

IFT 1065 – Démonstration 8

1. Soit $p(n)$ le nombre de relations d'équivalences possibles pour un ensemble de cardinalité n . Démontrer que $p(n)$ satisfait la relation de récurrence :

$$p(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p(n-j-1), \quad p(0) = 1.$$

2. Démontrer par induction l'identité :

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}.$$

Suggestion : Utiliser deux fois l'identité de Pascal, en notant que $C(p, k) = 0$ si $k < 0$.

3. Démontrer l'identité précédente en complétant la somme de gauche avec les termes correspondant aux indices $n+1, n+2, \dots, 2n+1$ et en utilisant le théorème dit du 'binôme de Newton'.
4. Considérer l'algorithme suivant :

algorithme TOTO(n)

$j \leftarrow n$

$x \leftarrow 0$

tant que $j \geq 1$ faire 1. **pour** i allant de 1 à j faire $x \leftarrow x + 1$

2. $j \leftarrow \lfloor j/2 \rfloor$

A la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle est la valeur de la variable x ? Quel est la complexité de cet algorithme, exprimé à l'aide de la notation O ?

5. Combien y a-t-il d'éléments dans l'union de 4 ensembles de cardinalités respectives 50, 60, 70 et 80, sachant que chaque paire a 5 éléments en commun, chaque triplet a 1 élément en commun, et que l'intersection des 4 ensembles est vide?
6. Présenter la technique dite du "crible d'Ératosthène", qui se trouve décrite, avec une jolie "applet", à http://fr.wikipedia.org/wiki/Crible_d'Ératosthène.