

## IFT 1065 – Démonstration 12

1. On distribue une main de poker (5 cartes) tirée d'un jeu normal de 52 cartes (il y a 13 cartes de chacune des 4 couleurs : ♠, ♥, ♦, ♣).
  - a) Combien y a-t-il de mains distinctes contenant au moins 3 ♠ ?
  - b) Combien y a-t-il de mains distinctes contenant au moins 3 cartes de la même couleur ?

**Note :** L'ordre dans lequel les cartes sont distribuées n'a pas d'importance.

2. Combien de chaînes de 17 bits contiennent exactement 5 zéros et débutent ou se terminent par 2 zéros consécutifs ?
3. On veut couvrir un tableau rectangulaire de dimension  $2 \times n$  avec des tuiles rectangulaires de dimension  $1 \times 2$  (qu'on peut disposer horizontalement ou verticalement) et des tuiles carrées de dimension  $2 \times 2$ .

Formuler une relation de récurrence donnant le nombre de façons de recouvrir ce tableau. Donner les conditions initiales, en considérant attentivement les cas  $n = 1$  et  $n = 2$ . Résoudre l'équation de récurrence.

**Indice :** Établir la relation de récurrence en raisonnant sur la première tuile placée, c'est-à-dire la plus à gauche.

4. Un tournoi de tennis (simple messieurs) regroupe  $n = 2^k$  joueurs. Au cours de la première ronde, il y a  $n/2$  parties qui déterminent  $2^{k-1}$  vainqueurs qui passent à la seconde ronde, et ainsi de suite.

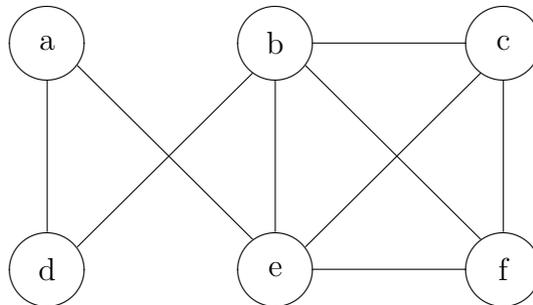
Établir une relation de récurrence pour le nombre de rondes nécessaires pour déterminer le vainqueur du tournoi. Indiquer la condition initiale et résoudre l'équation de récurrence.

Combien de PARTIES sont nécessaires pour déterminer le vainqueur ?

5. On invite  $m$  personnes à une soirée. Soit  $n_i$  le nombre de personnes que la personne  $i$  a rencontrées auparavant. Démontrer qu'il existe au moins 2 personnes distinctes  $i$  et  $j$  pour lesquelles  $n_i = n_j$ .

6. Indiquer si les énoncés suivants sont vrais ou faux, en justifiant dans chaque cas votre réponse (le graphe  $G$  est dessiné ci-dessous) :

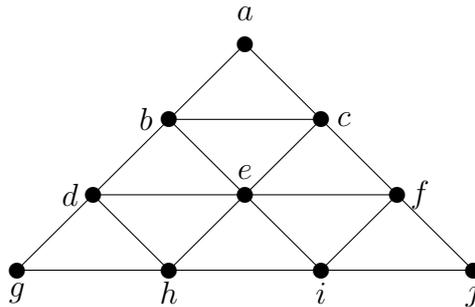
- a)  $G$  est hamiltonien.
- b)  $G$  est eulérien.
- c)  $G$  est planaire.
- d) Cette question est trop simple.



7. Soit  $W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  la matrice obtenue à la deuxième itération de l'algorithme de Warshall (rappel :  $w_{ij}^k = w_{ij}^{k-1} \vee (w_{ik}^{k-1} \wedge w_{kj}^{k-1})$ ). Déterminer la fermeture transitive du graphe associé en complétant l'algorithme, puis tracer le graphe obtenu à la dernière itération.

8. Combien y a-t-il de relations d'équivalence distinctes sur un ensemble de trois éléments ?

9. (i) Le graphe suivant est-il eulérien? Si votre réponse est positive, donner un cycle eulérien. Si votre réponse est négative, justifiez-la.
- (ii) Remplacer ‘eulérien’ par ‘hamiltonien’ dans la question précédente.



10. Soit  $G$  un graphe non orienté simple (sans boucles ni arcs parallèles) comportant  $n$  sommets et  $m$  arcs. Soit  $G'$  le graphe complémentaire de  $G$ . (Un arc fait partie de  $G'$  si et seulement si il ne fait pas partie de  $G$ .)
- (i) Combien d'arcs contient  $G'$  ?
- (ii) Trouver un graphe  $G$  de 6 sommets tel que  $G$  et  $G'$  soient tous les deux planaires.
- (iii) Montrer que si  $n \geq 11$ , alors  $G$  et  $G'$  ne peuvent être tous les deux planaires. Utiliser le résultat suivant : dans tout graphe planaire connexe on a
- $$\text{nombre d'arcs} \leq 3 \times \text{nombre de sommets} - 6.$$
11. Combien y a-t-il de séquences de 3 chiffres (0 à 9) ayant au moins un chiffre apparaissant plus d'une fois? Présentez vos calculs.
12. Soit un ensemble  $P$  de  $n$  nombres premiers. Combien peut-on former de nombres différents par le produit de  $k$  nombres de  $P$  par un produit d'un sous-ensemble quelconque de nombres de  $P$ ? Explicitez votre raisonnement. (La solution est une expression utilisant  $n$ .)
13. Combien y a-t-il de nombres entiers divisibles par 3, 5 ou 11 entre 1 et 100 ?