

À remettre le mardi 27 janvier 2009 (au début de la démo)

1 _____ (20 points)

Simplifier les expressions logiques suivantes:

$$\begin{aligned} & [(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)] \\ & \neg(p \vee q) \vee [(\neg p \wedge q) \vee \neg q]. \end{aligned}$$

Solution: En utilisant la propriété de distributivité:

$$[(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)] \equiv p \vee (q \wedge \neg q) \equiv p \vee \mathbf{F} \equiv p.$$

$$\begin{aligned} \neg(p \vee q) \vee [(\neg p \wedge q) \vee \neg q] & \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee [(\neg p \wedge q) \vee \neg q] \\ & \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee [(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)] \\ & \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee \neg q) \\ & \equiv \neg p \wedge \neg q \quad (\text{Pourquoi?}) \end{aligned}$$

2 _____ (20 points)

La notation $\exists!x P(x)$ signifie qu'il existe un et un seul élément x satisfaisant la fonction propositionnelle $P(x)$. Exprimer $\exists!x P(x)$ à l'aide des seuls symboles $\exists, \forall, x, (,), =, \neg, \vee$ et \wedge (vous n'êtes pas obligé d'utiliser tous ces symboles).

Solution:

$$[\exists P(x)] \wedge \forall y \forall z [P(y) = P(z)] \rightarrow (y = z),$$

à partir de quoi on obtient une solution (pas la seule) en utilisant l'identité $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

3 _____ (20 points)

Donner la table de vérité de la proposition

$$[\neg(p \wedge q)] \vee [p \rightarrow \neg r].$$

Solution: Facile. :-)

4 _____ (20 points)

Démontrer l'équivalence des énoncés

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

et

$$\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)).$$

Solution:

$\forall x P(x) \Rightarrow \forall x \forall y P(x) \vee P(y)$. Même chose pour $\forall y P(y)$. Pour prouver la réciproque, on procède par contradiction. Si $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ n'est pas satisfaite, alors il doit exister un couple (x, y) (on peut avoir $x = y$) pour lequel on a $\neg P(x) \wedge \neg Q(y)$, ce qui contredit $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$.

5 _____ (20 points)

On définit l'opérateur \circ de la façon suivante:

$$p \circ q \equiv \neg(p \wedge q).$$

Exprimer $p \vee q$, $p \wedge q$, $\neg p$ et $p \rightarrow q$ à l'aide du seul opérateur \circ .

Solution:

$$\begin{aligned} p \circ p &\equiv \neg p \\ p \vee q &\equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg p \circ \neg q \equiv (p \circ p) \circ (q \circ q) \\ p \wedge q &\equiv \neg(p \circ q) \equiv (p \circ q) \circ (p \circ q) \\ p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \equiv (p \circ p) \vee q \equiv [(p \circ p) \circ (p \circ p)] \circ [q \circ q] \end{aligned}$$