

Processus stochastiques

Un processus stochastique est une famille $\{Y_t, t \in I\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.

Processus stochastiques

Un processus stochastique est une famille $\{Y_t, t \in I\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.

L'indice t est souvent interprété comme le temps.

Le processus est en temps continu si I est continu (e.g., $I = [0, \infty)$), et en temps discret si I est discret (e.g., $I = \{0, 1, 2, \dots\}$).

Processus stochastiques

Un processus stochastique est une famille $\{Y_t, t \in I\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.

L'indice t est souvent interprété comme le temps.

Le processus est en temps continu si I est continu (e.g., $I = [0, \infty)$), et en temps discret si I est discret (e.g., $I = \{0, 1, 2, \dots\}$).

Lorsque t est continu, on note souvent Y_t par $Y(t)$.

Processus stochastiques

Un processus stochastique est une famille $\{Y_t, t \in I\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.

L'indice t est souvent interprété comme le temps.

Le processus est en temps continu si I est continu (e.g., $I = [0, \infty)$), et en temps discret si I est discret (e.g., $I = \{0, 1, 2, \dots\}$).

Lorsque t est continu, on note souvent Y_t par $Y(t)$.

On supposera ici que Y_t prend ses valeurs dans \mathbb{R}^d .

Processus markoviens

Un processus stochastique est Markovien si, conditionnellement à sa valeur présente au temps t , son évolution future est indépendante de son passé.

Processus markoviens

Un processus stochastique est **Markovien** si, conditionnellement à sa valeur présente au temps t , son évolution future est indépendante de son passé.

C'est-à-dire: pour toute variable aléatoire X fonction de $\{Y_s, s > t\}$, la loi de X conditionnelle à $\{Y_s, s \leq t\}$, est la même que celle conditionnelle à Y_t .

Processus markoviens

Un processus stochastique est **Markovien** si, conditionnellement à sa valeur présente au temps t , son évolution future est indépendante de son passé.

C'est-à-dire: pour toute variable aléatoire X fonction de $\{Y_s, s > t\}$, la loi de X conditionnelle à $\{Y_s, s \leq t\}$, est la même que celle conditionnelle à Y_t .

Veut dire que Y_t contient toujours assez d'information pour "générer" le futur.
(Suffit de mettre assez d'information dans Y_t .)

Processus markoviens

Un processus stochastique est **Markovien** si, conditionnellement à sa valeur présente au temps t , son évolution future est indépendante de son passé.

C'est-à-dire: pour toute variable aléatoire X fonction de $\{Y_s, s > t\}$, la loi de X conditionnelle à $\{Y_s, s \leq t\}$, est la même que celle conditionnelle à Y_t .

Veut dire que Y_t contient toujours assez d'information pour "générer" le futur. (Suffit de mettre assez d'information dans Y_t .)

Chaîne de Markov temps discret: lorsque $I = \{0, 1, \dots\}$.

Exemple: File $GI/GI/1$.

$\{W_i, i \geq 0\}$ est markovien, car (Eq. de Lindley) $W_{i+1} = \max(0, W_i + S_i - A_i)$.

Exemple: File $GI/GI/1$.

$\{W_i, i \geq 0\}$ est markovien, car (Eq. de Lindley) $W_{i+1} = \max(0, W_i + S_i - A_i)$.

$\{Q(t), t \geq 0\}$ n'est pas markovien, sauf pour une file $M/M/1$.

Exemple: File $GI/GI/1$.

$\{W_i, i \geq 0\}$ est markovien, car (Eq. de Lindley) $W_{i+1} = \max(0, W_i + S_i - A_i)$.

$\{Q(t), t \geq 0\}$ n'est pas markovien, sauf pour une file $M/M/1$.

Posons: T = horizon de la simulation;

t_i = instant du i -ième événement e_i ;

Q_i = nombre de clients dans la file juste après e_i ;

ζ_i = temps jusqu'à la prochaine arrivée;

ξ_i = durée résiduelle de service (-1 si personne);

$\mathcal{S}_i = (t_i, Q_i, \zeta_i, \xi_i)$ = état de la simulation.

Exemple: File $GI/GI/1$.

$\{W_i, i \geq 0\}$ est markovien, car (Eq. de Lindley) $W_{i+1} = \max(0, W_i + S_i - A_i)$.

$\{Q(t), t \geq 0\}$ n'est pas markovien, sauf pour une file $M/M/1$.

Posons: T = horizon de la simulation;

t_i = instant du i -ième événement e_i ;

Q_i = nombre de clients dans la file juste après e_i ;

ζ_i = temps jusqu'à la prochaine arrivée;

ξ_i = durée résiduelle de service (-1 si personne);

$\mathcal{S}_i = (t_i, Q_i, \zeta_i, \xi_i)$ = état de la simulation.

Le processus $\{\mathcal{S}_i, i \geq 0\}$ est une chaîne de Markov.

En général, $\{\mathcal{S}_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$, où \mathcal{S}_i est l'état du modèle de simulation au temps t_i , juste après l'événement e_i , est une chaîne de Markov.

En général, $\{\mathcal{S}_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$, où \mathcal{S}_i est l'état du modèle de simulation au temps t_i , juste après l'événement e_i , est une chaîne de Markov.

Par contre, le processus $\{\mathcal{S}(t), t \geq 0\}$ défini par $\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_{N(t)}$, où $N(t) = \sup\{i \mid t_i \leq t\}$ est le nombre d'événements durant $(0, t]$, ne l'est pas.

En général, $\{\mathcal{S}_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$, où \mathcal{S}_i est l'état du modèle de simulation au temps t_i , juste après l'événement e_i , est une chaîne de Markov.

Par contre, le processus $\{\mathcal{S}(t), t \geq 0\}$ défini par $\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_{N(t)}$, où $N(t) = \sup\{i \mid t_i \leq t\}$ est le nombre d'événements durant $(0, t]$, ne l'est pas.

Le processus $\{\mathcal{S}(t), t \geq 0\}$ est uniquement déterminé par $\{\mathcal{S}_i, i = 0, 1, \dots\}$, mais pas l'inverse. Il peut y avoir des événements simultanés.

En général, $\{\mathcal{S}_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$, où \mathcal{S}_i est l'état du modèle de simulation au temps t_i , juste après l'événement e_i , est une chaîne de Markov.

Par contre, le processus $\{\mathcal{S}(t), t \geq 0\}$ défini par $\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_{N(t)}$, où $N(t) = \sup\{i \mid t_i \leq t\}$ est le nombre d'événements durant $(0, t]$, ne l'est pas.

Le processus $\{\mathcal{S}(t), t \geq 0\}$ est uniquement déterminé par $\{\mathcal{S}_i, i = 0, 1, \dots\}$, mais pas l'inverse. Il peut y avoir des événements simultanés.

Pour les chaînes de Markov, on peut calculer les mesures de performance numériquement si le nombre d'états n'est pas trop grand.

Filtrages et temps d'arrêt

Pour un processus $\{Y_i, i = 0, 1, \dots\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_0, \dots, Y_t)$ représente toute l'information que l'on peut déduire en observant le processus jusqu'à l'étape t .

Filtrages et temps d'arrêt

Pour un processus $\{Y_i, i = 0, 1, \dots\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_0, \dots, Y_t)$ représente toute l'information que l'on peut déduire en observant le processus jusqu'à l'étape t . De même, pour $\{Y_t, t \geq 0\}$, \mathcal{F}_t représente l'information que l'on peut déduire de $\{Y_s, 0 \leq s \leq t\}$.

Filtrages et temps d'arrêt

Pour un processus $\{Y_i, i = 0, 1, \dots\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_0, \dots, Y_t)$ représente toute l'information que l'on peut déduire en observant le processus jusqu'à l'étape t . De même, pour $\{Y_t, t \geq 0\}$, \mathcal{F}_t représente l'information que l'on peut déduire de $\{Y_s, 0 \leq s \leq t\}$.

La famille $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ s'appelle un filtrage.

Filtrages et temps d'arrêt

Pour un processus $\{Y_i, i = 0, 1, \dots\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_0, \dots, Y_t)$ représente toute l'information que l'on peut déduire en observant le processus jusqu'à l'étape t . De même, pour $\{Y_t, t \geq 0\}$, \mathcal{F}_t représente l'information que l'on peut déduire de $\{Y_s, 0 \leq s \leq t\}$.

La famille $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ s'appelle un filtrage.

Une variable aléatoire est \mathcal{F}_t -mesurable si on peut toujours déduire sa valeur de \mathcal{F}_t .

Filtrages et temps d'arrêt

Pour un processus $\{Y_i, i = 0, 1, \dots\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_0, \dots, Y_t)$ représente toute l'information que l'on peut déduire en observant le processus jusqu'à l'étape t . De même, pour $\{Y_t, t \geq 0\}$, \mathcal{F}_t représente l'information que l'on peut déduire de $\{Y_s, 0 \leq s \leq t\}$.

La famille $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ s'appelle un filtrage.

Une variable aléatoire est \mathcal{F}_t -mesurable si on peut toujours déduire sa valeur de \mathcal{F}_t .

Un temps d'arrêt par rapport à $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est une variable aléatoire T , à valeurs dans I , telle que T est \mathcal{F}_T -mesurable.

Exemple. Centre d'appels.

Soit $\{\mathcal{F}_i, i \geq 0\}$ le filtrage générée par $\{\mathcal{S}_i, i \geq 0\}$.

Exemple. Centre d'appels.

Soit $\{\mathcal{F}_i, i \geq 0\}$ le filtrage générée par $\{\mathcal{S}_i, i \geq 0\}$.

N = nombre d'événements durant la journée.

N' = numéro d'événement de la dernière arrivée.

Exemple. Centre d'appels.

Soit $\{\mathcal{F}_i, i \geq 0\}$ le filtrage générée par $\{\mathcal{S}_i, i \geq 0\}$.

N = nombre d'événements durant la journée.

N' = numéro d'événement de la dernière arrivée.

N est un temps d'arrêt par rapport à $\{\mathcal{F}_i, i \geq 0\}$, mais pas N' .

Processus de Lévy

Un processus en temps continu $\{Y(t), t \geq 0\}$ est un processus de Lévy si ses incréments sont stationnaires et indépendants.

Processus de Lévy

Un processus en temps continu $\{Y(t), t \geq 0\}$ est un processus de Lévy si ses incréments sont stationnaires et indépendants.

Autrement dit, pour des intervalles disjoints $(s_i, t_i]$, les v.a. $X_i = Y(t_i) - Y(s_i)$ sont indépendantes et la loi de X_i ne dépend que de $t_i - s_i$.

Processus de Lévy

Un processus en temps continu $\{Y(t), t \geq 0\}$ est un processus de Lévy si ses incréments sont stationnaires et indépendants.

Autrement dit, pour des intervalles disjoints $(s_i, t_i]$, les v.a. $X_i = Y(t_i) - Y(s_i)$ sont indépendantes et la loi de X_i ne dépend que de $t_i - s_i$.

Définition équivalente: le processus est **infiniment divisible**:

Pour tout t et tout n , $Y(t) - Y(0)$ s'écrit comme une somme de n v.a. i.i.d.

Processus de Lévy

Un processus en temps continu $\{Y(t), t \geq 0\}$ est un processus de Lévy si ses incréments sont stationnaires et indépendants.

Autrement dit, pour des intervalles disjoints $(s_i, t_i]$, les v.a. $X_i = Y(t_i) - Y(s_i)$ sont indépendantes et la loi de X_i ne dépend que de $t_i - s_i$.

Définition équivalente: le processus est **infiniment divisible**:

Pour tout t et tout n , $Y(t) - Y(0)$ s'écrit comme une somme de n v.a. i.i.d.

Exemples: processus de Poisson, brownien, gamma, etc.

Processus de Lévy

Un processus en temps continu $\{Y(t), t \geq 0\}$ est un processus de Lévy si ses incréments sont stationnaires et indépendants.

Autrement dit, pour des intervalles disjoints $(s_i, t_i]$, les v.a. $X_i = Y(t_i) - Y(s_i)$ sont indépendantes et la loi de X_i ne dépend que de $t_i - s_i$.

Définition équivalente: le processus est **infiniment divisible**:

Pour tout t et tout n , $Y(t) - Y(0)$ s'écrit comme une somme de n v.a. i.i.d.

Exemples: processus de Poisson, brownien, gamma, etc.

Dans certains cas, pour $t_1 < s < t_2$, on connaît la loi de $Y(s)$ conditionnelle à $(Y(t_1), Y(t_2))$.

Processus de Lévy

Un processus en temps continu $\{Y(t), t \geq 0\}$ est un processus de Lévy si ses incréments sont stationnaires et indépendants.

Autrement dit, pour des intervalles disjoints $(s_i, t_i]$, les v.a. $X_i = Y(t_i) - Y(s_i)$ sont indépendantes et la loi de X_i ne dépend que de $t_i - s_i$.

Définition équivalente: le processus est **infiniment divisible**:

Pour tout t et tout n , $Y(t) - Y(0)$ s'écrit comme une somme de n v.a. i.i.d.

Exemples: processus de Poisson, brownien, gamma, etc.

Dans certains cas, pour $t_1 < s < t_2$, on connaît la loi de $Y(s)$ conditionnelle à $(Y(t_1), Y(t_2))$. On peut alors, en principe, simuler la trajectoire par raffinements successifs (“**bridge sampling**”): générer d'abord $Y(t)$;

puis $Y(t/2)$ conditionnellement à $(Y(0), Y(t))$;

puis $Y(t/4)$ conditionnellement à $(Y(0), Y(t/2))$;

puis $Y(3t/4)$ conditionnellement à $(Y(t/2), Y(t))$;

puis $Y(t/8)$ conditionnellement à $(Y(0), Y(t/4))$; etc.

Processus de Poisson

Un processus de comptage est un processus en temps continu $\{N(t), t \geq 0\}$, à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$, et dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite.

Processus de Poisson

Un processus de comptage est un processus en temps continu $\{N(t), t \geq 0\}$, à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$, et dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite.

Habituellement, $N(0) = 0$, et les instants de saut $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots$ s'appellent les instants d'arrivées.

Processus de Poisson

Un processus de comptage est un processus en temps continu $\{N(t), t \geq 0\}$, à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$, et dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite.

Habituellement, $N(0) = 0$, et les instants de saut $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots$ s'appellent les instants d'arrivées.

Ainsi, $N(t)$ représente le nombre d'arrivées durant $[0, t]$.

Processus de Poisson

Un processus de comptage est un processus en temps continu $\{N(t), t \geq 0\}$, à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$, et dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite.

Habituellement, $N(0) = 0$, et les instants de saut $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots$ s'appellent les instants d'arrivées.

Ainsi, $N(t)$ représente le nombre d'arrivées durant $[0, t]$.

On note $A_j = T_j - T_{j-1}$.

Processus de Poisson

Un processus de comptage est un processus en temps continu $\{N(t), t \geq 0\}$, à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$, et dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite.

Habituellement, $N(0) = 0$, et les instants de saut $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots$ s'appellent les instants d'arrivées.

Ainsi, $N(t)$ représente le nombre d'arrivées durant $[0, t]$.

On note $A_j = T_j - T_{j-1}$.

Si les A_j sont des v.a. i.i.d., on a un processus de renouvellement.

Processus de Poisson

Un processus de comptage est un processus en temps continu $\{N(t), t \geq 0\}$, à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$, et dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite.

Habituellement, $N(0) = 0$, et les instants de saut $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots$ s'appellent les instants d'arrivées.

Ainsi, $N(t)$ représente le nombre d'arrivées durant $[0, t]$.

On note $A_j = T_j - T_{j-1}$.

Si les A_j sont des v.a. i.i.d., on a un processus de renouvellement.

On a un processus de Poisson si $N(0) = 0$ et

- (a) les arrivées se font une à une (la prob. de 2 arrivées simultanées est 0);
- (b) pour $s, t \geq 0$, la v.a. $N(t + s) - N(t)$ est indépendante de $\{N(u), u \leq t\}$ (i.e., ne dépend pas de l'histoire passée).

Processus de Poisson

Un processus de comptage est un processus en temps continu $\{N(t), t \geq 0\}$, à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$, et dont les trajectoires sont non décroissantes et continues à droite.

Habituellement, $N(0) = 0$, et les instants de saut $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots$ s'appellent les instants d'arrivées.

Ainsi, $N(t)$ représente le nombre d'arrivées durant $[0, t]$.

On note $A_j = T_j - T_{j-1}$.

Si les A_j sont des v.a. i.i.d., on a un processus de renouvellement.

On a un processus de Poisson si $N(0) = 0$ et

- (a) les arrivées se font une à une (la prob. de 2 arrivées simultanées est 0);
- (b) pour $s, t \geq 0$, la v.a. $N(t + s) - N(t)$ est indépendante de $\{N(u), u \leq t\}$ (i.e., ne dépend pas de l'histoire passée).

Intuition: un processus sera approx. Poisson si les événements arrivent au hasard, indépendamment les uns des autres.

Posons $\Lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[N(t)]$.

Supposons que $\Lambda(t)$ est continue partout, et dérivable sauf possiblement en un nombre fini de points sur tout intervalle fini.

Posons $\Lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[N(t)]$.

Supposons que $\Lambda(t)$ est continue partout, et dérivable sauf possiblement en un nombre fini de points sur tout intervalle fini.

$\lambda(t) = \Lambda'(t)$ est la fonction de taux du processus;

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ est la fonction de taux cumulé.

Posons $\Lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[N(t)]$.

Supposons que $\Lambda(t)$ est continue partout, et dérivable sauf possiblement en un nombre fini de points sur tout intervalle fini.

$\lambda(t) = \Lambda'(t)$ est la fonction de taux du processus;

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ est la fonction de taux cumulé.

Interprétation: pour un petit $\epsilon > 0$, la probabilité d'un saut du processus dans l'intervalle de temps $(t, t + \epsilon]$ est

$$P[N(t + \epsilon) - N(t) = 1] \approx 1 - P[N(t + \epsilon) - N(t) = 0] \approx \lambda(t)\epsilon$$

et la probabilité de plus d'un saut est $o(\epsilon)$.

Posons $\Lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[N(t)]$.

Supposons que $\Lambda(t)$ est continue partout, et dérivable sauf possiblement en un nombre fini de points sur tout intervalle fini.

$\lambda(t) = \Lambda'(t)$ est la fonction de taux du processus;

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ est la fonction de taux cumulé.

Interprétation: pour un petit $\epsilon > 0$, la probabilité d'un saut du processus dans l'intervalle de temps $(t, t + \epsilon]$ est

$$P[N(t + \epsilon) - N(t) = 1] \approx 1 - P[N(t + \epsilon) - N(t) = 0] \approx \lambda(t)\epsilon$$

et la probabilité de plus d'un saut est $o(\epsilon)$.

Processus de Poisson stationnaire: $\lambda(t) = \lambda > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Posons $\Lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[N(t)]$.

Supposons que $\Lambda(t)$ est continue partout, et dérivable sauf possiblement en un nombre fini de points sur tout intervalle fini.

$\lambda(t) = \Lambda'(t)$ est la fonction de taux du processus;

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ est la fonction de taux cumulé.

Interprétation: pour un petit $\epsilon > 0$, la probabilité d'un saut du processus dans l'intervalle de temps $(t, t + \epsilon]$ est

$$P[N(t + \epsilon) - N(t) = 1] \approx 1 - P[N(t + \epsilon) - N(t) = 0] \approx \lambda(t)\epsilon$$

et la probabilité de plus d'un saut est $o(\epsilon)$.

Processus de Poisson stationnaire: $\lambda(t) = \lambda > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Si $\lambda = 1$, on a un processus de Poisson standard.

Proposition. Si $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson et $t_2 > t_1 \geq 0$, alors $N(t_2) - N(t_1)$ suit la loi de Poisson de moyenne

$$\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt.$$

Proposition. Si $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson et $t_2 > t_1 \geq 0$, alors $N(t_2) - N(t_1)$ suit la loi de Poisson de moyenne

$$\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt.$$

Dans le cas stationnaire, la moyenne est $(t_2 - t_1)\lambda$.

Proposition. Si $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson et $t_2 > t_1 \geq 0$, alors $N(t_2) - N(t_1)$ suit la loi de Poisson de moyenne

$$\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt.$$

Dans le cas stationnaire, la moyenne est $(t_2 - t_1)\lambda$.

Proposition. Un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$, avec $N(0) = 0$, est un processus de Poisson stationnaire de taux λ ssi les v.a. A_1, A_2, \dots sont i.i.d. exponentielles de paramètre λ .

Proposition. Si $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson et $t_2 > t_1 \geq 0$, alors $N(t_2) - N(t_1)$ suit la loi de Poisson de moyenne

$$\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt.$$

Dans le cas stationnaire, la moyenne est $(t_2 - t_1)\lambda$.

Proposition. Un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$, avec $N(0) = 0$, est un processus de Poisson stationnaire de taux λ ssi les v.a. A_1, A_2, \dots sont i.i.d. exponentielles de paramètre λ .

Dans le cas stationnaire, on peut donc générer les sauts en générant des exponentielles i.i.d..

On sait que pour un processus de Poisson, le nombre d'arrivées durant un intervalle $(t_1, t_2]$ est $\text{Poisson}(\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1))$. On peut donc générer ce nombre directement. ¹¹

On sait que pour un processus de Poisson, le nombre d'arrivées durant un intervalle $(t_1, t_2]$ est $\text{Poisson}(\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1))$. On peut donc générer ce nombre directement. ¹¹

Mais comment générer ensuite les instants de ces arrivées?

On sait que pour un processus de Poisson, le nombre d'arrivées durant un intervalle $(t_1, t_2]$ est $\text{Poisson}(\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1))$. On peut donc générer ce nombre directement.

Mais comment générer ensuite les instants de ces arrivées?

Dans le cas stationnaire, c'est facile:

Proposition. Pour un processus de Poisson stationnaire, si n arrivées ont eu lieu durant un intervalle $(t_1, t_2]$, alors la loi conditionnelle des temps de ces n arrivées est la même que celle des statistiques d'ordre de n v.a. i.i.d. $U(t_1, t_2)$.

On sait que pour un processus de Poisson, le nombre d'arrivées durant un intervalle $(t_1, t_2]$ est $\text{Poisson}(\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1))$. On peut donc générer ce nombre directement.

Mais comment générer ensuite les instants de ces arrivées?

Dans le cas stationnaire, c'est facile:

Proposition. Pour un processus de Poisson stationnaire, si n arrivées ont eu lieu durant un intervalle $(t_1, t_2]$, alors la loi conditionnelle des temps de ces n arrivées est la même que celle des statistiques d'ordre de n v.a. i.i.d. $U(t_1, t_2)$.

Encore une autre façon: "bridge sampling", en exploitant le fait que le processus de Poisson stationnaire est un processus de Lévy.

Pour l'intervalle $(0, t]$: générer d'abord $N(t)$ (Poisson);

puis $N(t/2)$ conditionnement à $N(t)$ (binomiale);

puis $N(t/4)$ conditionnement à $N(t/2)$ (binomiale); etc.

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Soit $X_j = \Lambda(T_j)$ pour $j \geq 0$ et définissons $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ par

$$\tilde{N}(x) = N(\Lambda^{-1}(x)).$$

On a $\tilde{N}(0) = 0$ et $\tilde{N}(x)$ monte de 1 à chaque X_j .

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Soit $X_j = \Lambda(T_j)$ pour $j \geq 0$ et définissons $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ par

$$\tilde{N}(x) = N(\Lambda^{-1}(x)).$$

On a $\tilde{N}(0) = 0$ et $\tilde{N}(x)$ monte de 1 à chaque X_j .

Proposition $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard ssi $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux cumulé $\Lambda(\cdot)$.

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Soit $X_j = \Lambda(T_j)$ pour $j \geq 0$ et définissons $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ par

$$\tilde{N}(x) = N(\Lambda^{-1}(x)).$$

On a $\tilde{N}(0) = 0$ et $\tilde{N}(x)$ monte de 1 à chaque X_j .

Proposition $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard ssi $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux cumulé $\Lambda(\cdot)$.

Preuve. Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaites pour $\{\tilde{N}(t)\}$ ssi elles le sont pour $\{N(t)\}$, car $\Lambda(\cdot)$ est continue et non-décroissante.

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Soit $X_j = \Lambda(T_j)$ pour $j \geq 0$ et définissons $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ par

$$\tilde{N}(x) = N(\Lambda^{-1}(x)).$$

On a $\tilde{N}(0) = 0$ et $\tilde{N}(x)$ monte de 1 à chaque X_j .

Proposition $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard ssi $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux cumulé $\Lambda(\cdot)$.

Preuve. Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaites pour $\{\tilde{N}(t)\}$ ssi elles le sont pour $\{N(t)\}$, car $\Lambda(\cdot)$ est continue et non-décroissante. Reste à vérifier les fonctions de taux.

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Soit $X_j = \Lambda(T_j)$ pour $j \geq 0$ et définissons $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ par

$$\tilde{N}(x) = N(\Lambda^{-1}(x)).$$

On a $\tilde{N}(0) = 0$ et $\tilde{N}(x)$ monte de 1 à chaque X_j .

Proposition $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard ssi $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux cumulé $\Lambda(\cdot)$.

Preuve. Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaites pour $\{\tilde{N}(t)\}$ ssi elles le sont pour $\{N(t)\}$, car $\Lambda(\cdot)$ est continue et non-décroissante.

Reste à vérifier les fonctions de taux.

Si $E[N(t)] = \Lambda(t)$,

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Soit $X_j = \Lambda(T_j)$ pour $j \geq 0$ et définissons $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ par

$$\tilde{N}(x) = N(\Lambda^{-1}(x)).$$

On a $\tilde{N}(0) = 0$ et $\tilde{N}(x)$ monte de 1 à chaque X_j .

Proposition $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard ssi $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux cumulé $\Lambda(\cdot)$.

Preuve. Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaites pour $\{\tilde{N}(t)\}$ ssi elles le sont pour $\{N(t)\}$, car $\Lambda(\cdot)$ est continue et non-décroissante.

Reste à vérifier les fonctions de taux.

Si $E[N(t)] = \Lambda(t)$, alors $E[\tilde{N}(x)] = E[N(\Lambda^{-1}(x))]$

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Soit $X_j = \Lambda(T_j)$ pour $j \geq 0$ et définissons $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ par

$$\tilde{N}(x) = N(\Lambda^{-1}(x)).$$

On a $\tilde{N}(0) = 0$ et $\tilde{N}(x)$ monte de 1 à chaque X_j .

Proposition $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard ssi $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux cumulé $\Lambda(\cdot)$.

Preuve. Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaites pour $\{\tilde{N}(t)\}$ ssi elles le sont pour $\{N(t)\}$, car $\Lambda(\cdot)$ est continue et non-décroissante.

Reste à vérifier les fonctions de taux.

Si $E[N(t)] = \Lambda(t)$, alors $E[\tilde{N}(x)] = E[N(\Lambda^{-1}(x))] = \Lambda(\Lambda^{-1}(x))$

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Soit $X_j = \Lambda(T_j)$ pour $j \geq 0$ et définissons $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ par

$$\tilde{N}(x) = N(\Lambda^{-1}(x)).$$

On a $\tilde{N}(0) = 0$ et $\tilde{N}(x)$ monte de 1 à chaque X_j .

Proposition $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard ssi $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux cumulé $\Lambda(\cdot)$.

Preuve. Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaites pour $\{\tilde{N}(t)\}$ ssi elles le sont pour $\{N(t)\}$, car $\Lambda(\cdot)$ est continue et non-décroissante.

Reste à vérifier les fonctions de taux.

Si $E[N(t)] = \Lambda(t)$, alors $E[\tilde{N}(x)] = E[N(\Lambda^{-1}(x))] = \Lambda(\Lambda^{-1}(x)) = x$.

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Soit $X_j = \Lambda(T_j)$ pour $j \geq 0$ et définissons $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ par

$$\tilde{N}(x) = N(\Lambda^{-1}(x)).$$

On a $\tilde{N}(0) = 0$ et $\tilde{N}(x)$ monte de 1 à chaque X_j .

Proposition $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard ssi $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux cumulé $\Lambda(\cdot)$.

Preuve. Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaites pour $\{\tilde{N}(t)\}$ ssi elles le sont pour $\{N(t)\}$, car $\Lambda(\cdot)$ est continue et non-décroissante.

Reste à vérifier les fonctions de taux.

Si $E[N(t)] = \Lambda(t)$, alors $E[\tilde{N}(x)] = E[N(\Lambda^{-1}(x))] = \Lambda(\Lambda^{-1}(x)) = x$.

Inversement, si $E[\tilde{N}(x)] = x$,

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Soit $X_j = \Lambda(T_j)$ pour $j \geq 0$ et définissons $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ par

$$\tilde{N}(x) = N(\Lambda^{-1}(x)).$$

On a $\tilde{N}(0) = 0$ et $\tilde{N}(x)$ monte de 1 à chaque X_j .

Proposition $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard ssi $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux cumulé $\Lambda(\cdot)$.

Preuve. Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaites pour $\{\tilde{N}(t)\}$ ssi elles le sont pour $\{N(t)\}$, car $\Lambda(\cdot)$ est continue et non-décroissante.

Reste à vérifier les fonctions de taux.

Si $E[N(t)] = \Lambda(t)$, alors $E[\tilde{N}(x)] = E[N(\Lambda^{-1}(x))] = \Lambda(\Lambda^{-1}(x)) = x$.

Inversement, si $E[\tilde{N}(x)] = x$, alors $E[N(t)] = E[\tilde{N}(\Lambda(t))]$

Standardisation

Un processus non-stationnaire peut être transformé en processus stationnaire simplement en étirant et comprimant l'échelle du temps.

Soit $X_j = \Lambda(T_j)$ pour $j \geq 0$ et définissons $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ par

$$\tilde{N}(x) = N(\Lambda^{-1}(x)).$$

On a $\tilde{N}(0) = 0$ et $\tilde{N}(x)$ monte de 1 à chaque X_j .

Proposition $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard ssi $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux cumulé $\Lambda(\cdot)$.

Preuve. Les axiomes (a) et (b) pour un processus de Poisson sont satisfaites pour $\{\tilde{N}(t)\}$ ssi elles le sont pour $\{N(t)\}$, car $\Lambda(\cdot)$ est continue et non-décroissante.

Reste à vérifier les fonctions de taux.

Si $E[N(t)] = \Lambda(t)$, alors $E[\tilde{N}(x)] = E[N(\Lambda^{-1}(x))] = \Lambda(\Lambda^{-1}(x)) = x$.

Inversement, si $E[\tilde{N}(x)] = x$, alors $E[N(t)] = E[\tilde{N}(\Lambda(t))] = \Lambda(t)$.

Cette transformation permet de traiter et simuler un processus de Poisson quelconque, pourvu que l'on puisse calculer Λ^{-1} .

Pour *simuler*, on génère les X_j , puis on calcule les $T_j = \Lambda^{-1}(X_j)$.

Superposition de processus de Poisson: Si $N_1(\cdot), \dots, N_k(\cdot)$ sont des processus de Poisson indépendants de taux $\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_k(\cdot)$, alors $N(\cdot) = N_1(\cdot) + \dots + N_k(\cdot)$ est un processus de Poisson de taux $\lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot) + \dots + \lambda_k(\cdot)$.

Superposition de processus de Poisson: Si $N_1(\cdot), \dots, N_k(\cdot)$ sont des processus de Poisson indépendants de taux $\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_k(\cdot)$, alors $N(\cdot) = N_1(\cdot) + \dots + N_k(\cdot)$ est un processus de Poisson de taux $\lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot) + \dots + \lambda_k(\cdot)$.

Décomposition: inversement, si $N(\cdot)$ est un processus de Poisson de taux $\lambda(\cdot)$ et si chaque arrivée est de type j avec probabilité p_j , (indépendamment du temps et du passé), et $N_j(t)$ est le nombre d'arrivées de type j durant $(0, t]$, alors $N_j(\cdot)$ est un processus de Poisson de taux $p_j\lambda(\cdot)$.

Superposition de processus de Poisson: Si $N_1(\cdot), \dots, N_k(\cdot)$ sont des processus de Poisson indépendants de taux $\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_k(\cdot)$, alors $N(\cdot) = N_1(\cdot) + \dots + N_k(\cdot)$ est un processus de Poisson de taux $\lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot) + \dots + \lambda_k(\cdot)$.

Décomposition: inversement, si $N(\cdot)$ est un processus de Poisson de taux $\lambda(\cdot)$ et si chaque arrivée est de type j avec probabilité p_j , (indépendamment du temps et du passé), et $N_j(t)$ est le nombre d'arrivées de type j durant $(0, t]$, alors $N_j(\cdot)$ est un processus de Poisson de taux $p_j\lambda(\cdot)$.

Processus de Poisson composé: À chaque instant d'arrivée T_i , $N(\cdot)$ augmente (saute) de D_i , où les D_i sont i.i.d. et indépendants des T_i (arrivées en groupes).

Si $\{\lambda(t), t \geq 0\}$ est lui même un processus stochastique, $\{N(t), t \geq 0\}$ devient un processus de Poisson doublement stochastique, ou processus de Cox.

Si $\{\lambda(t), t \geq 0\}$ est lui-même un processus stochastique, $\{N(t), t \geq 0\}$ devient un processus de Poisson doublement stochastique, ou processus de Cox.

Dans ce cas, $\{N(t), t \geq 0\}$ lui-même n'est un processus de Poisson que conditionnellement à $\{\lambda(t), t \geq 0\}$.

Si $\{\lambda(t), t \geq 0\}$ est lui-même un processus stochastique, $\{N(t), t \geq 0\}$ devient un processus de Poisson doublement stochastique, ou processus de Cox.

Dans ce cas, $\{N(t), t \geq 0\}$ lui-même n'est un processus de Poisson que conditionnellement à $\{\lambda(t), t \geq 0\}$.

Exemples: centre d'appel, comptoir de glaces, etc.

Processus Brownien

Processus de Lévy où les incréments suivent la loi normale.

Processus Brownien

Processus de Lévy où les incréments suivent la loi normale.

Un mouvement brownien avec paramètre de tendance μ et paramètre de variance (ou coefficient de diffusion) σ^2 est un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ tel que

- (a) si $s \geq 0$ et $t > 0$, alors $X(s+t) - X(s) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$;
- (b) pour tout ensemble d'intervalles disjoints $(t_1, t_2], \dots, (t_{2k-1}, t_{2k}]$, les incréments $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{2k}) - X(t_{2k-1})$ sont mutuellement indépendants.

Processus Brownien

Processus de Lévy où les incréments suivent la loi normale.

Un mouvement brownien avec paramètre de tendance μ et paramètre de variance (ou coefficient de diffusion) σ^2 est un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ tel que

- (a) si $s \geq 0$ et $t > 0$, alors $X(s+t) - X(s) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$;
- (b) pour tout ensemble d'intervalles disjoints $(t_1, t_2], \dots, (t_{2k-1}, t_{2k}]$, les incréments $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{2k}) - X(t_{2k-1})$ sont mutuellement indépendants.

Si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on a un mouvement brownien standard.

Processus Brownien

Processus de Lévy où les incréments suivent la loi normale.

Un mouvement brownien avec paramètre de tendance μ et paramètre de variance (ou coefficient de diffusion) σ^2 est un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ tel que

- (a) si $s \geq 0$ et $t > 0$, alors $X(s+t) - X(s) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$;
- (b) pour tout ensemble d'intervalles disjoints $(t_1, t_2], \dots, (t_{2k-1}, t_{2k}]$, les incréments $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{2k}) - X(t_{2k-1})$ sont mutuellement indépendants.

Si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on a un mouvement brownien standard.

Le processus standardisé $B(t) = [X(t) - \mu t]/\sigma$ est toujours un mouvement brownien standard.

Processus Brownien

Processus de Lévy où les incréments suivent la loi normale.

Un mouvement brownien avec paramètre de tendance μ et paramètre de variance (ou coefficient de diffusion) σ^2 est un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ tel que

- (a) si $s \geq 0$ et $t > 0$, alors $X(s+t) - X(s) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$;
- (b) pour tout ensemble d'intervalles disjoints $(t_1, t_2], \dots, (t_{2k-1}, t_{2k}]$, les incréments $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{2k}) - X(t_{2k-1})$ sont mutuellement indépendants.

Si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on a un mouvement brownien standard.

Le processus standardisé $B(t) = [X(t) - \mu t]/\sigma$ est toujours un mouvement brownien standard.

Pour $s, t \geq 0$, on a $\text{Cov}[X(s), X(t)] = \sigma^2 \min(s, t)$ (exercice).

Processus Brownien

Processus de Lévy où les incréments suivent la loi normale.

Un mouvement brownien avec paramètre de tendance μ et paramètre de variance (ou coefficient de diffusion) σ^2 est un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ tel que

- (a) si $s \geq 0$ et $t > 0$, alors $X(s+t) - X(s) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$;
- (b) pour tout ensemble d'intervalles disjoints $(t_1, t_2], \dots, (t_{2k-1}, t_{2k}]$, les incréments $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{2k}) - X(t_{2k-1})$ sont mutuellement indépendants.

Si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on a un mouvement brownien standard.

Le processus standardisé $B(t) = [X(t) - \mu t]/\sigma$ est toujours un mouvement brownien standard.

Pour $s, t \geq 0$, on a $\text{Cov}[X(s), X(t)] = \sigma^2 \min(s, t)$ (exercice).

Si μ peut varier en fonction du temps, et/ou $\text{Cov}[X(s), X(t)]$ peuvent dépendre de s et t , on obtient un processus gaussien.

Propriétés du mouvement brownien

(Pour détails et preuves, voir, e.g., Taylor and Karlin 1998).

Propriétés du mouvement brownien

(Pour détails et preuves, voir, e.g., Taylor and Karlin 1998).

$\{B(t), t \geq 0\}$, mouvement brownien standard.

Propriétés du mouvement brownien

(Pour détails et preuves, voir, e.g., Taylor and Karlin 1998).

$\{B(t), t \geq 0\}$, mouvement brownien standard.

La loi du processus maximum $M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} B(s)$:

$$P[M(t) \leq x] = 1 - 2(1 - \Phi([B(0) + x]/\sqrt{t})).$$

Pour $x > 0$, $\tau_x = \min\{t \geq 0 : B(t) = x\}$, instant d'atteinte de x . Si $B(0) = 0$,

$$P[\tau_x \leq t] = P[M(t) \geq x] = 2(1 - \Phi(x/\sqrt{t})).$$

Propriétés du mouvement brownien

(Pour détails et preuves, voir, e.g., Taylor and Karlin 1998).

$\{B(t), t \geq 0\}$, mouvement brownien standard.

La loi du processus maximum $M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} B(s)$:

$$P[M(t) \leq x] = 1 - 2(1 - \Phi([B(0) + x]/\sqrt{t})).$$

Pour $x > 0$, $\tau_x = \min\{t \geq 0 : B(t) = x\}$, instant d'atteinte de x . Si $B(0) = 0$,

$$P[\tau_x \leq t] = P[M(t) \geq x] = 2(1 - \Phi(x/\sqrt{t})).$$

Si $B(0) = 0$, alors $P[B(u) = 0 \text{ pour un } u \in (t, t + s]] = (2/\pi) \arctan \sqrt{s/t}$.

Mouvement brownien réfléchi: $\{R(t) = |B(t)|, t \geq 0\}$.
On a $E[R(t)] = \sqrt{2t/\pi}$ et $\text{Var}[R(t)] = (1 - 2/\pi)t$.

Mouvement brownien réfléchi: $\{R(t) = |B(t)|, t \geq 0\}$.

On a $E[R(t)] = \sqrt{2t/\pi}$ et $\text{Var}[R(t)] = (1 - 2/\pi)t$.

Si $B(0) > 0$, le processus $\{A(t), t \geq 0\}$ tel que $A(t) = B(t)$ pour $t \leq \tau_0$ et $A(t) = 0$ pour $t > \tau_0$, est un mouvement brownien absorbé.

$$P[A(t) > y \mid A(0) = x] = \Phi((y + x)/\sqrt{t}) - \Phi((y - x)/\sqrt{t}),$$

$$P[A(t) = 0 \mid A(0) = x] = 2(1 - \Phi(x/\sqrt{t})).$$

Pont Brownien

Un pont brownien standard est un processus qui obéit à la loi d'un mouvement brownien standard, conditionnelle à $\{B(0) = B(1) = 0\}$.

Pont Brownien

Un pont brownien standard est un processus qui obéit à la loi d'un mouvement brownien standard, conditionnelle à $\{B(0) = B(1) = 0\}$.

Plus généralement, si $\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien de paramètres μ et σ^2 , conditionnellement à $\{X(0) = x, X(t) = y\}$, le processus $\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$ est un pont brownien.

Pont Brownien

Un **pont brownien standard** est un processus qui obéit à la loi d'un mouvement brownien standard, conditionnelle à $\{B(0) = B(1) = 0\}$.

Plus généralement, si $\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien de paramètres μ et σ^2 , conditionnellement à $\{X(0) = x, X(t) = y\}$, le processus $\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$ est un **pont brownien**.

La loi conditionnelle de $X(s)$ est **normale** avec

$$\begin{aligned} E[X(s)|X(0) = x, X(t) = y] &= x + (y - x)s/t, \\ \text{Var}[X(s)|X(0) = x, X(t) = y] &= s(t - s)\sigma^2/t. \end{aligned}$$

On peut utiliser ceci pour générer la trajectoire par raffinements successifs: générer $X(t)$, puis $X(t/2)$, puis $X(t/4)$, puis $X(3t/4)$, etc.

Mouvement Brownien Géométrique

$\{S(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien géométrique avec paramètre de dérive $r = \mu + \sigma^2/2$ si $\{X(t) = \ln S(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien de paramètres μ et σ^2 .

Mouvement Brownien Géométrique

$\{S(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien géométrique avec paramètre de dérive $r = \mu + \sigma^2/2$ si $\{X(t) = \ln S(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien de paramètres μ et σ^2 .

En d'autres mots, si $\{B(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard avec $B(0) = 0$, et si

$$S(t) = S(0) \exp[\mu t + \sigma B(t)].$$

Mouvement Brownien Géométrique

$\{S(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien géométrique avec paramètre de dérive $r = \mu + \sigma^2/2$ si $\{X(t) = \ln S(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien de paramètres μ et σ^2 .

En d'autres mots, si $\{B(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard avec $B(0) = 0$, et si

$$S(t) = S(0) \exp[\mu t + \sigma B(t)].$$

Pour $t_0 \geq 0$ et $t > 0$, $S(t_0 + t)/S(t_0) \sim \text{lognormale}(\mu t, \sigma^2 t)$.

Mouvement Brownien Géométrique

$\{S(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien géométrique avec paramètre de dérive $r = \mu + \sigma^2/2$ si $\{X(t) = \ln S(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien de paramètres μ et σ^2 .

En d'autres mots, si $\{B(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard avec $B(0) = 0$, et si

$$S(t) = S(0) \exp[\mu t + \sigma B(t)].$$

Pour $t_0 \geq 0$ et $t > 0$, $S(t_0 + t)/S(t_0) \sim \text{lognormale}(\mu t, \sigma^2 t)$.

Exemple d'utilisation: modèle de Black-Scholes.

Séries Chronologiques

Pour un processus stochastique $\{Y_t, t \geq 0\}$, on définit:

$\mu_t = E[Y_t]$, la fonction de moyenne,

$\sigma_t^2 = \text{Var}[Y_t]$, la fonction de variance,

$\text{Cov}[Y_t, Y_s]$, la fonction d'autocovariance,

$\rho_{t,s} = \text{Cov}[Y_t, Y_s] / \sigma_t \sigma_s$, la fonction d'autocorrelation.

Séries Chronologiques

Pour un processus stochastique $\{Y_t, t \geq 0\}$, on définit:

$\mu_t = E[Y_t]$, la fonction de moyenne,

$\sigma_t^2 = \text{Var}[Y_t]$, la fonction de variance,

$\text{Cov}[Y_t, Y_s]$, la fonction d'autocovariance,

$\rho_{t,s} = \text{Cov}[Y_t, Y_s] / \sigma_t \sigma_s$, la fonction d'autocorrelation.

Le processus est faiblement stationnaire si $\mu_t \equiv \mu$, $\sigma_t^2 \equiv \sigma^2$ et $\rho_{t,t+s} \equiv \rho_s$ (autocorrélation de délai s) sont indépendants de t .

Séries Chronologiques

Pour un processus stochastique $\{Y_t, t \geq 0\}$, on définit:

$\mu_t = E[Y_t]$, la fonction de moyenne,

$\sigma_t^2 = \text{Var}[Y_t]$, la fonction de variance,

$\text{Cov}[Y_t, Y_s]$, la fonction d'autocovariance,

$\rho_{t,s} = \text{Cov}[Y_t, Y_s]/\sigma_t\sigma_s$, la fonction d'autocorrelation.

Le processus est faiblement stationnaire si $\mu_t \equiv \mu$, $\sigma_t^2 \equiv \sigma^2$ et $\rho_{t,t+s} \equiv \rho_s$ (autocorrélation de délai s) sont indépendants de t .

Pour un tel processus, la loi de Y_t peut quand même dépendre de t .

Séries Chronologiques

Pour un processus stochastique $\{Y_t, t \geq 0\}$, on définit:

$\mu_t = E[Y_t]$, la fonction de moyenne,

$\sigma_t^2 = \text{Var}[Y_t]$, la fonction de variance,

$\text{Cov}[Y_t, Y_s]$, la fonction d'autocovariance,

$\rho_{t,s} = \text{Cov}[Y_t, Y_s]/\sigma_t\sigma_s$, la fonction d'autocorrelation.

Le processus est faiblement stationnaire si $\mu_t \equiv \mu$, $\sigma_t^2 \equiv \sigma^2$ et $\rho_{t,t+s} \equiv \rho_s$ (autocorrélation de délai s) sont indépendants de t .

Pour un tel processus, la loi de Y_t peut quand même dépendre de t .

Le processus $\{Y_t, t \geq 0\}$ est strictement stationnaire si pour tout vecteur (t_1, \dots, t_k) fixé, la loi conjointe de $(Y_{t+t_1}, \dots, Y_{t+t_k})$ ne dépend pas de t .

Séries Chronologiques

Pour un processus stochastique $\{Y_t, t \geq 0\}$, on définit:

$\mu_t = E[Y_t]$, la fonction de moyenne,

$\sigma_t^2 = \text{Var}[Y_t]$, la fonction de variance,

$\text{Cov}[Y_t, Y_s]$, la fonction d'autocovariance,

$\rho_{t,s} = \text{Cov}[Y_t, Y_s] / \sigma_t \sigma_s$, la fonction d'autocorrelation.

Le processus est faiblement stationnaire si $\mu_t \equiv \mu$, $\sigma_t^2 \equiv \sigma^2$ et $\rho_{t,t+s} \equiv \rho_s$ (autocorrélation de délai s) sont indépendants de t .

Pour un tel processus, la loi de Y_t peut quand même dépendre de t .

Le processus $\{Y_t, t \geq 0\}$ est strictement stationnaire si pour tout vecteur (t_1, \dots, t_k) fixé, la loi conjointe de $(Y_{t+t_1}, \dots, Y_{t+t_k})$ ne dépend pas de t .

En pratique, il est très difficile de modéliser cette loi conjointe. Souvent, on se restreint à une classe étroite de modèles pour lesquels il ne reste à spécifier que quelques paramètres (e.g., moyenne, variance et autocorrelations).

Une série chronologique est un processus stochastique en temps discret $\{Y_n, n \geq 0\}$.

Une série chronologique est un processus stochastique en temps discret $\{Y_n, n \geq 0\}$.

Exemples.

Modèle $AR(p)$ (autorégressif d'ordre p):

$$Y_n = \phi_1 Y_{n-1} + \cdots + \phi_p Y_{n-p} + \theta_0 + \epsilon_n.$$

où les ϵ_n sont i.i.d. $N(0, \sigma^2)$.

Une série chronologique est un processus stochastique en temps discret $\{Y_n, n \geq 0\}$.

Exemples.

Modèle $AR(p)$ (autorégressif d'ordre p):

$$Y_n = \phi_1 Y_{n-1} + \cdots + \phi_p Y_{n-p} + \theta_0 + \epsilon_n.$$

où les ϵ_n sont i.i.d. $N(0, \sigma^2)$.

Modèle $ARIMA(p, d, q)$:

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)(1 - B)^d Y_n = \theta_0 + (1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q) \epsilon_n,$$

où $B^r Y_n = Y_{n-r}$. Ici, tout suit la loi normale.

Modèles ARTA et VARTA

Même esprit que pour NORTA.

Pour un processus **ARTA**(p) (“autoregressive to anything”) on spécifie la fonction de répartition marginale de Y_n , disons F , et les autocorrélations de délai $\leq p$.

Modèles ARTA et VARTA

Même esprit que pour NORTA.

Pour un processus **ARTA**(p) (“autoregressive to anything”) on spécifie la fonction de répartition marginale de Y_n , disons F , et les autocorrélations de délai $\leq p$.

On pose $Y_n = F^{-1}[\Phi(Z_n)]$ où $\{Z_n, n \geq 0\}$ est AR(p) avec les paramètres choisis pour atteindre les corrélations visées pour les Y_n .

Modèles ARTA et VARTA

Même esprit que pour NORTA.

Pour un processus **ARTA**(p) (“autoregressive to anything”) on spécifie la fonction de répartition marginale de Y_n , disons F , et les autocorrélations de délai $\leq p$.

On pose $Y_n = F^{-1}[\Phi(Z_n)]$ où $\{Z_n, n \geq 0\}$ est AR(p) avec les paramètres choisis pour atteindre les corrélations visées pour les Y_n .

Le processus **VARTA**(p) (“vector autoregressive to anything”) est une version multivariée.

Modèles ARTA et VARTA

Même esprit que pour NORTA.

Pour un processus **ARTA**(p) (“autoregressive to anything”) on spécifie la fonction de répartition marginale de Y_n , disons F , et les autocorrélations de délai $\leq p$.

On pose $Y_n = F^{-1}[\Phi(Z_n)]$ où $\{Z_n, n \geq 0\}$ est AR(p) avec les paramètres choisis pour atteindre les corrélations visées pour les Y_n .

Le processus **VARTA**(p) (“vector autoregressive to anything”) est une version multivariée.

Nelson et al. ont développé des méthodes d'estimation et des logiciels pour le cas où F est de la famille de Johnson.

Minification, maxification, TES

Idée: transformer des uniformes i.i.d. en uniformes corrélées,
et leur appliquer ensuite F^{-1} pour le F choisi.

Minification, maxification, TES

Idée: transformer des uniformes i.i.d. en uniformes corrélées, et leur appliquer ensuite F^{-1} pour le F choisi.

Transform-expand-sample (TES) (Livny et al. 1993).

Choisir des paramètres $-0.5 < L < R \leq 0.5$. $\{Z_n\}$ i.i.d. $U(0, 1)$.

Minification, maxification, TES

Idée: transformer des uniformes i.i.d. en uniformes corrélées, et leur appliquer ensuite F^{-1} pour le F choisi.

Transform-expand-sample (TES) (Livny et al. 1993).

Choisir des paramètres $-0.5 < L < R \leq 0.5$. $\{Z_n\}$ i.i.d. $U(0, 1)$.

$$U_0 = Z_0; \quad U_n = (U_{n-1} + L + (R - L)Z_n) \bmod 1.$$

$$Y_n = F^{-1}(U_n).$$

Minification, maxification, TES

Idée: transformer des uniformes i.i.d. en uniformes corrélées, et leur appliquer ensuite F^{-1} pour le F choisi.

Transform-expand-sample (TES) (Livny et al. 1993).

Choisir des paramètres $-0.5 < L < R \leq 0.5$. $\{Z_n\}$ i.i.d. $U(0, 1)$.

$$U_0 = Z_0; \quad U_n = (U_{n-1} + L + (R - L)Z_n) \bmod 1.$$

$$Y_n = F^{-1}(U_n). \quad \text{Rapide.}$$

On dispose d'une formule pour calculer les ρ_j ; ils dépendent de R, L et F .

Minification, maxification, TES

Idée: transformer des uniformes i.i.d. en uniformes corrélées, et leur appliquer ensuite F^{-1} pour le F choisi.

Transform-expand-sample (TES) (Livny et al. 1993).

Choisir des paramètres $-0.5 < L < R \leq 0.5$. $\{Z_n\}$ i.i.d. $U(0, 1)$.

$U_0 = Z_0$; $U_n = (U_{n-1} + L + (R - L)Z_n) \bmod 1$.

$Y_n = F^{-1}(U_n)$. Rapide.

On dispose d'une formule pour calculer les ρ_j ; ils dépendent de R, L et F .

Une variante qui produit des autocorrélations dont le signe alterne.

Minification, maxification, TES

Idée: transformer des uniformes i.i.d. en uniformes corrélées, et leur appliquer ensuite F^{-1} pour le F choisi.

Transform-expand-sample (TES) (Livny et al. 1993).

Choisir des paramètres $-0.5 < L < R \leq 0.5$. $\{Z_n\}$ i.i.d. $U(0, 1)$.

$U_0 = Z_0$; $U_n = (U_{n-1} + L + (R - L)Z_n) \bmod 1$.

$Y_n = F^{-1}(U_n)$. Rapide.

On dispose d'une formule pour calculer les ρ_j ; ils dépendent de R, L et F .

Une variante qui produit des autocorrélations dont le signe alterne.

Les $|\rho_j|$ décroissent à un taux plus lent qu'une exponentielle.

Minification, maxification, TES

Idée: transformer des uniformes i.i.d. en uniformes corrélées, et leur appliquer ensuite F^{-1} pour le F choisi.

Transform-expand-sample (TES) (Livny et al. 1993).

Choisir des paramètres $-0.5 < L < R \leq 0.5$. $\{Z_n\}$ i.i.d. $U(0, 1)$.

$U_0 = Z_0$; $U_n = (U_{n-1} + L + (R - L)Z_n) \bmod 1$.

$Y_n = F^{-1}(U_n)$. Rapide.

On dispose d'une formule pour calculer les ρ_j ; ils dépendent de R, L et F .

Une variante qui produit des autocorrélations dont le signe alterne.

Les $|\rho_j|$ décroissent à un taux plus lent qu'une exponentielle.

Méthode de minification (Lewis and McKenzie 1991):

Paramètre C .

$U_n := C \cdot \min\{U_{n-1}, Z_{n-1}/(Z_{n-1} + C - 1)\}$.

Les ρ_j pour les U_n satisfont $\rho_j = c^{-j}$.

Minification, maxification, TES

Idée: transformer des uniformes i.i.d. en uniformes corrélées, et leur appliquer ensuite F^{-1} pour le F choisi.

Transform-expand-sample (TES) (Livny et al. 1993).

Choisir des paramètres $-0.5 < L < R \leq 0.5$. $\{Z_n\}$ i.i.d. $U(0, 1)$.

$U_0 = Z_0$; $U_n = (U_{n-1} + L + (R - L)Z_n) \bmod 1$.

$Y_n = F^{-1}(U_n)$. Rapide.

On dispose d'une formule pour calculer les ρ_j ; ils dépendent de R, L et F .

Une variante qui produit des autocorrélations dont le signe alterne.

Les $|\rho_j|$ décroissent à un taux plus lent qu'une exponentielle.

Méthode de minification (Lewis and McKenzie 1991):

Paramètre C .

$U_n := C \cdot \min\{U_{n-1}, Z_{n-1}/(Z_{n-1} + C - 1)\}$.

Les ρ_j pour les U_n satisfont $\rho_j = c^{-j}$.

Exemple: Effet sur l'attente dans une file; voir notes de cours.

Estimation de paramètres

On a n observations x_1, \dots, x_n venant d'une loi de densité $f_\theta(x)$ et on veut estimer θ (inconnu). Ici, x et θ peuvent être des vecteurs.

Estimation de paramètres

On a n observations x_1, \dots, x_n venant d'une loi de densité $f_\theta(x)$ et on veut estimer θ (inconnu). Ici, x et θ peuvent être des vecteurs.

Fonction de vraisemblance de l'échantillon:

$$L(\theta) = f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n).$$

Estimateur de vraisemblance maximale (EVM): c'est la valeur de θ qui maximise $L(\theta)$. Plusieurs propriétés intéressantes font que c'est la méthode de choix.

Estimation de paramètres

On a n observations x_1, \dots, x_n venant d'une loi de densité $f_\theta(x)$ et on veut estimer θ (inconnu). Ici, x et θ peuvent être des vecteurs.

Fonction de vraisemblance de l'échantillon:

$$L(\theta) = f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n).$$

Estimateur de vraisemblance maximale (EVM): c'est la valeur de θ qui maximise $L(\theta)$. Plusieurs propriétés intéressantes font que c'est la méthode de choix.

Par exemple, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \Rightarrow N(0, n(\mathbf{I}(\theta))^{-1})$.

Estimation de paramètres

On a n observations x_1, \dots, x_n venant d'une loi de densité $f_\theta(x)$ et on veut estimer θ (inconnu). Ici, x et θ peuvent être des vecteurs.

Fonction de vraisemblance de l'échantillon:

$$L(\theta) = f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n).$$

Estimateur de vraisemblance maximale (EVM): c'est la valeur de θ qui maximise $L(\theta)$. Plusieurs propriétés intéressantes font que c'est la méthode de choix.

Par exemple, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \Rightarrow N(0, n(\mathbf{I}(\theta))^{-1})$.

Autres méthodes: ajustement des moments ("moment matching"), moindres carrés,...

Exemple. Loi Weibull avec $\delta = 0$ et $\theta = (\alpha, \lambda)$. On a

$$\begin{aligned}f(x) &= \alpha \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha} \quad \text{pour } x > 0, \\L(\alpha, \lambda) &= \alpha^n \lambda^{n\alpha} (x_1 \cdots x_n)^{\alpha-1} e^{-\lambda^\alpha (x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha)}, \\ \ln L(\alpha, \lambda) &= n \ln \alpha + n\alpha \ln \lambda + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda^\alpha \sum_{i=1}^n x_i^\alpha.\end{aligned}$$

On regarde où la dérivée de $\ln L$ vaut zéro, car c'est plus facile que pour L .

Exemple. Loi Weibull avec $\delta = 0$ et $\theta = (\alpha, \lambda)$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha} \quad \text{pour } x > 0, \\ L(\alpha, \lambda) &= \alpha^n \lambda^{n\alpha} (x_1 \cdots x_n)^{\alpha-1} e^{-\lambda^\alpha (x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha)}, \\ \ln L(\alpha, \lambda) &= n \ln \alpha + n\alpha \ln \lambda + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda^\alpha \sum_{i=1}^n x_i^\alpha. \end{aligned}$$

On regarde où la dérivée de $\ln L$ vaut zéro, car c'est plus facile que pour L .

En mettant les dérivées partielles à zéro, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^\alpha \ln(\lambda x_i) = 0, \\ \frac{\partial \ln L(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\alpha n}{\lambda} - \alpha \lambda^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha = 0. \end{aligned}$$

La seconde équation permet d'écrire λ en fonction de α , puis on remplace dans la première et on la résoud numériquement.

Exemple. Loi Weibull avec $\delta = 0$ et $\theta = (\alpha, \lambda)$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha} \quad \text{pour } x > 0, \\ L(\alpha, \lambda) &= \alpha^n \lambda^{n\alpha} (x_1 \cdots x_n)^{\alpha-1} e^{-\lambda^\alpha (x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha)}, \\ \ln L(\alpha, \lambda) &= n \ln \alpha + n\alpha \ln \lambda + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda^\alpha \sum_{i=1}^n x_i^\alpha. \end{aligned}$$

On regarde où la dérivée de $\ln L$ vaut zéro, car c'est plus facile que pour L .

En mettant les dérivées partielles à zéro, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^\alpha \ln(\lambda x_i) = 0, \\ \frac{\partial \ln L(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\alpha n}{\lambda} - \alpha \lambda^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha = 0. \end{aligned}$$

La seconde équation permet d'écrire λ en fonction de α , puis on remplace dans la première et on la résoud numériquement.

Pour $\alpha = 1$, on obtient: $\hat{\lambda}_n = 1/\bar{x}_n = n/\sum_{i=1}^n x_i$.

Tests d'Ajustement

Voir Law et Kelton (2000) pour plus de détails.

On veut tester si la f.r. F s'ajuste bien aux données.

Tests d'Ajustement

Voir Law et Kelton (2000) pour plus de détails.

On veut tester si la f.r. F s'ajuste bien aux données.

Tests visuels, histogrammes.

Graphique P-P: points $((i - 0.5)/n, F(x_{(i)})) = (\hat{F}_n(x_{(i)}) - 0.5/n, F(x_{(i)}))$;

Tests d'Ajustement

Voir Law et Kelton (2000) pour plus de détails.

On veut tester si la f.r. F s'ajuste bien aux données.

Tests visuels, histogrammes.

Graphique P-P: points $((i - 0.5)/n, F(x_{(i)})) = (\hat{F}_n(x_{(i)}) - 0.5/n, F(x_{(i)}))$;

Graphique Q-Q: points $(F^{-1}((i - 0.5)/n), x_{(i)})$.

Tests d'Ajustement

Voir Law et Kelton (2000) pour plus de détails.

On veut tester si la f.r. F s'ajuste bien aux données.

Tests visuels, histogrammes.

Graphique P-P: points $((i - 0.5)/n, F(x_{(i)})) = (\hat{F}_n(x_{(i)}) - 0.5/n, F(x_{(i)}))$;

Graphique Q-Q: points $(F^{-1}((i - 0.5)/n), x_{(i)})$.

Le P-P plot détecte les différences davantage au centre, le Q-Q plot davantage dans les queues.

Tests d'Ajustement

Voir Law et Kelton (2000) pour plus de détails.

On veut tester si la f.r. F s'ajuste bien aux données.

Tests visuels, histogrammes.

Graphique P-P: points $((i - 0.5)/n, F(x_{(i)})) = (\hat{F}_n(x_{(i)}) - 0.5/n, F(x_{(i)}))$;

Graphique Q-Q: points $(F^{-1}((i - 0.5)/n), x_{(i)})$.

Le P-P plot détecte les différences davantage au centre, le Q-Q plot davantage dans les queues.

Chi-deux, Kolmogorov-Smirnov, Anderson Darling.

Tests d'Ajustement

Voir Law et Kelton (2000) pour plus de détails.

On veut tester si la f.r. F s'ajuste bien aux données.

Tests visuels, histogrammes.

Graphique P-P: points $((i - 0.5)/n, F(x_{(i)})) = (\hat{F}_n(x_{(i)}) - 0.5/n, F(x_{(i)}))$;

Graphique Q-Q: points $(F^{-1}((i - 0.5)/n), x_{(i)})$.

Le P-P plot détecte les différences davantage au centre, le Q-Q plot davantage dans les queues.

Chi-deux, Kolmogorov-Smirnov, Anderson Darling.

Kolmogorov-Smirnov:

$$\begin{aligned}
 D_n &= \sup_{-\infty < x < \infty} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \\
 &= \max \left(\max_{1 \leq i \leq n} [i/n - u_{(i)}], \max_{1 \leq i \leq n} [u_{(i)} - (i - 1)/n] \right).
 \end{aligned}$$

On rejette \mathcal{H}_0 : "la bonne loi est F " si D_n est trop grand.