:

$$\begin{aligned} & J_k^*(x_k) \\ = & \min_{(\mu_k, \pi^{k+1})} \mathbb{E}_{\pi^k, x_k} \left[g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) \right. \\ & \left. + g_N(x_N) + \sum_{i=k+1}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J_k^*(x_k) \\
= & \min_{(\mu_k, \pi^{k+1})} \mathbb{E}_{\pi^k, x_k} \left[g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) \right. \\
& \quad \left. + g_N(x_N) + \sum_{i=k+1}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \right] \\
= & \min_{\mu_k} \mathbb{E}_{\pi^k, x_k} \left(g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) + \right. \\
& \quad \left. \min_{\pi^{k+1}} \left[\mathbb{E}_{\pi^{k+1}, x_{k+1}} \left[g_N(x_N) + \sum_{i=k+1}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \mid \omega_k \right] \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J_k^*(x_k) \\
= & \min_{(\mu_k, \pi^{k+1})} \mathbb{E}_{\pi^k, x_k} \left[g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) \right. \\
& \quad \left. + g_N(x_N) + \sum_{i=k+1}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \right] \\
= & \min_{\mu_k} \mathbb{E}_{\pi^k, x_k} \left(g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) + \right. \\
& \quad \left. \min_{\pi^{k+1}} \left[\mathbb{E}_{\pi^{k+1}, x_{k+1}} \left[g_N(x_N) + \sum_{i=k+1}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \mid \omega_k \right] \right] \right) \\
= & \min_{\mu_k} \mathbb{E}_{\pi^k, x_k} \left(g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) + J_{k+1}^*(f_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J_k^*(x_k) \\
= & \min_{(\mu_k, \pi^{k+1})} \mathbb{E}_{\pi^k, x_k} \left[g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) \right. \\
& \quad \left. + g_N(x_N) + \sum_{i=k+1}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \right] \\
= & \min_{\mu_k} \mathbb{E}_{\pi^k, x_k} \left(g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) + \right. \\
& \quad \left. \min_{\pi^{k+1}} \left[\mathbb{E}_{\pi^{k+1}, x_{k+1}} \left[g_N(x_N) + \sum_{i=k+1}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \mid \omega_k \right] \right] \right) \\
= & \min_{\mu_k} \mathbb{E}_{\pi^k, x_k} (g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) + J_{k+1}^*(f_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k))) \\
= & \min_{u_k \in U_k(x_k)} \mathbb{E}_{\pi^k, x_k} (g_k(x_k, u_k, \omega_k) + J_{k+1}^*(f_k(x_k, u_k, \omega_k))) \\
= & \min_{u_k \in U_k(x_k)} \mathbb{E}_{\pi^k, x_k} (g_k(x_k, u_k, \omega_k) + J_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \omega_k))) = J_k(x_k).
\end{aligned}$$

Procédure ChaînageArrière

pour tout $x \in X_N$, $J_N(x) \leftarrow g_N(x)$;
 pour $k = N - 1, \dots, 0$ faire
 pour tout $x \in X_k$ faire

$$J_k(x) \leftarrow \min_{u \in U_k(x)} \mathbb{E} [g_k(x, u, \omega_k) + J_{k+1}(f_k(x, u, \omega_k))];$$

$$\mu_k^*(x) \leftarrow \arg \min_{u \in U_k(x)} \mathbb{E} [g_k(x, u, \omega_k) + J_{k+1}(f_k(x, u, \omega_k))];$$

Principe d'optimalité de Bellman (cas probabiliste):

Si $\pi^* = (\mu_0^*, \dots, \mu_{N-1}^*)$ est une politique optimale pour le problème initial et si $0 < k < N$, alors la politique tronquée $\pi_k^* = (\mu_k^*, \dots, \mu_{N-1}^*)$ est une politique optimale pour le sous-problème “des décisions futures”, qui consiste à minimiser

$$\mathbb{E}_{\mu_k, \dots, \mu_{N-1}} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=k}^{N-1} g_n(x_n, u_n, \omega_n) \mid x_k \right].$$

par rapport à μ_k, \dots, μ_{N-1} .

Hypothèses: Temps discret, modèle markovien, coûts additifs.

Si le coût n'est pas additif, le principe d'optimalité ne tient pas nécessairement.

Exemple: si on veut minimiser

$$\mathbb{E}_{\mu_k, \dots, \mu_{N-1}} [\max (g_k(x_k, u_k, \omega_k), \dots, g_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}, \omega_{N-1}), g_N(x_N)) \mid x_k].$$

Si le coût n'est pas additif, le principe d'optimalité ne tient pas nécessairement.

Exemple: si on veut minimiser

$$\mathbb{E}_{\mu_k, \dots, \mu_{N-1}} [\max (g_k(x_k, u_k, \omega_k), \dots, g_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}, \omega_{N-1}), g_N(x_N)) \mid x_k].$$

Le principe ne tient pas non plus pour le sous-problème: minimiser

$$\mathbb{E}_{\mu_k, \dots, \mu_j} \left[\sum_{n=k}^j g_n(x_n, u_n, \omega_n) \mid x_k \right]$$

si $j < N$ et l'état x_j n'est pas déterminé, car il peut arriver que la politique optimale π^* amène des coûts un peu plus élevés pour les étapes k à j que la politique optimale pour le sous-problème, afin d'éviter un gros coût à l'étape N , par exemple.

Commande en boucle fermée: on prend chaque décision le plus tard possible, lorsqu'on a le maximum d'information.

Par opposition, **commande en boucle ouverte:** on prend toutes les décisions u_0, \dots, u_{N-1} dès le départ.

La différence de coût espéré entre les deux est la **valeur de l'information additionnelle**. Cette différence peut être grande.

Dans le cas déterministe: pas de différence, car aucune information additionnelle à chaque étape.

Commande en boucle fermée: on prend chaque décision le plus tard possible, lorsqu'on a le maximum d'information.

Par opposition, **commande en boucle ouverte:** on prend toutes les décisions u_0, \dots, u_{N-1} dès le départ.

La différence de coût espéré entre les deux est la **valeur de l'information additionnelle**. Cette différence peut être grande.

Dans le cas déterministe: pas de différence, car aucune information additionnelle à chaque étape.

Ce modèle de PDS possède de nombreuses généralisations:

- Introduction d'un facteur d'actualisation;
- Horizon infini;
- Revenu moyen par unité de temps sur horizon infini;
- Espaces d'états et de décisions infinis;
- Évolution en temps continu;
- État partiellement observé; Etc.

Retour à l'exemple (modifié) de gestion d'un inventaire.

Monsieur D. Taillant vend des Zyx à Loinville.

Les clients arrivent au hasard pour acheter des Zyx.

Au début de chaque mois, l'avion vient à Loinville et peut apporter une commande de Zyx. Soient:

x_k = Niveau des stocks au début du mois k ,
avant de commander;

u_k = Nombre de Zyx commandés (et reçus) au début du mois k ;

ω_k = Nombre de Zyx demandés par les clients durant le
mois k . On suppose que les ω_k sont des variables
aléatoires discrètes indépendantes;

$C + cu$ = Coût d'une commande de u Zyx;

v = Prix de vente d'un Zyx (encaissé à la fin du mois);

B = Borne supérieure sur le niveau des stocks.

$r_k(x_k)$ = Coût d'inventaire pour x_k Zyx au début du mois k ;

$-g_N(x_N)$ = Valeur de revente de x_N Zyx au début du mois N ;

Posons:

$J_k(x)$ = coût espéré total pour les mois k à N , si $x_k = x$ et que l'on suit une politique optimale;

Si les inventaires négatifs ("backlogs") sont permis, on a

$$x_{k+1} = x_k + u_k - \omega_k$$

et on peut optimiser sans tenir compte des revenus de vente, car ceux-ci ne dépendent pas de la politique. Récurrence:

$$J_N(x) = g_N(x), \quad \text{pour } x \leq B;$$

$$J_k(x) = \min_{0 \leq u \leq B-x} \left(r_k(x) + \mathbb{I}(u > 0)C + cu - v\mathbb{E}[\omega_k] + \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}[\omega_k = i] J_{k+1}(x + u - i) \right), \quad x \leq B; \quad k = N-1, \dots, 0;$$

$$\mu_k^*(x) = \arg \min_{0 \leq u \leq B-x} \left(\mathbb{I}(u > 0)C + cu + \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}[\omega_k = i] J_{k+1}(x + u - i) \right).$$

(On peut enlever $r_k(x) + v\mathbb{E}[\omega_k]$, car indép. de u .)

$$J_N(x) = g_N(x), \quad \text{pour } x \leq B;$$

$$J_k(x) = \min_{0 \leq u \leq B-x} \left(r_k(x) + \mathbb{I}(u > 0)C + cu - v\mathbb{E}[\omega_k] \right. \\ \left. + \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}[\omega_k = i] J_{k+1}(x + u - i) \right), \quad x \leq B; \quad k = N-1, \dots, 0;$$

$$V_k(x) = J_k(x) - r_k(x) \quad (\text{éviter de recalculer la somme pour chaque } u)$$

$$= \min \left(-v\mathbb{E}[\omega_k] + \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}[\omega_k = i] J_{k+1}(x - i), \quad (\text{cas } u = 0) \right.$$

$$\left. C + c + V_k(x+1), \dots, C + (B-x)c + V_k(B) \right) \quad \text{si } x \leq B.$$

$$\mu_k^*(x) = \arg \min_{0 \leq u \leq B-x} \left[\left(-v\mathbb{E}[\omega_k] + \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}[\omega_k = i] J_{k+1}(x - i) \right) \mathbb{I}[u = 0], \right. \\ \left. (C + cu + V_k(x+u)) \mathbb{I}[u > 0] \right].$$

Dans le cas où $C = 0$, on peut simplifier les calculs davantage:

$$\begin{aligned}
 V_k(x) &\stackrel{\text{def}}{=} J_k(x) - r_k(x). \\
 &= \min \left(-v\mathbb{E}[\omega_k] + \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}[\omega_k = i] J_{k+1}(x - i), c + V_k(x + 1) \right).
 \end{aligned}$$

Coûts de calcul: supposons que la somme sur i (valeurs possibles de ω_k) a T termes non négligeables. Les coûts de calcul sont

$O(NB^2T)$ pour la récurrence sur J_k ;

$O(NB(B + T))$ pour la récurrence sur V_k ;

$O(NBT)$ pour le cas simplifié où $C = 0$.

Si les inventaires négatifs ne sont pas permis, on a

$$x_{k+1} = \max(0, x_k + u_k - \omega_k)$$

et les équations de récurrence deviennent:

$$J_N(x) = g_N(x) \quad \text{pour } 0 \leq x \leq B;$$

$$J_k(x) = \min_{0 \leq u \leq B-x} \left(r_k(x) + \mathbb{I}(u > 0)C + cu \right. \\ \left. + \sum_{i \geq 0} P[\omega_k = i] [-v \min(i, x + u) + J_{k+1}(\max(0, x + u - i))] \right) \\ \text{pour } 0 \leq x \leq B; \quad k = N - 1, \dots, 0;$$

$$V_k(x) = \min \left(\sum_{i \geq 0} P[\omega_k = i] [-v \min(i, x) + J_{k+1}(\max(0, x - i))], \right. \\ \left. C + c + V_k(x + 1), \dots, C + (B - x)c + V_k(B) \right) \\ \text{si } x < B.$$

Dans le cas où $C = 0$:

$$V_k(x) = \min \left(\sum_{i \geq 0} P[\omega_k = i] [-v \min(i, x) + J_{k+1}(\max(0, x - i))], \right. \\ \left. c + V_k(x + 1) \right).$$

Exemple numérique: DPOC, pages 28–32.

Exemple: taille d'un lot de pièces à fabriquer.

La compagnie Essai-erreur doit fabriquer M exemplaires d'une pièce pour remplir une commande. Les critères de qualité sont très élevés. La compagnie estime que chaque pièce produite sera acceptable avec probabilité p . Les pièces sont fabriquées par lots ("batches").

Pour fabriquer un lot de u pièces, il en coûte $C + cu$.

Dans un lot de taille u , le nombre Y de pièces acceptables est une variable aléatoire binomiale:

$$\mathbb{P}[Y = y] = \binom{u}{y} p^y (1 - p)^{u-y}, \quad y = 0, \dots, u.$$

En pratique, on pourra fabriquer un lot de taille $> M$, car il y aura probablement des pièces défectueuses (des rejets).

Si le nombre de pièces acceptables est quand même inférieur à M , on devra produire un second lot, peut-être même un troisième, etc.

Supposons qu'on a assez de temps pour produire N lots.

Si on n'a pas toutes les pièces requises après N lots, on doit payer une énorme pénalité K .

- x_k = Nb de pièces encore requises avant de produire le lot $k + 1$;
- u_k = Taille du lot $k + 1$;
- y_k = Nb de pièces acceptables dans le lot $k + 1$;
- $J_k(x)$ = Coût espéré minimal à partir de maintenant, si on a k lots de produits et qu'il manque encore x pièces.

- x_k = Nb de pièces encore requises avant de produire le lot $k + 1$;
 u_k = Taille du lot $k + 1$;
 y_k = Nb de pièces acceptables dans le lot $k + 1$;
 $J_k(x)$ = Coût espéré minimal à partir de maintenant, si on a k lots de produits et qu'il manque encore x pièces.

On cherche le coût total espéré $J_0(M)$ et une politique optimale.
 Pour tout k et $x \leq 0$, on a $J_k(x) = 0$. Pour $x > 0$:

$$J_N(x) = K;$$

$$J_k(x) = \min_{u \geq x} \left(C + cu + \sum_{y=0}^u \binom{u}{y} p^y (1-p)^{u-y} J_{k+1}(x-y) \right)$$

$$\mu_k^*(x) = \arg \min_{u \geq x} \left(\quad \right).$$

Peut-on simplifier ces équations pour réduire les coûts de calcul?

Autre notation souvent utilisée: pas de ω_k dans la notation.

On définit un **noyau de transition** (famille de lois de probabilité) par

$$\begin{aligned} Q(A \mid x_k, u_k) &= \mathbb{P}[x_{k+1} \in A \mid x_k, u_k] \\ &= \mathbb{P}_k(\{\omega_k \in D_k : f_k(x_k, u_k, \omega_k) \in A\}). \end{aligned}$$

On peut remplacer le coût $g_k(x_k, u_k, \omega_k)$ par

$$\tilde{g}_k(x_k, u_k) = \mathbb{E}[g_k(x_k, u_k, \omega_k) \mid x_k, u_k].$$

Si $X_k \equiv X$ est fini ou **dénombrable**, les noyaux de transition deviennent des matrices de probabilité de transition: on a une **chaîne de Markov commandée** à espace d'états dénombrable.

On pourra dénoter, par exemple,

$$p_{ij}(u, k) = \mathbb{P}[x_{k+1} = j \mid x_k = i, u_k = u].$$

La matrice $P(u, k)$ dont les éléments sont les $p_{ij}(u, k)$ est la matrice des probabilités de transition à l'étape k , sous la décision u .

Si $P(u, k)$, U_k et \tilde{g}_k ne dépendent pas de k (**modèle stationnaire**):

$$J_k(i) = \min_{u \in U(i)} \left(\tilde{g}(i, u) + \sum_j p_{ij}(u) J_{k+1}(j) \right).$$

Exemple: Commande d'une file d'attente finie.

On a une file d'attente avec un seul serveur, avec de la place pour n clients au maximum dans le système, qui évolue en temps discret.

Le serveur a 2 vitesses: **rapide** et **lent**.

On peut choisir la vitesse au début de chaque période.

Pour une période en mode rapide [lent],

le coût du serveur est c_f [c_s],

et si le système n'est pas vide,

on sert 1 client avec probabilité q_f [q_s]

et 0 clients avec probabilité $1 - q_f$ [$1 - q_s$].

Il y a aussi un coût de $r(i)$ à chaque période où il y a i clients dans le système au début de la période.

Durant chaque période, $\mathbb{P}[m \text{ clients arrivent}] = p_m$, $m \geq 0$. Ces m clients sont dans la file au début de la période suivante.

État: nombre de clients dans le système.

L'espace des décisions est $U = \{\text{rapide, lent}\}$.

Soit ξ_k le nombre de clients servis à la période k .

$$J_N(i) = r(i), \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n;$$

$$J_k(0) = r(0) + c_s + V_k(0); \quad // \text{ Ici } \xi_k = 0$$

$$J_k(i) = r(i) + \min[c_f + q_f V_k(i-1) + (1 - q_f) V_k(i), \\ c_s + q_s V_k(i-1) + (1 - q_s) V_k(i)] \\ \text{pour } 0 \leq k \leq N - 1, 1 \leq i \leq n,$$

où

$$V_k(i) = \mathbb{E}[J_{k+1}(x_{k+1}) \mid x_k - \xi_k = i] \\ = \sum_{m=0}^{n-i-1} p_m J_{k+1}(i+m) + J_{k+1}(n) \sum_{m=n-i}^{\infty} p_m.$$

Exemple: choix du niveau de risque à chaque étape.

Un **match** est constitué d'une suite d'**étapes**.

Décisions: à chaque étape, le joueur 1 peut adopter une stratégie **prudente** (conservatrice) ou **agressive** (risquée).

Stratégie prudente [agressive]: on marque i points de plus que l'adversaire avec probabilité p_i [q_i], disons pour $-b \leq i \leq b$.

La **variance** de la loi des q_i est plus grande que celle des p_i .

On suppose que le joueur 2 joue toujours de la même façon.

Note: si le joueur 2 optimisait aussi sa stratégie: théorie des jeux. Plus compliqué. On y reviendra peut-être.

Exemple: choix du niveau de risque à chaque étape.

Un **match** est constitué d'une suite d'**étapes**.

Décisions: à chaque étape, le joueur 1 peut adopter une stratégie **prudente** (conservatrice) ou **agressive** (risquée).

Stratégie prudente [agressive]: on marque i points de plus que l'adversaire avec probabilité p_i [q_i], disons pour $-b \leq i \leq b$.

La **variance** de la loi des q_i est plus grande que celle des p_i .

On suppose que le joueur 2 joue toujours de la même façon.

Note: si le joueur 2 optimisait aussi sa stratégie: théorie des jeux. Plus compliqué. On y reviendra peut-être.

Jeu de type A: Celui ou celle ayant le plus de points après N **étapes** gagne; en cas d'égalité on ajoute des étapes jusqu'à ce que l'un des joueurs devance l'autre.

Jeu de type B: Le premier joueur qui devance l'autre par au **moins K points** gagne le match.

État x : nombre de points d'avance du joueur 1 sur le joueur 2.

$J_k(x)$ = probabilité que le joueur 1 gagne s'il a x points d'avance sur le joueur 2 après k étapes de jeu et s'il prend ses décisions de façon optimale, i.e., pour maximiser sa probabilité de gain.

Pour un jeu de type B, $J_k \equiv J$ ne dépend pas de k et on a:

$$J(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \geq K; \\ 0 & \text{pour } x \leq -K; \\ \max \left(\sum_{i=-b}^b p_i J(x+i), \sum_{i=-b}^b q_i J(x+i) \right) & \text{pour } -K < x < K. \end{cases}$$

Applications possibles:

- Une série de la coupe Stanley ($N = 7$).
- Un match de hockey divisé en blocs (étapes) de 5 secondes.
- Une course cycliste par étapes.
- Une stratégie d'investissement en finance: fonction objectif différente.
- Etc.

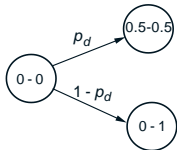
Applications possibles:

- Une série de la coupe Stanley ($N = 7$).
- Un match de hockey divisé en blocs (étapes) de 5 secondes.
- Une course cycliste par étapes.
- Une stratégie d'investissement en finance: fonction objectif différente.
- Etc.

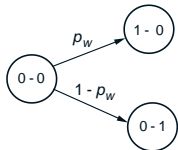
DPOC, Exemples 1.1.5, 1.3.3: [match d'échecs de \$N\$ parties](#).

À chaque partie, le joueur 1 peut gagner ($i = 1$), perdre ($i = -1$), ou annuler ($i = 0$). Après N parties, si un joueur devance l'autre, il gagne le match, tandis que si le score est égal, on continue et le premier joueur qui gagne une partie gagne le match.

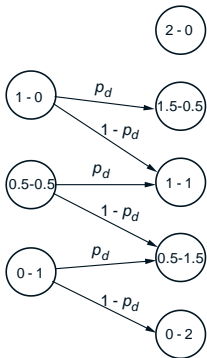
Supposons que $p_1 = 0$ et $p_{-1} = 1 - p_0$ (en mode prudent, on peut seulement annuler ou perdre) et que $q_0 = 0$ et $q_{-1} = 1 - q_1$ (en mode agressif, on peut gagner ou perdre).



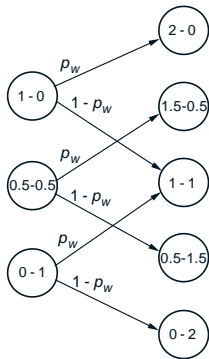
1st Game / Timid Play



1st Game / Bold Play



2nd Game / Timid Play



2nd Game / Bold Play

On a ici

$$J_k(x) = J_N(x) \quad \text{pour } k > N;$$

$$J_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0; \\ q_1 & \text{si } x = 0; \\ 0 & \text{si } x < 0; \end{cases}$$

$$J_{N-1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1; \\ p_0 + (1 - p_0)q_1 & \text{si } x = 1; & \text{(jeu prudent);} \\ q_1 & \text{si } x = 0; & \text{(jeu agressif);} \\ q_1^2 & \text{si } x = -1; & \text{(jeu agressif);} \\ 0 & \text{si } x < -1; \end{cases}$$

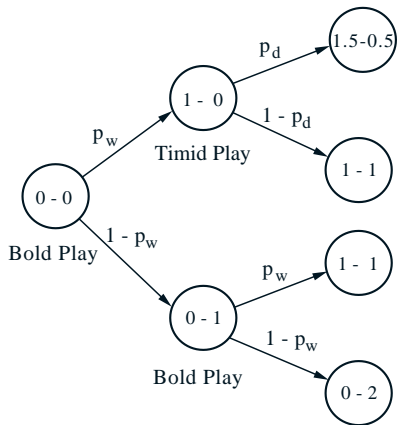
$$J_k(x) = \max[p_0 J_{k+1}(x) + (1 - p_0) J_{k+1}(x - 1), \\ q_1 J_{k+1}(x + 1) + (1 - q_1) J_{k+1}(x - 1)] \\ \text{pour } 0 \leq k < N \text{ et } -k \leq x \leq k.$$

Si $N = 2$, au début du match on a

$$\begin{aligned}
 J_0(0) &= \max [p_0 J_1(0) + (1 - p_0) J_1(-1), q_1 J_1(1) + (1 - q_1) J_1(-1)] \\
 &= \max [p_0 q_1 + (1 - p_0) q_1^2, p_0 q_1 + (1 - p_0) q_1^2 + (1 - q_1) q_1^2] \\
 &= p_0 q_1 + (1 - p_0) q_1^2 + (1 - q_1) q_1^2 \quad (\text{jeu agressif}).
 \end{aligned}$$

La **politique optimale** si $N = 2$ est donc:

jouer prudent si on est en avance, jouer agressif sinon.



Intéressant: On pourrait croire que $q_1 < 1/2$ implique que $J_0(0) < 1/2$, mais non. Notre probabilité de gagner le match peut dépasser $1/2$ même si notre probabilité de gagner une partie est toujours $< 1/2$. Par exemple, si $q_1 = 0.45$ et $p_0 = 0.90$, alors $J_0(0) \approx 0.537$.

Intéressant: On pourrait croire que $q_1 < 1/2$ implique que $J_0(0) < 1/2$, mais non. Notre probabilité de gagner le match peut dépasser $1/2$ même si notre probabilité de gagner une partie est toujours $< 1/2$. Par exemple, si $q_1 = 0.45$ et $p_0 = 0.90$, alors $J_0(0) \approx 0.537$.

Explication: Le joueur 1 choisit son style de jeu à chaque étape et peut adapter sa stratégie au pointage, ce qui lui donne un avantage sur le joueur 2, qui n'a aucun choix.

Le joueur 1 utilise une politique en **boucle fermée**. S'il était forcé de choisir toutes ses décisions à l'avance (politique en **boucle ouverte**), on aurait:

| décisions | prob. de gagner |
|--------------------|-----------------------------|
| prudent, prudent | $p_0^2 q_1$ |
| prudent, agressif | $p_0 q_1 + (1 - p_0) q_1^2$ |
| agressif, prudent | $p_0 q_1 + (1 - p_0) q_1^2$ |
| agressif, agressif | $q_1^2 + 2(1 - q_1) q_1^2$ |

En supposant que $p_0 \geq 2q_1$, la meilleure politique en boucle ouverte est de jouer prudent pour une étape et agressif pour l'autre.

La prob. de gagner est alors

$$\tilde{J}_0(0) = J_0(0) - (1 - q_1)q_1^2.$$

Cette différence de $(1 - q_1)q_1^2$ est la **valeur de l'information**.

En supposant que $p_0 \geq 2q_1$, la meilleure politique en boucle ouverte est de jouer prudent pour une étape et agressif pour l'autre.

La prob. de gagner est alors

$$\tilde{J}_0(0) = J_0(0) - (1 - q_1)q_1^2.$$

Cette différence de $(1 - q_1)q_1^2$ est la **valeur de l'information**.

Par **exemple**, si $q_1 = 0.45$ et $p_0 = 0.90$, alors $(1 - q_1)q_1^2 \approx 0.1114$ et la probabilité de gain avec la meilleure politique en boucle ouverte est ≈ 0.425 .

Conclusion: fixer toutes nos décisions à l'avance est une bien mauvaise idée.

Exemple: Modèle simplifié d'investissement

DPOC, Exercice 1.26.

Le prix d'une action (ou d'une commodité) est x_k au début de la période k , et évolue selon une chaîne de Markov sur un espace d'états fini $\{v^1, \dots, v^n\}$ et probabilités de transition connues:

$$p_{i,j}^k = \mathbb{P}[x_{k+1} = v^j \mid x_k = v^i].$$

À l'étape k , on peut acheter $u_k = 1, 0$, ou -1 actions ($u_k = -1$: vendre).

Supposons $P_k(x) = \mathbb{E}_k[x_N - x \mid x_k = x]$ est connue et décroissante en x .

Il y a un coût de transaction de c pour acheter ou vendre.

On veut maximiser le gain espéré pour N étapes:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} (u_\ell P_\ell(x_\ell) - c|u_\ell|) \right].$$

Exemple: Modèle simplifié d'investissement

DPOC, Exercice 1.26.

Le prix d'une action (ou d'une commodité) est x_k au début de la période k , et évolue selon une chaîne de Markov sur un espace d'états fini $\{v^1, \dots, v^n\}$ et probabilités de transition connues:

$$p_{i,j}^k = \mathbb{P}[x_{k+1} = v^j \mid x_k = v^i].$$

À l'étape k , on peut acheter $u_k = 1, 0$, ou -1 actions ($u_k = -1$: vendre). Supposons $P_k(x) = \mathbb{E}_k[x_N - x \mid x_k = x]$ est connue et décroissante en x . Il y a un coût de transaction de c pour acheter ou vendre. On veut maximiser le gain espéré pour N étapes:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} (u_\ell P_\ell(x_\ell) - c|u_\ell|) \right].$$

(a) Si on détient au départ au moins N unités et assez d'argent, pas besoin de mémoriser le nombre d'unités détenues.

$$\begin{aligned}
 J_k(x) &= \text{gain espéré optimal pour les étapes } k \text{ à } N \text{ si } x_k = x \\
 &= \max_{\pi} \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=k}^{N-1} (u_{\ell} P_{\ell}(x_{\ell}) - c|u_{\ell}|) \right] \\
 &= \max_{u_k \in \{1,0,-1\}} [u_k P_k(x_k) - c|u_k|] + \mathbb{E} [J_{k+1}(x_{k+1}) | x_k].
 \end{aligned}$$

La dernière espérance ne dépend pas de u_k . On doit donc choisir u_k qui maximise $u_k P_k(x) - c|u_k|$. Puisque $P_k(x)$ est décroissant en x , cela donne

$$u_k = \begin{cases} 1 & \text{if } x_k \leq \underline{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x : P_k(x) > c\} \\ -1 & \text{if } x_k \geq \bar{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \min\{x : P_k(x) < -c\} \\ 0 & \text{if } \underline{x}_k < x_k < \bar{x}_k. \end{cases}$$

et

$$J_k(x) = \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} \max_{u_{\ell} \in \{1,0,-1\}} [u_{\ell} P_{\ell}(x_{\ell}) - c|u_{\ell}|] \right].$$

(b) Supposons maintenant que l'on débute avec moins que N actions. 59
Dans ce cas, on doit mémoriser le nombre n_k d'actions détenues à l'étape k . L'état est (n_k, x_k) et le gain espéré est

$$V_k(x_k, n_k) = \max_{u_k \in \{1, 0, -1\}, n_k + u_k \geq 0} [u_k P_k(x_k) - c|u_k| + \mathbb{E}[V_{k+1}(x_{k+1}, n_k + u_k) \mid x_k]],$$

avec $V_N \equiv 0$. Si $n_k \geq N - k$, on a $V_k(x_k, n_k) = J_k(x_k)$.

(b) Supposons maintenant que l'on débute avec moins que N actions. 59
Dans ce cas, on doit mémoriser le nombre n_k d'actions détenues à l'étape k . L'état est (n_k, x_k) et le gain espéré est

$$V_k(x_k, n_k) = \max_{u_k \in \{1, 0, -1\}, n_k + u_k \geq 0} [u_k P_k(x_k) - c |u_k| + \mathbb{E}[V_{k+1}(x_{k+1}, n_k + u_k) | x_k]],$$

avec $V_N \equiv 0$. Si $n_k \geq N - k$, on a $V_k(x_k, n_k) = J_k(x_k)$.

On achète ssi

$$P_k(x_k) - c + \mathbb{E}[V_{k+1}(x_{k+1}, n_k + 1) - V_{k+1}(x_{k+1}, n_k) | x_k] \geq 0.$$

On vend ssi

$$-P_k(x_k) - c + \mathbb{E}[V_{k+1}(x_{k+1}, n_k - 1) - V_{k+1}(x_{k+1}, n_k) | x_k] \geq 0.$$

Notons que $\mathbb{E}[V_{k+1}(x_{k+1}, n_k + 1) - V_{k+1}(x_{k+1}, n_k) | x_k] \geq 0$.

Donc si $P_k(x_k) - c \geq 0$, i.e., $x_k \leq \underline{x}_k$, alors on achète comme avant, et si $-P_k(x_k) - c < 0$, i.e., $x_k < \bar{x}_k$, alors on ne vend jamais.

Mais il peut être optimal d'acheter si $\underline{x}_k < x_k$, ou encore de ne rien faire si $\bar{x}_k < x_k$.

(c) Supposons maintenant que l'on ne peut jamais détenir plus de $n_0 + m$ actions. La récurrence pour le gain espéré s'écrit alors:

$$V_k(x_k, n_k) = \max_{u_k \in U(x_k, n_k)} [u_k P_k(x_k) - c|u_k| + \mathbb{E}[V_{k+1}(x_{k+1}, n_k + u_k) \mid x_k]],$$

où $U_k(x_k, n_k) = \{u \in \{1, 0, -1\}, 0 \leq n_k + u \leq n_0 + m\}$.

(c) Supposons maintenant que l'on ne peut jamais détenir plus de $n_0 + m$ actions. La récurrence pour le gain espéré s'écrit alors:

$$V_k(x_k, n_k) = \max_{u_k \in U(x_k, n_k)} [u_k P_k(x_k) - c|u_k| + \mathbb{E}[V_{k+1}(x_{k+1}, n_k + u_k) | x_k]],$$

où $U_k(x_k, n_k) = \{u \in \{1, 0, -1\}, 0 \leq n_k + u \leq n_0 + m\}$.

(d) Supposons qu'il y a un taux d'intérêt r par période. Un dollar mis en banque au temps k devient $(1 + r)^{N-k}$ au temps N . Le profit espéré devient alors

$$P_k(x) = \mathbb{E}[x_N | x_k = x] - (1 + r)^{N-k} x.$$

Et le reste est semblable.

Reformulation pour “markovianiser”

Que faire si les hypothèses ne sont pas vérifiées, e.g., si f_k , g_k et la loi de ω_k dépendent des états et décisions précédant x_k et u_k ?

En général, on peut toujours se ramener au modèle de base (que nous avons décrit) en redéfinissant judicieusement les espaces d'états, de décisions, et de perturbations.

Il suffit d'incorporer suffisamment d'information dans l'état x_k (“state augmentation”).

Par exemple, si f_k [ou g_k] dépend de $(x_{k-1}, u_{k-1}, x_k, u_k, \omega_k)$, on peut redéfinir l'état x_k par $\tilde{x}_k = (x_{k-1}, u_{k-1}, x_k)$ et la fonction de transition devient

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{f}_k(\tilde{x}_k, u_k, \omega_k) = (x_k, u_k, f_k(x_{k-1}, u_{k-1}, x_k, u_k, \omega_k)).$$

À la limite, on peut définir l'état comme étant toute l'histoire du processus observée jusqu'à date.

On peut ainsi traiter (en principe) des modèles non additifs.

Par exemple, si f_k [ou g_k] dépend de $(x_{k-1}, u_{k-1}, x_k, u_k, \omega_k)$, on peut redéfinir l'état x_k par $\tilde{x}_k = (x_{k-1}, u_{k-1}, x_k)$ et la fonction de transition devient

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{f}_k(\tilde{x}_k, u_k, \omega_k) = (x_k, u_k, f_k(x_{k-1}, u_{k-1}, x_k, u_k, \omega_k)).$$

À la limite, on peut définir l'état comme étant toute l'histoire du processus observée jusqu'à date.

On peut ainsi traiter (en principe) des modèles non additifs.

Mais si l'espace d'états est trop grand, on ne pourra pas résoudre les équations de récurrence! La **malédiction des grandes dimensions** ("curse of dimensionality")

Il faut être parcimonieux dans la définition de l'état.

Exemple: DPOC, p.38.

Supposons qu'à l'étape k , juste avant de prendre la décision u_k , on obtient une **prévision** y_k nous donnant une information plus précise sur la loi de ω_k (une information partielle).

Par exemple, supposons que pour $i = 1, \dots, m$, $\mathbb{P}[y_k = i] = p_i$, et ω_k suit la loi Q_i lorsque $y_k = i$.

On a donc $\mathbb{P}[\omega_k \in \cdot] = \sum_{i=1}^m p_i Q_i[\cdot]$.

On peut se ramener à notre modèle de base en redéfinissant l'état et la perturbation par $\tilde{x}_k = (y_k, x_k)$ et $\tilde{\omega}_k = (\omega_k, y_{k+1})$. On obtient

$$\tilde{J}_k(y_k, x) = \min_{u \in U_k(x)} \mathbb{E} \left[g_k(x, u, \omega_k) + \sum_{i=1}^m p_i \tilde{J}_{k+1}(i, f_k(x, u, \omega_k)) \mid y_k \right]$$

pour $0 \leq k \leq N-1$, $x \in X_k$, $y_k \in \{1, \dots, m\}$.

À noter que le nombre d'états \tilde{x}_k est plus grand que pour x_k .

Mais dans ce cas-ci, il n'est pas nécessaire de mettre y_k dans l'état. Au lieu d'écrire la récurrence en termes des fonctions $\tilde{J}_k(y_k, x_k)$, on peut l'écrire en termes des fonctions

$$\hat{J}_k(x_k) = \sum_{i=1}^m p_i \tilde{J}_k(i, x).$$

On obtient

$$\hat{J}_k(x) = \sum_{i=1}^m p_i \min_{u \in U_k(x)} \mathbb{E} \left[g_k(x, u, \omega_k) + \hat{J}_{k+1}(f_k(x, u, \omega_k)) \mid y_k = i \right].$$

Cela équivaut à observer l'état x_k **avant** d'obtenir la prévision, puis de prendre la décision u_k **après** avoir observé la prévision $y_k = i$.

Mais dans ce cas-ci, il n'est pas nécessaire de mettre y_k dans l'état. Au lieu d'écrire la récurrence en termes des fonctions $\tilde{J}_k(y_k, x_k)$, on peut l'écrire en termes des fonctions

$$\hat{J}_k(x_k) = \sum_{i=1}^m p_i \tilde{J}_k(i, x).$$

On obtient

$$\hat{J}_k(x) = \sum_{i=1}^m p_i \min_{u \in U_k(x)} \mathbb{E} \left[g_k(x, u, \omega_k) + \hat{J}_{k+1}(f_k(x, u, \omega_k)) \mid y_k = i \right].$$

Cela équivaut à observer l'état x_k **avant** d'obtenir la prévision, puis de prendre la décision u_k **après** avoir observé la prévision $y_k = i$.

La décision est prise avec **davantage** d'information que l'état x_k , mais on peut quand même écrire la récurrence en termes de fonctions de x_k seulement. **C'est plus économique.**

Subtilités mathématiques.

Pour que les espérances \mathbb{E}_π et $\mathbb{E}_{\mu_k, \dots, \mu_{N-1}}$ soient bien définies, on doit faire des **hypothèses de mesurabilité** sur les fonctions f_k , g_k , et μ_k , et les espaces S_k , U_k , et D_k doivent avoir une structure additionnelle (espaces métriques complets mesurables, etc.). Et on doit s'assurer qu'il existe une politique optimale qui satisfait les conditions de mesurabilité.

Subtilités mathématiques.

Pour que les espérances \mathbb{E}_π et $\mathbb{E}_{\mu_k, \dots, \mu_{N-1}}$ soient bien définies, on doit faire des **hypothèses de mesurabilité** sur les fonctions f_k , g_k , et μ_k , et les espaces S_k , U_k , et D_k doivent avoir une structure additionnelle (espaces métriques complets mesurables, etc.). Et on doit s'assurer qu'il existe une politique optimale qui satisfait les conditions de mesurabilité.

Dans le cas où les D_k sont **dénombrables**: pas de problème.

Cas général: beaucoup plus complexe. Nous n'allons pas aborder ces questions ici.

Questions intéressantes du point de vue mathématique, mais pas beaucoup d'impact du point de vue pratique.

Références: Bertsekas et Shreve (1978) et Hernández-Lerma et Lasserre (1995).

Fonction d'utilité et mesure de risque.

L'espérance mathématique du coût (ou du revenu) n'est pas toujours la mesure appropriée à optimiser.

Exemple: le paradoxe de St-Petersbourg:

Vous payez x dollars pour jouer au jeu suivant. On tire à pile ou face, on compte le nombre Y de faces avant l'obtention du premier pile, et vous recevez 2^Y dollars.

Fonction d'utilité et mesure de risque.

L'espérance mathématique du coût (ou du revenu) n'est pas toujours la mesure appropriée à optimiser.

Exemple: le paradoxe de St-Petersbourg:

Vous payez x dollars pour jouer au jeu suivant. On tire à pile ou face, on compte le nombre Y de faces avant l'obtention du premier pile, et vous recevez 2^Y dollars. L'espérance de gain net est

$$\sum_{y=0}^{\infty} 2^y \frac{1}{2^{y+1}} - x = \infty$$

quelque soit x .

Fonction d'utilité et mesure de risque.

L'espérance mathématique du coût (ou du revenu) n'est pas toujours la mesure appropriée à optimiser.

Exemple: le paradoxe de St-Petersbourg:

Vous payez x dollars pour jouer au jeu suivant. On tire à pile ou face, on compte le nombre Y de faces avant l'obtention du premier pile, et vous recevez 2^Y dollars. L'espérance de gain net est

$$\sum_{y=0}^{\infty} 2^y \frac{1}{2^{y+1}} - x = \infty$$

quelque soit x . Mais est-on vraiment prêt à payer un montant arbitrairement grand pour jouer à ce jeu? **Non.**

On a une très grande probabilité de recevoir un montant modeste, et une probabilité minuscule de recevoir un montant gigantesque.

Mais l'utilité d'un gain gigantesque n'est pas proportionnelle au gain.

Critère min-max

Approche pessimiste: dans le cas où il y a de l'incertitude, on pourrait considérer toujours le **pire cas** (au lieu de l'espérance). C'est le cas extrême d'aversion au risque.

Critère min-max

Approche pessimiste: dans le cas où il y a de l'incertitude, on pourrait considérer toujours le **pire cas** (au lieu de l'espérance). C'est le cas extrême d'aversion au risque.

Au lieu de minimiser

$$\mathbb{E}_{\pi, x} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=0}^{N-1} g_n(x_n, \mu_n(x_n), \omega_n) \right]$$

(par rapport à π , pour $x_0 = x$), on voudra minimiser

$$\max_{\omega_1, \dots, \omega_N} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=0}^{N-1} g_n(x_n, \mu_n(x_n), \omega_n) \right].$$

Rarement approprié. Sauf si ω_n est la décision d'un adversaire.

Critère min-max

Approche pessimiste: dans le cas où il y a de l'incertitude, on pourrait considérer toujours le **pire cas** (au lieu de l'espérance). C'est le cas extrême d'aversion au risque.

Au lieu de minimiser

$$\mathbb{E}_{\pi, x} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=0}^{N-1} g_n(x_n, \mu_n(x_n), \omega_n) \right]$$

(par rapport à π , pour $x_0 = x$), on voudra minimiser

$$\max_{\omega_1, \dots, \omega_N} \left[g_N(x_N) + \sum_{n=0}^{N-1} g_n(x_n, \mu_n(x_n), \omega_n) \right].$$

Rarement approprié. Sauf si ω_n est la décision d'un adversaire. Avec un tel critère, un investisseur ne va jamais investir!

Variante: Minimiser le pire cas en éliminant les $c\%$ pires réalisations ω_n à chaque étape.

Solution beaucoup plus intéressante: **fonction d'utilité**.

Le preneur de décision veut maximiser $\mathbb{E}[U(X)]$ où X est le gain net et $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est sa **fonction d'utilité**.

On se ramène au cas précédent, en remplaçant X par $U(X)$.

Habituellement, la fonction U est **croissante et concave**.

Dans l'appendice G.2 de DPOC, Proposition G.1, on donne des conditions suffisantes pour l'existence d'une telle fonction U , dans le cas où X prend les valeurs o_1, \dots, o_n avec probabilités p_1, \dots, p_n .

$$\mathbb{E}[U(X)] = \sum_{i=1}^n p_i U(o_i).$$

Le rôle de la fonction d'utilité consiste essentiellement à **modifier la valeur** d'un gain, selon son utilité, de manière à pouvoir exprimer l'objectif comme une espérance mathématique.

Si $o_i \geq 0$ représente le gain, et si $\sum_i p_i U(o_i)/o_i = 1/K$, alors on peut obtenir un résultat équivalent en modifiant les probabilités à la place de prendre une fonction d'utilité: on remplace p_i par $q_i = Kp_i U(o_i)/o_i$:

$$\mathbb{E}[U(X)] = \sum_{i=1}^n p_i U(o_i) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^n q_i o_i.$$

Si $o_i \geq 0$ représente le gain, et si $\sum_i p_i U(o_i)/o_i = 1/K$, alors on peut obtenir un résultat équivalent en modifiant les probabilités à la place de prendre une fonction d'utilité: on remplace p_i par $q_i = Kp_i U(o_i)/o_i$:

$$\mathbb{E}[U(X)] = \sum_{i=1}^n p_i U(o_i) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^n q_i o_i.$$

C'est ce que l'on fait pour l'évaluation d'options financières.

On change les probabilités afin de tenir compte du risque.

L'importance sampling (en simulation) équivaut à changer les deux (les p_i et l'utilité) sans changer l'espérance.

Exemple.

On a deux possibilités d'investissement pour notre capital:

(A) placement **sûr** qui rapportera **1.5** dollar par dollar investi;

(B) placement **risqué** qui rapporte **1** dollar par dollar investi avec probabilité **p** et **3** dollars par dollar investi avec probabilité $1 - p$.

Supposons que l'on place une fraction **d** du capital dans l'option A, et $1 - d$ dans l'option B. L'**utilité espérée** sera

$$\mathbb{E}[U(X)] = p U(1.5d + (1 - d)) + (1 - p) U(1.5d + 3(1 - d)).$$

Quelqu'un qui n'aime pas le risque choisira un d plus grand, et vice-versa.

Exemple.

On a deux possibilités d'investissement pour notre capital:

(A) placement **sûr** qui rapportera **1.5** dollar par dollar investi;

(B) placement **risqué** qui rapporte **1** dollar par dollar investi avec probabilité p et **3** dollars par dollar investi avec probabilité $1 - p$.

Supposons que l'on place une fraction d du capital dans l'option A, et $1 - d$ dans l'option B. L'**utilité espérée** sera

$$\mathbb{E}[U(X)] = p U(1.5d + (1 - d)) + (1 - p) U(1.5d + 3(1 - d)).$$

Quelqu'un qui n'aime pas le risque choisira un d plus grand, et vice-versa.

En général, plus on est riche ou jeune, plus on a raison de préférer le risque (on aura une fonction $U(x)$ dont la dérivée seconde sera plus proche de 0 pour les grandes valeurs de x).

Exemple.

On a deux possibilités d'investissement pour notre capital:

(A) placement **sûr** qui rapportera **1.5** dollar par dollar investi;

(B) placement **risqué** qui rapporte **1** dollar par dollar investi avec probabilité p et **3** dollars par dollar investi avec probabilité $1 - p$.

Supposons que l'on place une fraction d du capital dans l'option A, et $1 - d$ dans l'option B. L'**utilité espérée** sera

$$\mathbb{E}[U(X)] = p U(1.5d + (1 - d)) + (1 - p) U(1.5d + 3(1 - d)).$$

Quelqu'un qui n'aime pas le risque choisira un d plus grand, et vice-versa.

En général, plus on est riche ou jeune, plus on a raison de préférer le risque (on aura une fonction $U(x)$ dont la dérivée seconde sera plus proche de 0 pour les grandes valeurs de x).

Pour les valeurs négatives, l'utilité $U(-x)$ peut devenir une constante lorsque $x \rightarrow \infty$.