

IFT 1065 – Démonstration 4

1. Démontrer les identités suivantes :

$$\begin{aligned}f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \quad .\end{aligned}$$

2. Démontrer

$$\begin{aligned}\lceil -x \rceil &= \lfloor -x \rfloor \\ \lfloor -x \rfloor &= \lceil -x \rceil \\ x \leq 0 &\Rightarrow |x| = -x \quad .\end{aligned}$$

3. Soit la série géométrique $S = \sum_{k=0}^n x^k$. Montrer qu'on peut obtenir une expression explicite pour S à partir de la quantité xS .
4. Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k$. En reliant g à f' , montrer comment trouver une expression explicite pour $g(x)$.
5. Établir une expression pour la série arithmétique $\sum_{k=1}^n k$ à partir de la série télescopique construite autour de $(k+1)^2 - k^2$. Montrer comment généraliser cette technique à la série $\sum_{k=1}^n k^2$.
6. Sachant que série arithmétique $\sum_{k=1}^n k$ est égale à un polynôme du second degré $an^2 + bn + c$, trouver les coefficients de ce polynôme. Montrer comment généraliser cette technique à la série $\sum_{k=1}^n k^2$.
7. Si $f \in O(g)$, a-t-on $\lg(f) \in \lg(g)$? A-t-on $2^f \in O(2^g)$?
8. Montrer que $\lg n! \in \Theta(n \lg n)$.
9. Montrer que la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \in \Theta(\lg n)$.