

IFT 1065 – Démonstration 5

1. Soit $f(n)$ le nombre d'opérations effectuées par le programme suivant :

1. $j \leftarrow n$
2. **tant que** $j \geq 1$ {
3. **pour** $i = 1$ à j : $x \leftarrow x + 1$
4. $j \leftarrow \lfloor j/2 \rfloor$ }

Montrer que $f(n) \in \Theta(n)$.

2. Soit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c.$$

Selon la notation O ou Θ , quelles relations entre f et g peut-on tirer de la valeur de c ?

Étudier les cas suivants :

- $f(n) = ((-1)^n + 1)n$ et $g(n) = n$.
- $f(n) = n \lg^2 n$ et $g(n) = n^2$.
- f et g sont des polynômes de même degré.

3. Démontrer que

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

4. Démontrer l'équivalence des énoncés suivants : $A \cap B = \emptyset$, $B \subseteq \overline{A}$, $A \oplus B = A \cup B$ et illustrer à partir de diagrammes de Venn.

5. Démontrer que l'équation $m^3 + 2n^2 = 36$ ne possède pas de solution en nombres entiers strictement positifs.

6. Démontrer que

$$\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}.$$

7. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

8. Trouver une expression pour la n ième puissance de la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ et montrer qu'elle est bien valide.

9. Correction du devoir 2.