

IFT 1065 – Démonstration 7

1. Simplifier l'expression :

$$\sum_{k=0}^n 2^{n-k} (-1)^k \binom{n}{n-k}.$$

2. Combien de couples d'entiers de la forme (a, b) sont nécessaires pour qu'il y ait 2 couples satisfaisant $a_1 \bmod 5 = a_2 \bmod 5$ et $b_1 \bmod 5 = b_2 \bmod 5$?
3. Soient 5 points de coordonnées entières dans le plan. Montrer que le centre d'au moins un segment reliant 2 points possède des coordonnées entières.
4. Démontrer à l'aide d'un argument combinatoire *et* par manipulations algébriques *et* par induction l'identité

$$\binom{2n}{2} = 2 \binom{n}{2} + n^2.$$

A partir des lettres du mot DETESTEE, combien peut-on former de mots de huit lettres

- en utilisant exactement les lettres DETESTEE (exemple : EDTTEES)
 - en permettant les répétitions et les annulations (exemple : DDDDDEED)
 - en utilisant exactement les lettres DETESTEE, et en exigeant que les mots formés soient en ordre alphabétique (exemple : DEEEESTT)
 - en permettant les répétitions et les annulations, et en exigeant que les mots formés soient en ordre alphabétique (exemple : DDDDEEET)
5. Quelles sont les trois permutations suivant 15468732 en ordre lexicographique ?
6. Combien y a-t-il de zéros consécutifs à la fin (droite) de l'expansion ternaire (en base trois) du nombre $((150)_{10})!$? Généraliser votre argument pour trouver le nombre de zéros dans l'expansion ternaire de $n!$. Qu'en est-il des autres bases que 3 ?
7. De combien de façons peut-on distribuer des mains de 5 cartes à 4 joueurs à partir d'un jeu de 52 cartes ?
8. Résoudre l'équation de récurrence :

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad a_0 = 3 \quad a_1 = 6.$$